

Ρυθμός Μεταβολής

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\ln x}$, $x > 1$ και ένα σημείο της $K(k, f(k))$.

a) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε, της γραφικής παράστασης της f στο σημείο K καθώς και το σημείο A που η ε τέμνει τον άξονα x .

b) Αν η τετμημένη του σημείου K απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων με ταχύτητα $2k \text{ cm/sec}$, τότε:

i. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του A τη χρονική στιγμή t_0 που είναι $k = e$.

ii. Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας θ που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα

$$x$$
 τη χρονική στιγμή t_0 δίνεται από τη σχέση $\theta'(t_0) = \frac{6}{e} \sin^2 \theta(t_0)$.

2. Σημείο κινείται στην παραβολή $y = 2x^2$, $x > 0$ και ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι 3 cm/sec .

A) Τη στιγμή που η απόσταση OM του σημείου από την αρχή των αξόνων είναι $\sqrt{68} \text{ cm}$ να βρείτε:

a) το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του.

b) το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου που εχει τις δύο πλευρές του στους άξονες και διαγώνιο OM .

γ) το ρυθμό μεταβολής της γωνίας $\theta = M O x$

B) Το σημείο οπου οι ρυθμοί μεταβολής των συντεταγμένων του M είναι ίσοι.

3. Δίνεται η παραβολή $y = 1 - x^2$ και το σημείο της $M(x_0, y_0)$, $0 \leq x_0 \leq 1$. Η εφαπτομένη της παραβολής στο M τέμνει τους άξονες στα A και B . Αν, καθώς κινείται το M , το A κινείται στον Ox με ταχύτητα $v_A = 3 \text{ m/sec}$, να βρείτε:

a) Την ταχύτητα με την οποία κινείται το B στον Oy όταν $x_0 = \frac{1}{2}$.

b) Το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου OAB όταν $x_0 = \frac{1}{2}$.

γ) το εμβαδό του τριγώνου OAB τη χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του M είναι διπλάσιος από την απόλυτη τιμή του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης του.

4. Εστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 1$, $x > 0$. Ένα σημείο M κινείται στην C_f και έστω K η προβολή του στον άξονα x . Αν το K απομακρύνεται από την αρχή O των αξόνων με ταχύτητα 3 cm/sec , τη χρονική στιγμή που η τετμημένη του M είναι 2, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής:

a) της απόστασης KM **b)** της απόστασης OM **γ)** της γωνίας $\theta = MOK$

δ) της απόστασης OE , όπου E είναι το σημείο τομής τυχαίας εφαπτομένης της C_f με τον άξονα x .

5. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(3x-5)-1}{x-2} = 12$.

a) Να αποδείξετε ότι: i. $f(1) = 1$ ii. $f'(1) = 4$

β) Εστω (ε) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1, f(1))$.

Εστω σημείο Σ που κινείται στην (ε) με τετμημένη μεγαλύτερη από το 1, της οποίας η ταχύτητα είναι $\frac{3}{4} \text{ cm/sec}$. Να βρείτε:

i. Το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του Σ .

ii. Το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου OAS .

6. Εστω $h(x) = \begin{cases} f(3-x^3), & x < 1 \\ f(5-3x), & x \geq 1 \end{cases}$, όπου $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$.

a) Να αποδείξετε ότι η h είναι παραγωγίσιμη στο $x_1 = 1$.

β) Αν $f(2) = f'(2) = -\frac{1}{3}$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της h στο σημείο $A(1, h(1))$.

γ) Σημείο $M(x, y)$ με $x > 0, y > 0$ κινείται στην ευθεία (ε) και πλησιάζει τον άξονα x με ρυθμό 2 cm/sec . Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης $s = (OM)$, όπου O η αρχή των αξόνων, τη χρονική στιγμή κατά την οποία το M έχει τεταγμένη 1.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 4x + 2, x > 0$.

a) Να βρείτε σημείο της C_f με θετική τετμημένη, στο οποίο η εφαπτομένη της σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με ελάχιστο εμβαδό.

β) Ενα υλικό σημείο N κινείται επί της C_f και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 1 cm/sec .

i. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του τη χρονική στιγμή που διέρχεται από το σημείο $A(1, 7)$.

ii. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας $NOx = \theta$, τη χρονική στιγμή που διέρχεται από το A .

γ) Να υπολογίσετε τα όρια: i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{f'(x)} - 2}{x}$ ii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + f(x) - 8}{x^2 - 1}$

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x+1}$.

a) Να βρεθεί η πρώτη παράγωγος της f .

β) Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της καμπύλης της συνάρτησης f που είναι παράλληλες στην ευθεία $y = 2x + 5$.

γ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ο ρυθμός μεταβολής της κλίσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f είναι θετικός. μ 10

δ) Ενα κινητό κινείται επί της γραφικής παράστασης της f . Να βρείτε τη θέση του τη χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι διπλάσιος από το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του.

9. Δίνονται οι μη μηδενικοί μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις: $w = \frac{\sqrt{5} \cdot z}{|z|}$ και

$$w^2 = 3 + \lambda i, \lambda > 0.$$

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = 4$.

β) Να αποδείξετε ότι η εικόνα $M(x, y)$ του z κινείται επί της ευθείας $y = \frac{1}{2}x$.

γ) Εστω ότι το M βρίσκεται στο πρώτο τετραρτημόριο και απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων με ταχύτητα 5 cm/sec .

i. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετυμηένης του, τη χρονική στιγμή που διέρχεται από το σημείο $B(2,1)$.

ii. Εστω K η προβολή του M στον άξονα x . Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου OKM , τη χρονική στιγμή που το M βρίσκεται στο B .

δ) Να αποδείξετε ότι $\sqrt{5}|z - 3 + 4i| - 11 \geq 0$.

10. Δίνεται ο μιγαδικός $z = \frac{2}{\lambda+i}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η εικόνα M του μιγαδικού z κινείται σε κύκλο με κέντρο $K(0, -1)$ και ακτίνα 1.

β) Να αποδείξετε ότι $|Re(z)| \leq 1$.

γ) Άν $z_1 = \frac{2}{\lambda_1+i}$ και $z_2 = \frac{2}{\lambda_2+i}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ με $|z_1 - z_2| = 2$, να αποδείξετε ότι $|z_1 + z_2| = 2$.

δ) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετυμηένης του M καθώς διέρχεται από το σημείο $A(0, -2)$.

ε) Άν η τετυμηένη του M αυξάνεται με ρυθμό 1 m/sec , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας $MOx' = \theta$, τη χρονική στιγμή που διέρχεται από το σημείο $B\left(-\frac{3}{5}, -\frac{9}{5}\right)$.

Στέλιος Μιχαήλογλου

Μερικές Λύσεις

1. α) $f'(x) = -\frac{1}{x \ln^2 x}$, $x > 1$.

$$\varepsilon: y - f(k) = f'(k)(x - k) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{k \ln^2 k} x + \frac{\ln k + 1}{\ln^2 k}$$

Για $y = 0$ είναι $x = k \ln k + k$, αριθμος $A(k \ln k + k, 0)$.

β) $k'(t) = 2k \text{ cm/s}$

i. $k(t_0) = e$, $k'(t) = 2k(t_0) = 2e \text{ cm/s}$, $x_A(t) = k(t) \ln k(t) + k(t)$ και

$$x'_A(t) = k'(t) \ln k(t) + k(t) \frac{k'(t)}{k(t)} + k'(t) = k'(t) \ln k(t) + 2k'(t) = 6e$$

ii. Είναι $\varepsilon \varphi \theta(t) = \lambda_e = -\frac{1}{k(t) \ln^2 k(t)}$ και $(\varepsilon \varphi \theta(t))' = \left(-\frac{1}{k(t) \ln^2 k(t)} \right)' \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{\sigma v^2 \theta(t)} \theta'(t) = \frac{1}{k^2(t) \ln^4 k(t)} \left(k'(t) \ln^2 k(t) + k(t) \frac{2 \ln k(t)}{k(t)} k'(t) \right) \Rightarrow \theta'(t_0) = \frac{6}{e} \sigma v^2 \theta(t_0).$$

2. A) $M(x(t), y(t))$, $y(t) = 2x^2(t)$ $x'(t) = 3 \text{ cm/s}$,

$$(OM)(t_0) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \Leftrightarrow \sqrt{x^2(t_0) + 4x^4(t_0)} = \sqrt{68} \Leftrightarrow 4x^4(t_0) + x^2(t_0) - 68 = 0$$

Θέτουμε $x^2(t_0) = \omega > 0$, τότε $4\omega^2 + \omega - 68 = 0 \Leftrightarrow \omega = 4$ ή $\omega = -\frac{17}{4}$ που απορρίπτεται.

Αριθμος $x^2(t_0) = 4$ και $x(t_0) = 2$. Τότε $y(t_0) = 8$.

α) $y'(t) = (2x^2(t))' = 4x(t)x'(t)$ και για $t = t_0$ έχουμε $y'(t_0) = 4x(t_0)x'(t_0) = 24$

β) $E(t) = x(t)y(t) = 2x^3(t)$, $E'(t_0) = 6x^2(t)x'(t_0) = 72$

γ) Είναι $\varepsilon \varphi \theta(t) = \frac{y(t)}{x(t)}$ και $(\varepsilon \varphi \theta(t))' = \left(\frac{y(t)}{x(t)} \right)' \Leftrightarrow \frac{1}{\sigma v^2 \theta(t)} \theta'(t) = \frac{y'(t)x(t) - y(t)x'(t)}{x^2(t)} \Leftrightarrow$

Για $t = t_0$ έχουμε $\varepsilon \varphi \theta(t_0) = \frac{y(t_0)}{x(t_0)} = 4$ και

$$(1 + \varepsilon \varphi^2 \theta(t_0)) \theta'(t_0) = \frac{y'(t_0)x(t_0) - y(t_0)x'(t_0)}{x^2(t_0)} \Leftrightarrow$$

$$(1 + 16) \theta'(t_0) = \frac{24 \cdot 2 - 8 \cdot 3}{4} \Leftrightarrow 17 \theta'(t_0) = 6 \Leftrightarrow \theta'(t_0) = \frac{6}{17}$$

β) $y'(t_0) = x'(t_0)$

$$4x(t_0)x'(t_0) = x'(t_0) \Leftrightarrow x(t_0) = \frac{1}{4}. \text{ Τότε } y(t_0) = \frac{1}{8} \text{ και } M\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right).$$

3. $M(x_0(t), y_0(t))$ με $y_0(t) = 1 - x_0^2(t)$.

Η ΑΒ έχει εξίσωση $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y = -2x_0x + x_0^2 + 1$

$$\text{Για } y=0 \text{ είναι } x_A(t) = \frac{1+x_0^2(t)}{2x_0(t)} = \frac{1}{2x_0(t)} + \frac{x_0(t)}{2},$$

$$\text{Είναι } x'_A(t) = 3 \text{ m/s, οπότε } \left(\frac{1}{2x_0(t)} + \frac{x_0(t)}{2} \right)' = 3 \Leftrightarrow -\frac{x'_0(t)}{2x_0^2(t)} + \frac{x'_0(t)}{2} = 3 \quad (1)$$

$$\text{Οταν } x_0(t_0) = \frac{1}{2}, \text{ είναι (1)} \Rightarrow -2x'_0(t_0) + \frac{x'_0(t_0)}{2} = 3 \Leftrightarrow x'_0(t_0) = -2$$

$$\text{a) } y'_B(t_0) = 2x_0(t_0)x'_0(t_0) = 2 \cdot \frac{1}{2}(-2) = -2 \text{ m/s}$$

$$\text{b) } (\text{OAB}) = \frac{1}{2}(\text{OA})(\text{OB}) \Leftrightarrow$$

$$E(t) = \frac{1}{2}x_A(t)y_B(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+x_0^2(t)}{2x_0(t)} (1+x_0^2(t)) = \frac{(1+x_0^2(t))^2}{4x_0(t)} \Leftrightarrow$$

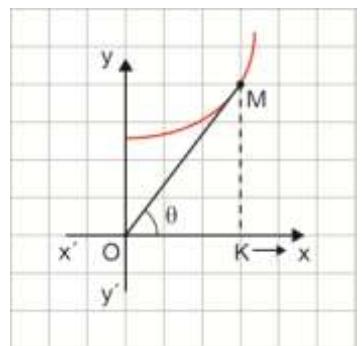
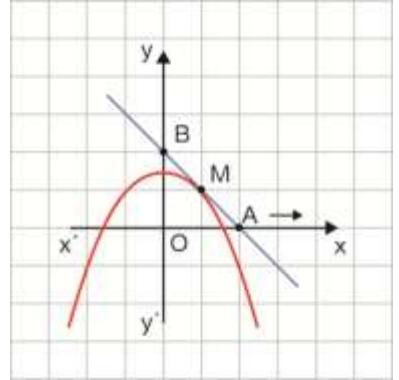
$$E(t) = \frac{x_0^4(t) + 2x_0^2(t) + 1}{4x_0(t)} = \frac{1}{4}x_0^3(t) + \frac{1}{2}x_0(t) + \frac{1}{4x_0(t)} \text{ και}$$

$$E'(t) = \frac{3}{4}x_0^2(t)x'_0(t) + \frac{1}{2}x'_0(t) - \frac{x'_0(t)}{4x_0^2(t)} \text{ και}$$

$$E'(t_0) = \frac{3}{4}x_0^2(t_0)x'_0(t_0) + \frac{1}{2}x'_0(t_0) - \frac{x'_0(t_0)}{4x_0^2(t_0)} = \frac{5}{8} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$\text{γ) } x'_0(t_1) = 2|y'_0(t_1)| = 4|x'_0(t_1)x_0(t_1)| \stackrel{x_0(t_1) > 0}{\Leftrightarrow} x_0(t_1) = \frac{1}{4}$$

$$E(t_1) = \frac{1}{4}x_0^3(t_1) + \frac{1}{2}x_0(t_1) + \frac{1}{4x_0(t_1)} = \frac{289}{256}$$



4. Εστω $M(x(t), y(t))$, τότε $K(x(t), 0)$ με $x'(t) = 3 \text{ cm/s}$

$$x(t_0) = 2 \text{ και } y(t_0) = x^2(t_0) + 1 = 5.$$

$$\text{a) } (KM) = y(t) \text{ και } y'(t) = 2x(t)x'(t) \text{ και } y'(t_0) = 2x(t_0)x'(t_0) = 12 \text{ cm/s}$$

$$\text{b) } (OM)(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \text{ και}$$

$$(OM)'(t_0) = \frac{x(t_0)x'(t_0) + y(t_0)y'(t_0)}{\sqrt{x^2(t_0) + y^2(t_0)}} = \frac{66\sqrt{29}}{29}$$

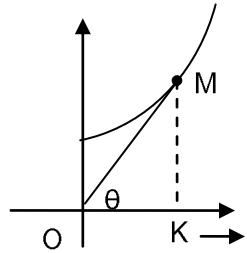
$$\text{γ) } \text{Είναι } \varepsilon\varphi\theta(t) = \frac{y(t)}{x(t)} \text{ και } \frac{\theta'(t_0)}{\sigma v \nu^2 \theta(t_0)} = \frac{y'(t_0)x(t_0) - x'(t_0)y(t_0)}{x^2(t_0)} \Leftrightarrow \theta'(t_0) = \frac{9}{29} \text{ rad/s}$$

δ) Εστω $M(x_0, f(x_0))$. Η εφαπτομένη στο M είναι η ε:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - (x_0^2 + 1) = 2x_0(x - x_0) \Leftrightarrow y = 2x_0x - x_0^2 + 1$$

$$\text{Για } y=0 \text{ είναι } x = \frac{x_0^2 - 1}{2x_0}, \text{ άρα } E\left(\frac{x_0^2 - 1}{2x_0}, 0\right).$$

$$\text{Είναι } x_E(t) = \frac{x_0^2(t) - 1}{2x_0(t)} \text{ και } x'_E(t_0) = \frac{4x_0^2(t_0)x'(t_0) - 2x'(t_0)(x_0^2(t_0) - 1)}{4x_0^2(t_0)} = \frac{15}{8} \text{ cm/s}$$



5. a) i. Εστω $\varphi(x) = \frac{f(3x-5)-1}{x-2} \Leftrightarrow f(3x-5) = \varphi(x)(x-2)+1, x \neq 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(3x-5) = \lim_{x \rightarrow 2} [\varphi(x)(x-2)+1] = 1 \stackrel{3x-5=u}{\Rightarrow} \lim_{u \rightarrow 1} f(u) = 1$$

Είναι $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$

ii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(3x-5)-1}{x-2} = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{f(u)-f(1)}{\frac{u+5}{3}-2} = 3 \lim_{u \rightarrow 1} \frac{f(u)-f(1)}{u-1} \Leftrightarrow 3f'(1) = 12 \Leftrightarrow f'(1) = 4$

b) ε: $y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y - 1 = 4(x-1) \Leftrightarrow y = 4x - 3$

$\Sigma(x(t), y(t)), x(t) > 1, x'(t) = \frac{3}{4}$ και $y(t) = 4x(t) - 3$

i. $y'(t) = 4x'(t) = 4 \cdot \frac{3}{4} = 3 \text{ cm/sec.}$

ii. Είναι $\det(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OS}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x(t) & y(t) \end{vmatrix} = y(t) - x(t) = 4x(t) - 3 - x(t) = 3x(t) - 3 > 0$

και $E(t) = (OA\Sigma) = \frac{1}{2} |3x(t) - 3| = \frac{3}{2}(x(t) - 1)$

$E'(t) = \frac{3}{2}x'(t) = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{8} \text{ cm}^2/\text{sec.}$

6. a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{h(x) - h(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(3-x^3) - f(2)}{x-1} \stackrel{3-x^3=u}{=} \lim_{u \rightarrow 2^+} \frac{f(u) - f(2)}{\sqrt[3]{3-u} - 1} =$

$$= \lim_{u \rightarrow 2^+} \left\{ \frac{f(u) - f(2)}{-(u-2)} \left[(\sqrt[3]{3-u})^2 + \sqrt[3]{3-u} + 1 \right] \right\} = -3f'(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{h(x) - h(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(5-3x) - f(2)}{x-1} \stackrel{5-3x=u}{=} \lim_{u \rightarrow 2^+} \frac{f(u) - f(2)}{\frac{5-u}{3} - 1} =$$

$$\lim_{u \rightarrow 2^+} \left(-3 \frac{f(u) - f(2)}{u-2} \right) = -3f'(2), \text{ αρα } h'(1) = -3f'(2)$$

b) $h(1) = f(2) = -\frac{1}{3}$ και $h'(1) = -3f'(2) = 1$, αρα $(\epsilon) y + \frac{1}{3} = x - 1 \Leftrightarrow y = x - \frac{4}{3}$

γ) Η ε τέμνει τους άξονες στα $A\left(\frac{4}{3}, 0\right)$ και $\left(0, \frac{4}{3}\right)$.

Αν $(AM) = h(t)$, τότε $h'(t) = -2 \text{ cm/sec.}$

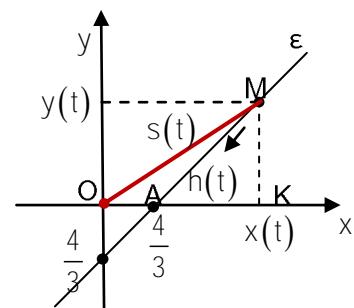
Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο MAK, έχουμε:

$$(AK)^2 + (MK)^2 = (AM)^2 \Leftrightarrow \left(x(t) - \frac{4}{3}\right)^2 + y^2(t) = h^2(t) \Leftrightarrow$$

$$\left(x(t) - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(y(t) - \frac{4}{3}\right)^2 = h^2(t) \Leftrightarrow 2\left(x^2(t) - \frac{8}{3}x(t) + \frac{16}{9}\right) = h^2(t) \Leftrightarrow$$

$$2x^2(t) - \frac{16}{3}x(t) + \frac{32}{9} = h^2(t) \quad (1)$$

Παραγωγίζοντας την (1), έχουμε:



$$4x(t)x'(t) - \frac{16}{3}x'(t) = 2h(t)h'(t) \Leftrightarrow 2x(t)x'(t) - \frac{8}{3}x'(t) = h(t)h'(t) \quad (2)$$

Τη χρονική στιγμή t_0 που είναι $y(t_0) = 1$, είναι $y(t_0) = x(t_0) - \frac{4}{3} \Leftrightarrow x(t_0) = \frac{7}{3}$ και

$$\text{από τη σχέση (1)} \Rightarrow 2x^2(t_0) - \frac{16}{3}x(t_0) + \frac{32}{9} = h^2(t_0) \Leftrightarrow h(t_0) = \sqrt{2}$$

$$\text{Η σχέση (2) για } t = t_0 \text{ γίνεται: } 2x(t_0)x'(t_0) - \frac{8}{3}x'(t_0) = h(t_0)h'(t_0) \Leftrightarrow$$

$$2\frac{7}{3}x'(t_0) - \frac{8}{3}x'(t_0) = -2\sqrt{2} \Leftrightarrow x'(t_0) = -\sqrt{2} \text{ cm/sec}$$

$$\text{Είναι } (OM) = s(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} = \sqrt{x^2(t) + \left(x(t) - \frac{4}{3}\right)^2} = \sqrt{2x^2(t) - \frac{8}{3}x(t) + \frac{16}{9}} \text{ και}$$

$$s'(t) = \frac{2x(t)x'(t) - \frac{4}{3}x'(t)}{\sqrt{2x^2(t) - \frac{8}{3}x(t) + \frac{16}{9}}} \cdot \text{Τη χρονική στιγμή } t = t_0, \text{ είναι}$$

$$s'(t_0) = \frac{2x(t_0)x'(t_0) - \frac{4}{3}x'(t_0)}{\sqrt{2x^2(t_0) - \frac{8}{3}x(t_0) + \frac{16}{9}}} = \frac{\left(2\frac{7}{3} - \frac{4}{3}\right)(-\sqrt{2})}{\sqrt{2\frac{49}{9} - \frac{8}{3} \cdot \frac{7}{3} + \frac{16}{9}}} = -\frac{10\sqrt{29}}{29} \text{ cm/sec}$$