# 19η Άσκηση

**Ανισώσεις 1ου Βαθμού**

Έστω οι πραγματικοί αριθμοί α,β με $\alpha = |\beta - 1|$.

**α)** Να βρείτε τις ακέραιες τιμές των α,β για τις οποίες η εξίσωση $x^2 - 2x + \alpha = 0$ έχει δύο ρίζες άνισες.

**β)** Να βρείτε τα α,β για τα οποία η εξίσωση $x^2 - (\alpha - 3\beta)x - \alpha = 0$ έχει μία διπλή ρίζα.

**γ)** Να βρείτε τα α,β για τα οποία $1 < |\alpha - 4| < 2$.

**δ)** Έστω $\alpha < d(\beta, 3)$

**i.** Κάνοντας χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών, να βρείτε τους θετικούς αριθμούς α,β για τους οποίους $\alpha < d(\beta, 3)$.

**ii.** Να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο το προηγούμενο συμπέρασμα.

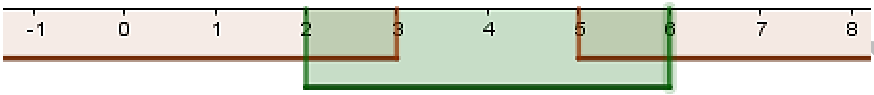
Στέλιος Μιχαήλογλου

## Λύση

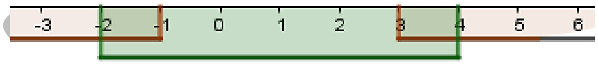
**α)** Η εξίσωση είναι 2ου βαθμού και έχει δύο ρίζες άνισες όταν $\Delta > 0 \Leftrightarrow (-2)^2 - 4\alpha > 0 \Leftrightarrow 4 > 4\alpha \Leftrightarrow \alpha < 1$ . Όμως $\alpha = |\beta - 1| \geq 0$ , οπότε ο α είναι ακέραιος αριθμός με $0 \leq \alpha < 1$ , οπότε $\alpha = 0$. Τότε $|\beta - 1| = 0 \Leftrightarrow \beta - 1 = 0 \Leftrightarrow \beta = 1$ .

**β)** Η εξίσωση είναι 2ου βαθμού και έχει μία διπλή ρίζα όταν $\Delta = 0 \Leftrightarrow (\alpha - 3\beta)^2 + 4\alpha = 0$ (1)
Όμως $(\alpha - 3\beta)^2 \geq 0$ και $\alpha \geq 0$ , οπότε η (1) αληθεύει μόνο όταν $\alpha = 0$ και $\alpha - 3\beta = 0 \Leftrightarrow 0 - 3\beta = 0 \Leftrightarrow \beta = 0$

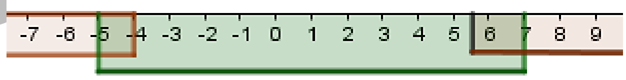
**γ)** $|\alpha - 4| > 1 \Leftrightarrow (\alpha - 4 < -1 \Leftrightarrow \alpha < 3)$ ή $(\alpha - 4 > 1 \Leftrightarrow \alpha > 5)$ (2) και
$|\alpha - 4| < 2 \Leftrightarrow -2 < \alpha - 4 < 2 \Leftrightarrow 2 < \alpha < 6$ (3)



Με συναλήθευση των (2), (3) προκύπτει ότι $2 < \alpha < 3$ ή $5 < \alpha < 6$ , οπότε
$2 < |\beta - 1| < 3$ (4) ή $5 < |\beta - 1| < 6$ (5)
$(4) \Rightarrow$ $|\beta - 1| > 2 \Leftrightarrow (\beta - 1 < -2 \Leftrightarrow \beta < -1)$ ή $(\beta - 1 > 2 \Leftrightarrow \beta > 3)$ και
$|\beta - 1| < 3 \Leftrightarrow -3 < \beta - 1 < 3 \Leftrightarrow -2 < \beta < 4$ .

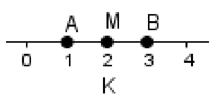
Με συναλήθευση  προκύπτει ότι $\beta \in (-2,-1) \cup (3,4)$ .

$(5) \Rightarrow$ $|\beta - 1| > 5 \Leftrightarrow (\beta - 1 < -5 \Leftrightarrow \beta < -4)$ ή $(\beta - 1 > 5 \Leftrightarrow \beta > 6)$ και
$|\beta - 1| < 6 \Leftrightarrow -6 < \beta - 1 < 6 \Leftrightarrow -5 < \beta < 7$ .

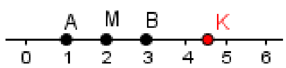


Με συναλήθευση προκύπτει ότι
$\beta \in (-5,-4) \cup (6,7)$
Τελικά $\beta \in (-5,-4) \cup (-2,-1) \cup (3,4) \cup (6,7)$

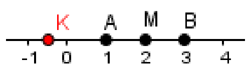
**δ) i.** $\alpha < d(\beta,3) \Leftrightarrow |\beta - 1| < d(\beta,3) \Leftrightarrow d(\beta,1) < d(\beta,3)$
Έστω Κ το σημείο του άξονα που αντιπροσωπεύει τον αριθμό β και Α,Β τα σημεία στους αριθμούς 1 και 3 αντίστοιχα. Τότε η σχέση $d(\beta,1) < d(\beta,3)$ γράφεται $(\text{KA}) < (\text{KB})$.



Αν το Κ βρίσκεται στο μέσο Μ του τμήματος ΑΒ τότε $(\text{KA}) = (\text{KB})$ που απορρίπτεται.



Αν το Κ είναι οποιοδήποτε σημείο της ημιευθείας ΜΒ (εκτός του Μ) τότε $(\text{KA}) > (\text{KB})$ που απορρίπτεται.



Αν το Κ είναι οποιοδήποτε σημείο της ημιευθείας ΜΑ (εκτός του Μ) τότε $(\text{KA}) < (\text{KB})$ που είναι δεκτό. Άρα $\beta < 2$

**ii.** $\alpha < d(\beta,3) \Leftrightarrow |\beta - 1| < |\beta - 3| \Leftrightarrow (\beta - 1)^2 < (\beta - 3)^2 \Leftrightarrow \cancel{\beta^2} - 2\beta + 1 < \cancel{\beta^2} - 6\beta + 9 \Leftrightarrow$
$6\beta - 2\beta < 9 - 1 \Leftrightarrow 4\beta < 8 \Leftrightarrow \beta < 2$