ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 31 ΜΑΪΟΥ 2005
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha)<f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha)<\eta<f(\beta)$. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\eta$, $x\in[\alpha,\beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $g(\alpha)g(\beta)<0$, αφού $g(\alpha)=f(\alpha)-\eta<0$ και $g(\beta)=f(\beta)-\eta>0$.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=f(x_0)-\eta=0$, οπότε $f(x_0)=\eta$.

Α.2 Η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(\lambda x+\beta)]=0$, αντιστοίχως $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(\lambda x+\beta)]=0$.

Β. α. Λ **β.** Λ **γ.** Σ **δ.** Σ **ε.** Λ **στ.** Σ

ΘΕΜΑ 2ο

α) $|z_1|=3\Leftrightarrow|z_1|^2=3^2\Leftrightarrow z_1\bar{z}_1=9\Leftrightarrow\bar{z}_1=\dfrac{9}{z_1}$ και όμοια $\bar{z}_2=\dfrac{9}{z_2}$, $\bar{z}_3=\dfrac{9}{z_3}$.

β) $$\bar{w}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}+\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1}=\frac{\frac{9}{z_1}}{\frac{9}{z_2}}+\frac{\frac{9}{z_2}}{\frac{9}{z_1}}=\frac{9z_2}{9z_1}+\frac{9z_1}{9z_2}=\frac{z_2}{z_1}+\frac{z_1}{z_2}=w\Leftrightarrow w\in\mathbb{R}$$

γ) $$|z_1+z_2+z_3|=|\overline{z_1+z_2+z_3}|=|\bar{z}_1+\bar{z}_2+\bar{z}_3|=\left|\frac{9}{z_1}+\frac{9}{z_2}+\frac{9}{z_3}\right|=\left|9\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right)\right|\Leftrightarrow$$

$$|z_1+z_2+z_3|=9\left|\frac{z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2}{z_1\cdot z_2\cdot z_3}\right|=9\frac{|z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2|}{|z_1|\cdot|z_2|\cdot|z_3|}\Leftrightarrow$$

$$|z_1+z_2+z_3|=\frac{9|z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2|}{3\cdot3\cdot3}=\frac{1}{3}\cdot|z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2|$$

ΘΕΜΑ 3ο

α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=\lambda e^{\lambda x}$. Είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow\mathbb{R}$.

β. Εστω $M(x_0,f(x_0))$. Η εφαπτομένη της C_f στο M είναι η ευθεία ε με εξίσωση:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y-e^{\lambda x_0}=\lambda e^{\lambda x_0}(x-x_0)$$

Επειδή η ε διέρχεται από την αρχή των αξόνων, ισχύει ότι:

$$-e^{\lambda x_0}=\lambda e^{\lambda x_0}(-x_0)\Leftrightarrow -e^{\lambda x_0}=-\lambda x_0 e^{\lambda x_0}\Leftrightarrow \lambda x_0 e^{\lambda x_0}-e^{\lambda x_0}=0\Leftrightarrow e^{\lambda x_0}(\lambda x_0-1)=0\Leftrightarrow$$

$\lambda x_0-1=0\Leftrightarrow x_0=\frac{1}{\lambda}$ ή $e^{\lambda x_0}=0$ που είναι αδύνατο.

Για $x_0=\frac{1}{\lambda}$ είναι $f\left(\frac{1}{\lambda}\right)=e$, το σημείο Μ έχει συντεταγμένες $\left(\frac{1}{\lambda},e\right)$ και η ε έχει εξίσωση:

$$y-e=\lambda e\left(x-\frac{1}{\lambda}\right)\Leftrightarrow y-e=\lambda ex-\cancel{\lambda}e\frac{1}{\cancel{\lambda}}\Leftrightarrow y-\cancel{e}=\lambda ex-\cancel{e}\Leftrightarrow y=\lambda ex$$

γ. Η f' είναι παραγωγίσιμη με $f''(x)=\lambda^2 e^{\lambda x}$. Είναι $f''(x)>0\Rightarrow f$ κυρτή στο $\mathbb{R}$, οπότε βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός από το σημείο επαφής. Άρα το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E(\lambda)=\int_0^{\frac{1}{\lambda}}\left(e^{\lambda x}-\lambda ex\right)dx=\left[\frac{e^{\lambda x}}{\lambda}-\lambda e\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{\lambda}}=\frac{e}{\lambda}-\frac{\cancel{\lambda}e}{2}\frac{1}{\lambda^{\cancel{2}}}-\frac{1}{\lambda}=\frac{\overset{2}{\breve{e}}}{\lambda}-\frac{e}{2\lambda}-\frac{1}{\lambda}=\frac{e-2}{\lambda}$$

δ. $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda^2 E(\lambda)}{2+\eta\mu\lambda}=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda^{\cancel{2}}\frac{e-2}{\cancel{\lambda}}}{2+\eta\mu\lambda}=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{e-2}{\frac{2}{\lambda}+\frac{\eta\mu\lambda}{\lambda}}=+\infty$ γιατί $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{2}{\lambda}=0$, $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{\eta\mu\lambda}{\lambda}=0$ αφού

$\left|\frac{\eta\mu\lambda}{\lambda}\right|=\frac{|\eta\mu\lambda|}{\lambda}\le\frac{1}{\lambda}\Leftrightarrow-\frac{1}{\lambda}\le\frac{\eta\mu\lambda}{\lambda}\le\frac{1}{\lambda}$, είναι $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\lambda}=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left(-\frac{1}{\lambda}\right)=0$, οπότε από Κ.Π είναι και $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{\eta\mu\lambda}{\lambda}=0$. Επιπλέον $2+\eta\mu\lambda>0$ για κάθε $\lambda>0$.

ΘΕΜΑ 4ο

α. $2f'(x)=e^{x-f(x)}\Leftrightarrow 2f'(x)=\frac{e^x}{e^{f(x)}}\Leftrightarrow f'(x)e^{f(x)}=\frac{1}{2}e^x\Leftrightarrow\left(e^{f(x)}\right)'=\left(\frac{1}{2}e^x\right)'\Leftrightarrow$

$e^{f(x)}=\frac{1}{2}e^x+c,\ c\in\mathbb{R}$ (1).

Για $x=0$ η (1) γίνεται: $e^{f(0)}=\frac{1}{2}+c\Leftrightarrow 1=\frac{1}{2}+c\Leftrightarrow c=\frac{1}{2}$, άρα

$$e^{f(x)}=\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}\Leftrightarrow f(x)=\ln\left(\frac{e^x+1}{2}\right)$$

β. Θέτουμε $x-t=u\Leftrightarrow x=u+t$ και $dt=-du$. Για $t=0$ είναι $u=x$ και για $t=x$ είναι $u=0$.

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(x-t)dt}{\eta\mu x}=\lim_{x\to0}\frac{-\int_x^0 f(u)du}{\eta\mu x}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(u)du}{\eta\mu x}$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, η $\int_0^x f(u)du$ είναι παραγωγίσιμη και επειδή το $\eta\mu x$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση, έχουμε: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x f(u)du}{\eta\mu x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x}=\frac{f(0)}{1}=0$.

γ. Εστω

$$\varphi(x)=h(x)-g(x)=\int_{-x}^{x}t^{2005}f(t)dt-\frac{x^{2007}}{2007}=\int_{0}^{x}t^{2005}f(t)dt-\int_{0}^{-x}t^{2005}f(t)dt-\frac{x^{2007}}{2007},\ x\in\mathbb{R}.$$

Επειδή η συνάρτηση $t^{2005}f(t)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων, οι $\int_{0}^{x}t^{2005}f(t)dt,\ \int_{0}^{-x}t^{2005}f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμες και επειδή η $\frac{x^{2007}}{2007}$ είναι παραγωγίσιμη, η φ είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$\varphi'(x)=x^{2005}f(x)-x^{2005}f(-x)-x^{2006}=x^{2005}\left[\ln\left(\frac{1+e^{x}}{2}\right)-\ln\left(\frac{1+e^{-x}}{2}\right)\right]-x^{2006}\Leftrightarrow$$

$$\varphi'(x)=x^{2005}\ln\left(\frac{\frac{1+e^{x}}{2}}{\frac{1+\frac{1}{e^{x}}}{2}}\right)-x^{2006}=x^{2005}\ln\left(\frac{\frac{1+e^{x}}{2}}{\frac{\frac{e^{x}+1}{e^{x}}}{2}}\right)-x^{2006}=x^{2005}\ln\left(\frac{\frac{\cancel{1+e^{x}}}{\cancel{2}}}{\frac{\cancel{e^{x}+1}}{\cancel{2}e^{x}}}\right)-x^{2006}\Leftrightarrow$$

$$\varphi'(x)=x^{2005}\ln e^{x}-x^{2006}=x^{2005}\cdot x-x^{2006}=x^{2006}-x^{2006}=0\Leftrightarrow\varphi(x)=c,\ c\in\mathbb{R}.$$

Είναι $\varphi(0)=0$ άρα $\varphi(x)=0\Leftrightarrow h(x)=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

δ. Εστω $\sigma(x)=\int_{-x}^{x}t^{2005}f(t)dt-\frac{1}{2008}=\frac{x^{2007}}{2007}-\frac{1}{2008},\ x\in[0,1]$.

Είναι $\sigma(0)=-\frac{1}{2008}<0,\ \sigma(1)=\frac{1}{2007}-\frac{1}{2008}>0$, δηλαδή $\sigma(0)\sigma(1)<0$ και επειδή η σ είναι συνεχής στο $[0,1]$, λόγω του Θ.Bolzano, υπάρχει $\rho\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $\sigma(\rho)=0$

Η σ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $\sigma'(x)=x^{2006}>0\ \forall x\in(0,1)\Rightarrow\sigma\nearrow[0,1]$, άρα το ρ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $\sigma(x)=0$.