29η Άσκηση

Έως κυρτότητα συνάρτησης

Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι
$2f(x)+4xf'(x)+(x^2+1)f''(x)=e^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=f'(0)=1$.

α) Να δείξετε ότι $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1}$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $e^x \geq x^2+1$ για κάθε $x\geq 0$.

γ) Να δείξετε ότι $e^{x^2} \geq \dfrac{1}{3}x^6+x^2+1$ για κάθε $x\geq 0$.

δ) Να δείξετε ότι η f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής.

ε) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $e^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ και $\dfrac{4}{3}$.

στ) Να λύσετε την εξίσωση $4x^2+4x+2=e^x\left(x^2+2x+2\right)$.

Στέλιος Μιχαήλογλου

Λύση

α) Αρκεί να δείξουμε ότι $f(x)=\frac{e^x}{x^2+1} \Leftrightarrow (x^2+1)f(x)-e^x=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=(x^2+1)f(x)-e^x,\ x\in\mathbb{R}$.

Είναι $g'(x)=2xf(x)+(x^2+1)f'(x)-e^x$ και

$$g''(x)=2f(x)+2xf'(x)+2xf'(x)+(x^2+1)f''(x)-e^x \Leftrightarrow$$

$$g''(x)=2f(x)+4xf'(x)+(x^2+1)f''(x)-e^x=e^x-e^x=0 \Leftrightarrow g'(x)=c,\ c\in\mathbb{R}.$$

Είναι $g'(0)=2\cdot 0\cdot f(0)+(0^2+1)f'(0)-e^0=0 \Leftrightarrow c=0$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$g'(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=c_1,\ c_1\in\mathbb{R}$. Είναι $g(0)=f(0)-1=0$ άρα $c_1=0$ και

$$g(x)=0 \Leftrightarrow (x^2+1)f(x)-e^x=0 \Leftrightarrow f(x)=\frac{e^x}{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}.$$

β) Είναι $f'(x)=\frac{e^x(x^2+1)-e^x 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{e^x(x^2+1-2x)}{(x^2+1)^2}=\frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$.

Για κάθε $x\neq 1$ είναι $f'(x)>0$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε δεν έχει ακρότατα.

Για κάθε $x\geq 0$ είναι $f(x)\geq f(0) \Leftrightarrow \frac{e^x}{x^2+1}\geq 1 \Leftrightarrow e^x\geq x^2+1$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$.

γ) Έστω $h(x)=e^{x^2}-\frac{1}{3}x^6-x^2-1,\ x\geq 0.$ Είναι $h'(x)=2xe^{x^2}-2x^5-2x=2x\left(e^{x^2}-x^4-1\right)$

Για κάθε $x>0$ είναι $e^x>x^2+1$ οπότε αντικαθιστώντας όπου x το x^2 προκύπτει ότι

$e^{x^2}>x^4+1 \Leftrightarrow e^{x^2}-x^4-1>0$ άρα $h'(x)=>0 \Rightarrow h\nearrow[0,+\infty)$.

Για κάθε $x\geq 0$ είναι $h(x)\geq h(0) \Leftrightarrow e^{x^2}-\frac{1}{3}x^6-x^2-1\geq 0 \Leftrightarrow e^{x^2}\geq \frac{1}{3}x^6+x^2+1$

δ) Είναι $f''(x)=\frac{\left[e^x(x-1)^2\right]'(x^2+1)^{\cancel{2}}-e^x(x-1)^2\,2\cancel{(x^2+1)}\,2x}{(x^2+1)^{\cancel{4}3}} \Leftrightarrow$

$$f''(x)=\frac{\left[e^x(x-1)^2+e^x 2(x-1)\right](x^2+1)-e^x(x-1)^2 4x}{(x^2+1)^3} \Leftrightarrow$$

$$f''(x)=\frac{e^x(x-1)(x-1+2)(x^2+1)-e^x(x-1)^2 4x}{(x^2+1)^3} \Leftrightarrow$$

$$f''(x)=\frac{e^x(x-1)\left[(x+1)(x^2+1)-4x(x-1)\right]}{(x^2+1)^3}=\frac{e^x(x-1)(x^3-3x^2+5x+1)}{(x^2+1)^3}$$

Έστω $a(x)=x^3-3x^2+5x+1,\ a\in\mathbb{R}.$ Είναι $a'(x)=3x^2-6x+5>0 \Rightarrow a\nearrow\mathbb{R}$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}a(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-3x^2+5x+1)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}a(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-3x^2+5x+1)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$ η a έχει σύνολο τιμών το $a(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

Επειδή $0\in a(\mathbb{R})$ υπάρχει μοναδικό x_1 τέτοιο, ώστε $a(x_1)=0$.

Για κάθε $x < x_1 \overset{a\nearrow}{\Leftrightarrow} a(x) < a(x_1) = 0$ και για κάθε $x > x_1 \overset{a\nearrow}{\Leftrightarrow} a(x) > a(x_1) = 0$.
Επειδή $a(0) = 1$ και $a(-1) = -8 < 0$, λόγω του Θ.Bolzano η εξίσωση $a(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(-1,0)$. Όμως το x_1 είναι η μοναδική ρίζα της a, άρα $x_1 \in (-1,0)$.

x	$-\infty$ $\quad$ x_1	1	$+\infty$
e^x	+	+	+
$x-1$	-	-	+
$a(x)$	-	+	+
$(x^2+1)^3$	+	+	+
f''	+	-	+
f	$\cup$	Σ.Κ $\cap$	Σ.Κ. $\cup$

Από τον πίνακα μεταβολών προκύπτει ότι η f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής.

ε) $\sqrt{3} > \sqrt{2} \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(\sqrt{3}) > f(\sqrt{2}) \Leftrightarrow \dfrac{e^{\sqrt{3}}}{3+1} > \dfrac{e^{\sqrt{2}}}{2+1} \Leftrightarrow \dfrac{e^{\sqrt{3}}}{e^{\sqrt{2}}} > \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow e^{\sqrt{3}-\sqrt{2}} > \dfrac{4}{3}$

στ) $4x^2 + 4x + 2 = e^x(x^2 + 2x + 2) \Leftrightarrow (2x+1)^2 + 1 = e^x\left[(x+1)^2 + 1\right] \Leftrightarrow$

$$(2x+1)^2 + 1 = e^{2x+1-(x+1)}\left[(x+1)^2 + 1\right] \Leftrightarrow (2x+1)^2 + 1 = \frac{e^{2x+1}}{e^{x+1}}\left[(x+1)^2 + 1\right] \Leftrightarrow$$

$$\frac{e^{x+1}}{(x+1)^2 + 1} = \frac{e^{2x+1}}{(2x+1)^2 + 1} \Leftrightarrow f(x+1) = f(2x+1) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x + 1 = 2x + 1 \Leftrightarrow x = 0$$