

7. Μιγαδικοί αριθμοί

Η έννοια του μιγαδικού αριθμού

- I. Ποιο είναι το Σύνολο \mathbb{C} των Μιγαδικών Αριθμών;
- II. Τι λέμε μιγαδικό αριθμό και από ποια μέρη αποτελείται;
- III. Πότε οι μιγαδικοί αριθμοί $z = \alpha + \beta i$ και $w = \gamma + \delta i$ είναι ίσοι; Πότε ο μιγαδικός z είναι ίσος με το μηδέν;
- IV. Τι ονομάζεται εικόνα του μιγαδικού και τι γνωρίζετε για το μιγαδικό επίπεδο;
- V. Ποιες ιδιότητες του συνόλου \mathbb{R} των πραγματικών αριθμών δεν μεταφέρονται στο σύνολο \mathbb{C} των μιγαδικών;
- VI. Πως ορίζεται διανυσματικά η πρόσθεση των μιγαδικών $\alpha + \beta i$ και $\gamma + \delta i$;
- VII. Πως ορίζεται διανυσματικά η διαφορά των μιγαδικών $\alpha + \beta i$ και $\gamma + \delta i$;
- VIII. Πως ορίζεται ο πολλαπλασιασμός και η διαιρεση δύο μιγαδικών;
- IX. Να αποδείξετε ότι $i^v = i^w$ όπου v, w θετικοί ακέραιοι και $v < w$ ο υπόλοιπος της ευκλείδειας διαιρέσης του w με το 4.
- X. Ποιος μιγαδικός ονομάζεται συζυγής του $\alpha + \beta i$ και ποιοι μιγαδικοί λέγονται συζυγείς;
- XI. Ποιες είναι οι ιδιότητες των συζυγών μιγαδικών;
- XII. Να αποδείξετε ότι $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$ και $\overline{(z^v)} = (\overline{z})^v$.
- XIII. Να λύσετε την εξίσωση $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$ με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$.

Βασικές ασκήσεις

1. Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $(1+i)^{2004} + (1-i)^{2004}$.
2. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι: $(\alpha + \beta i)^{2016} - (\beta - \alpha i)^{2016} = 0$.
3. Να βρείτε τον μεγαλύτερο φυσικό αριθμό n , με $n < 20$, για τον οποίο ισχύει:
$$(5+2i)^n + (-2+5i)^n = 0.$$
4. Δίνονται οι μιγαδικοί $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $w = 1+z$.
A) Να αποδείξετε ότι:
i. $1+z+z^2=0$ ii. $z^3=1$ iii. $w^{2v+1}=-z^{v+2}$ iv. $w^{2v}=z^v$
B) Να βρείτε τους μιγαδικούς w^{48} και w^{25} .
5. Εστω τα πολυώνυμα $P(z)=z^2-2z+2$ και $Q(z)=z^3+\alpha z^2+\beta z-2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
i. Να βρείτε τις ρίζες z_1, z_2 του $P(z)$ και να αποδείξετε ότι $z_1^{8k} + z_2^{8k} = 2^{4k+1}$
ii. Αν μια ρίζα του $P(z)$ είναι και ρίζα του $Q(z)$, να βρείτε τα α, β .
6. Να λύσετε τις εξισώσεις: **a)** $\overline{z} = z^2$ **b)** $\overline{z} = z^3$.

7. Εστω ο μιγαδικός z με $z \neq 0$. Να δείξετε ότι ο $\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}$ είναι πραγματικός και ότι $-2 \leq \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} \leq 2$.

8. Εστω ο μιγαδικός z με $z \neq \alpha i$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Να αποδείξετε ότι: ο $w = \frac{z + \alpha i}{iz + \alpha}$ είναι φανταστικός, αν και μόνο αν ο z είναι φανταστικός.

9. **a)** Για ένα μιγαδικό αριθμό z να αποδείξετε ότι:

- Ο z είναι πραγματικός, αν και μόνο αν $z = \bar{z}$
- Ο z είναι φανταστικός, αν και μόνο αν $z = -\bar{z}$.

b) Αν $\bar{z}_1 = \frac{1}{z_1}$ και $\bar{z}_2 = \frac{1}{z_2}$ και $z_1 \cdot z_2 \neq -1$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $u = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ είναι πραγματικός, ενώ ο αριθμός $v = \frac{z_1 - z_2}{1 + z_1 z_2}$ είναι φανταστικός.

10. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους

$$\text{ισχύει: } \mathbf{a)} \operatorname{Re}\left(z + \frac{1}{z}\right) = 5 \operatorname{Re}(z) \quad \mathbf{b)} \operatorname{Im}\left(z + \frac{1}{z}\right) = -3 \operatorname{Im}(z).$$

Μέτρο μιγαδικού αριθμού

- Πως ορίζεται το μέτρο μιγαδικού αριθμού $z = x + yi$;
- Ποια σχέση συνδέει τα $|z|, |\bar{z}|, |-z|$; Με τι ισούται το $|z|^2$;
- Να αποδείξετε ότι $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $|z^\nu| = |z|^\nu$.
- Να γραφεί η τριγωνική ανισότητα για τους μιγαδικούς z_1, z_2 .
- Τι εκφράζει γεωμετρικά το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών και ποιοι είναι οι βασικοί γεωμετρικοί τόποι;

Βασικές ασκήσεις

11. Να βρείτε πού ανήκουν οι μιγαδικοί z για τους οποίους ισχύει:

a) $|z| = 1$ **b)** $|z - i| = 1$ **γ)** $|z + 1 + 2i| = 3$ **δ)** $1 < |z| < 2$ **ε)** $|z| \geq 2$.

12. Να βρείτε πού ανήκουν οι εικόνες των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει:

α) $|z + 1| = |z - 2i|$ **β)** $|z - i| > |z + 1|$

13. Αν για το μιγαδικό z ισχύει $|z| = 1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = |1+z|^2 + |1-z|^2. \text{ Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το συμπέρασμα.}$$

14. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων M των μιγαδικών z , για τους

οποίους ισχύει: $|z+1|=|z+4i|$. Ποιο από τα σημεία M απέχει την ελάχιστη απόσταση από την αρχή $O(0,0)$.

15. Αν M_1 και M_2 είναι οι εικόνες των μιγαδικών z_1 και z_2 αντιστοίχως και $z_2 = z_1 + \frac{4}{z_1}$, να αποδείξετε ότι: Όταν το M_1 κινείται σε κύκλο κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας 4, τότε το M_2 κινείται σε μια έλλειψη.
16. Θεωρούμε τους μιγαδικούς z, w, w_1 τέτοιους, ώστε $w = z - zi$ και $w_1 = \frac{1}{\alpha} + \alpha i$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Να δείξετε ότι αν το α μεταβάλλεται στο \mathbb{R}^* και ισχύει $w = \bar{w}_1$, τότε η εικόνα P του z στο μιγαδικό επίπεδο κινείται σε υπερβολή.
17. Δίνεται ο μιγαδικός z με $z^9(\bar{z})^5 = 1$.
 - α) Να αποδείξετε ότι $|z|=1$.
 - β) Να εκφράσετε τον \bar{z} συναρτήσει του z .
 - γ) Να λύσετε την εξίσωση $z^9(\bar{z})^5 = 1$.
18. Δίνεται μιγαδικός z , για τον οποίο ισχύει: $|z-4-3i|=2$. Να αποδείξετε ότι $3 \leq |z| \leq 7$.
19. Δίνονται οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύει $|z-2+i|=1$ και $|w+4-7i|=5$. Να αποδείξετε ότι $4 \leq |z-w| \leq 16$.
20. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = 1-2i$ και $z_2 = 3+4i$
 - α) Αν $\frac{z_2}{z_1} = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $x = -1$ και $y = 2$
 - β) Αν μια ρίζα της εξίσωσης $x^2 + \beta x + 2\gamma = 0$, όπου $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, είναι η $\frac{z_2}{z_1}$, να βρείτε τις τιμές των β και γ .
 - γ) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει: $|z-2z_1|=|z_2|$.
21. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z = \alpha + \beta i$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $w = 3z - i\bar{z} + 4$, όπου \bar{z} είναι ο συζυγής του z .
 - α) Να αποδείξετε ότι $\operatorname{Re}(w) = 3\alpha - \beta + 4$ και $\operatorname{Im}(w) = 3\beta - \alpha$.
 - β) Να αποδείξετε ότι, αν οι εικόνες του w στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 12$, τότε οι εικόνες του z κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 2$.
 - γ) Να βρείτε ποιος από τους μιγαδικούς αριθμούς z , οι εικόνες των οποίων κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 2$ έχει το ελάχιστο μέτρο.
22. **A.** Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο (Σ) των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τις σχέσεις: $|z|=2$ και $\operatorname{Im}(z) \geq 0$.

B. Να αποδείξετε ότι, αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z κινείται στο σύνολο (Σ) , τότε η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{4}{z} \right)$ κινείται σε ευθύγραμμο τμήμα το οποίο βρίσκεται στον áξονα x' .

23. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(z) = \frac{z+i}{z}$, όπου z μιγαδικός αριθμός με $z \neq 0$.

- a)** Αν $|f(z)| = |f(\bar{z})|$, να αποδείξετε ότι ο z είναι πραγματικός αριθμός.
- b)** Αν $|f(z)| = 1$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο.
- c)** Αν $\operatorname{Re}(f(z)) = 2$, να αποδείξετε ότι οι εικόνες του μιγαδικού αριθμού z , βρίσκονται σε κύκλο του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα.

24. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει:

a) $|z+3| + |z-3| = 10$ **b)** $|z-3| - |z+3| = 4$ **c)** $|z-3| = 3 + \operatorname{Re}(z)$

25. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ και $z_1 + z_2 + z_3 = 0$

- a)** Να αποδείξετε ότι:

- i. $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$
- ii. $|z_1 - z_2|^2 \leq 4$ και $\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \geq -1$

- b)** Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο, καθώς και το είδος του τριγώνου που αυτές σχηματίζουν.

26. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z και w ισχύουν $|(i+2\sqrt{2})z|=6$ και

$|w-(1-i)|=|w-(3-3i)|$, τότε να βρείτε:

- a)** το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z .
- b)** το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w .
- c)** την ελάχιστη τιμή του $|z|$.
- d)** την ελάχιστη τιμή του $|z-w|$.

27. Δίνεται η εξίσωση $z + \frac{2}{z} = 2$, $z \in \mathbb{C}^*$.

- a)** Να βρείτε τις ρίζες z_1, z_2 της εξίσωσης.
- b)** Να αποδείξετε ότι $z_1^{2010} + z_2^{2010} = 0$.
- c)** Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει $|w-4+3i|=|z_1-z_2|$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο.

- d)** Για τους μιγαδικούς αριθμούς w του προηγούμενου ερωτήματος, να αποδείξετε ότι $3 \leq |w| \leq 7$.

28. Εστω οι μιγαδικοί αριθμοί z, w , οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z-i|=1+\operatorname{Im}(z) \quad (1) \text{ και } w(\bar{w}+3i)=i(3\bar{w}+i) \quad (2)$$

- a)** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι η

παραβολή με εξίσωση $y = \frac{1}{4}x^2$.

- β)** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $K(0,3)$ και ακτίνα $\rho = 2\sqrt{2}$.
- γ)** Να βρείτε τα σημεία A και B του μιγαδικού επιπέδου, τα οποία είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, w με $z = w$.
- δ)** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο KAB είναι ορθογώνιο και ισοσκελές και, στη συνέχεια, να βρείτε τον μιγαδικό αριθμό u με εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο το σημείο Λ , έτσι ώστε το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία K, A, Λ, B να είναι τετράγωνο.

29. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύουν οι επόμενες σχέσεις: $|z-1|^2 + |z+1|^2 = 4$ (1) και $|w-5\bar{w}|=12$ (2)

- α)** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 1$.
- β)** Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z με $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$, τότε να βρείτε το $|z_1 + z_2|$.
- γ)** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w στο επίπεδο είναι η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ και στη συνέχεια να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|w|$.
- δ)** Για τους μιγαδικούς αριθμούς z, w που επαληθεύουν τις σχέσεις (1) και (2) να αποδείξετε ότι: $1 \leq |z-w| \leq 4$.

30. Δίνονται οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύει ότι $|z|=1$ και $w=iz$.

- α)** Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z, w .
- β)** Να υπολογίσετε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z-w|$.

31. Δίνονται οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύει ότι $|z|=1$ και $w=2z-3-4i$.

- α)** Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z, w .
- β)** Να υπολογίσετε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z-w|$.

2. Συναρτήσεις

Συναρτήσεις

- i. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση; Ποια είναι η ανεξάρτητη και ποια η εξαρτημένη μεταβλητή; Ποιο σύνολο λέμε πεδίο ορισμού και ποιο σύνολο τιμών;
- ii. Τι ονομάζουμε γραφική παράσταση συνάρτησης;
- iii. Πότε δύο συναρτήσεις f, g είναι ίσες;
- iv. Πως ορίζεται το άθροισμα, η διαγορά, το γινόμενο και το πολύκο των συναρτήσεων f, g ;
- v. Τι ονομάζουμε σύνθεση της f με την g ; Ποια σχέση έχουν οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ καθώς και οι συναρτήσεις $h = (g \circ f)$ και $(h \circ g) = f$, με δεδομένο ότι ορίζονται;
- vi. Πότε μια συνάρτηση λέγεται γνησίως αύξουσα, πότε γνησίως φθίνουσα και πότε γνησίως μονότονη σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;
- vii. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο και πότε ελάχιστο;
- viii. Πότε μια συνάρτηση λέγεται 1–1; Τι γνωρίζετε για τι γραφική παράσταση μιας συνάρτησης που είναι 1–1;
- ix. Πως ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} μιας συνάρτησης f και τι γνωρίζεται για τις γραφικές τους παραστάσεις;

Βασικές ασκήσεις

32. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$ και $g(x) = \sqrt{x+2}$. Να βρεθούν οι συναρτήσεις, $g \circ f$, $f \circ g$.
33. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:
- a) Αν f, g περιπτές συναρτήσεις, τότε η $g \circ f$ είναι περιπτή.
 - b) Αν f άρτια, τότε και $g \circ f$ άρτια.
 - c) Αν f περιπτή και g άρτια, τότε $g \circ f$ άρτια.
 - d) Αν f περιπτή και $g \circ f$ περιπτή, τότε g περιπτή.
34. Να βρείτε τη συνάρτηση f έτσι ώστε να ισχύει :
- a) $(f \circ g)(x) = 4x^2 + 10x + 7$ και $g(x) = 2x + 3$
 - b) $(f \circ g)(x) = x^6 - 4x^2 + 3$ και $f(x) = x + 2$
35. Δίνονται δύο συναρτήσεις f, g γνησίως μονότονες στο \mathbb{R} . Να αποδείξετε ότι:
- a) Αν οι f, g έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας τότε και η $f + g$ έχει το ίδιο είδος μονοτονίας
 - b) Αν οι f, g έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας τότε η $f \circ g$ (αν ορίζεται) είναι γνησίως αύξουσα.
 - c) Αν οι f, g δεν έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας τότε η $f \circ g$ είναι φθίνουσα.
 - d) Αν η f είναι γνησίως αύξουσα και η g γνησίως φθίνουσα, τότε η $f - g$ είναι γνησίως φθίνουσα.

36. Εστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x) + 3f(x) = x + 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- a)** Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- b)** Να αποδείξετε ότι $f(1) = 1$ και $f(-3) = 0$.
- γ)** Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.
- δ)** Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:
 - i. $f(f(x^2 - 2)) > f(f(x))$
 - ii. $f(x) > 0$
 - iii. $f(x) < 1$
- ε)** Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(f^{-1}(x+1) + 4) = 1$.
- στ)** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από την $C_{f^{-1}}$.

37. Εστω συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της. Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1} βρίσκονται επί της ευθείας $y = x$. Δηλαδή $f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) = x$ για κάθε $x \in A \cap f(A) \neq \emptyset$.

38. Εστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ορίζεται η συνάρτηση gof . Να αποδείξετε ότι:

- a)** Αν η gof είναι αντιστρέψιμη, τότε η f είναι αντιστρέψιμη.
- β)** Αν οι f, g είναι αντιστρέψιμες, τότε και η gof είναι αντιστρέψιμη.

Όριο στο $x_0 \in \mathbb{R}$

- i. Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, τότε τι ισχύει για τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$;
- ii. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, τότε τι γνωρίζετε για τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \ell)$ και $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h)$;
- iii. Μει είναι ίσα τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0} x$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} c$;
- iv. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε τι συμπέρασμα προκύπτει για την f κοντά στο x_0 ;
- v. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε τι ισχύει για τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$;
- vi. Ποιες είναι οι ιδιότητες των ορίων και υπό ποιες προϋποθέσεις ισχύουν;
- vii. Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πολυώνυμο $P(x)$ ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$.
- viii. Να αποδείξετε ότι για τα πολυώνυμα $P(x), Q(x)$, με $Q(x_0) \neq 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.
- ix. Ποιο είναι το κριτήριο παρεμβολής; δώστε γεωμετρική ερμηνεία.
- x. Ποια σχέση συνδέει το $\eta_m x$ και το $x \in \mathbb{R}$;
- xi. Τι γνωρίζετε για τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta_m x$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma_n x$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta_m x}{x}$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma_n x - 1}{x}$;
- xii. Πως ορίζεται το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x))$;

Βασικές ασκήσεις

39. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

$$\begin{array}{lll}
 \text{α)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 - 1} & \text{β)} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} & \text{γ)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}} \\
 \text{ε)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x^2 - 2x| - 3}{|x - 1| - 2} & \text{στ)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x - 1| + |x + 3| - 4}{|x^2 + x - 2|} & \text{ζ)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x}{x} \quad \text{η)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{\eta\mu 2x} \quad \text{θ)} \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \eta\mu \frac{5}{x} \right)
 \end{array}$$

40. Αν για κάθε $x > 0$ ισχύει $2\sqrt{x} \leq f(x) \leq x + 1$ να υπολογισθούν τα όρια:

$$\begin{array}{lll}
 \text{α)} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) & \text{β)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} & \text{γ)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|f(x) - 3| - 1}{x^2 - 1}
 \end{array}$$

Μη πεπερασμένο όριο στο $x_0 \in \mathbb{R}$

- i. Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$, τότε τι συμπερένετε για τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$;
- ii. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε οι τιμές της f τι πρόσημο έχουν;. Όμοια αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.
- iii. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε τι γνωρίζετε για τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x))$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{k f(x)}$;
- iv. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε τι γνωρίζετε για τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)}$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)|$;
- v. Ποιειςείναι οι απροσδιόριστες μορφές;

Βασικές ασκήσεις

41. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$$\begin{array}{lll}
 \text{α)} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x - 9}{(x - 4)^2} & \text{β)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x + 5}{|x - 2|} & \text{γ)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x - 2}{x^2 - 9} \quad \text{δ)} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 2x + 1}{(x - 1)^3} \quad \text{ε)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \pi}{\eta\mu x} \quad \text{στ)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2x + \pi}{\sigma\upsilon x}
 \end{array}$$

42. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $(x - 2)^2 f(x) \leq 2x - 10$ για κάθε $x \neq 2$. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

43. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 3ax + \beta - 6}{x - 2}$, $x \neq 2$. Άν $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 7$, να υπολογίσετε τις τιμές των πραγματικών αριθμών a, β .

Όριο συνάρτησης στο ∞

- i. Με τι είναι ίσα τα όρια: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^v$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^v$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^v}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^v}$;
- ii. Αν $P(x) = \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ με $\alpha_v \neq 0$, τότε τι γνωρίζετε για τα όρια:
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x)$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x)$
- iii. Αν $f(x) = \frac{\alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu-1} x^{\mu-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0}$, $\alpha_v \neq 0$, $\beta_\mu \neq 0$, τότε τι ισχύει για τα όρια
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$;
- iv. Αν $0 < \alpha < 1$ α συμπληρώσετε τα παρακάτω όρια:
- $$\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x =$$
- v. Αν $\alpha > 1$ α συμπληρώσετε τα παρακάτω όρια:
- $$\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x =$$

Βασικές ασκήσεις

44. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{18x^3 - 6x^2 + 9}{-6x^3 + 8x - 12}$	b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 + 2x + 1} + 3x)$	c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2 + 2x + 1} + 3x)$
d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \eta \mu \frac{1}{x}$	e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \eta \mu \frac{x+2}{x^2 + 3}$	f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \eta \mu x)$
g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 \cdot 4^x - 5^{x+1}}{2e^x - 2^{2x+3}}$	h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x - \ln(e^x + 1)]$	i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \cdot 2^x + 5^{x+2} - 7^{x+1}}{2 \cdot 4^x - 3^{x+2}}$

Συνέχεια συνάρτησης

- i. Πότε μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 του πεδίου ορισμού της; Πότε η f λεγεται συνεχής συνάρτηση;
- ii. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο x_0 , τότε ποιες άλλες συναρτήσεις είναι συνεχείς;
- iii. Πότε η συνάρτηση gof είναι συνεχής στο x_0 ;
- iv. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής στο (α, β) ;
- v. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής στο $[\alpha, \beta]$;
- vi. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.
- vii. Εστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$.
 Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) \neq f(\beta)$, να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό n μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = n$.
- viii. Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών.

- iix. Τι γνωρίζετε για την εικόνα ενός διαστήματος Δ μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης;
- x. Να διατυπώσετε για μια συνεχή συνάρτηση, το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής.
- xi. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) , τότε ποιο είναι το το σύνολο τιμών της f ; Όμοια αν f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο (α, β) .

Βασικές ασκήσεις

45. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x - xf(x)}{\eta \mu x + x} = 2$. Αν f διέρχεται από το σημείο $A(0, -3)$ να αποδείξετε ότι f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.
46. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{x^2+1}{x-2} + \frac{x^3+1}{x-3} = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(2, 3)$.
47. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^4 + x^3 - 2x + 1$ και $g(x) = 3x^3 - 5x + 3$, έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, 2)$.
48. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[0, 1]$ με $0 < f(x) < 2$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f^2(\xi) = 2f(\xi) - 3\xi$.
49. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln x + x = e^{-2x}$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0, +\infty)$.
50. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[0, 1]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ τέτοιο, ώστε: $f(\eta \mu \xi) = f(\sigma \nu \xi)$.
51. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $f(x) = (x^2 - x)g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει διαδοχικές ρίζες το 0 και το 1, να αποδείξετε ότι $g(0)g(1) \geq 0$.
52. Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 3$ για την οποία ισχύει: $f^2(x) - 6f(x)\eta \mu x - 9\sigma \nu^2 x = x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
53. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [2, 10] \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [2, 10]$ ώστε: $f(x_0) = \frac{3f(3) + 5f(6) + 2f(8)}{10}$.

3. Διαφορικός Λογισμός

Η έννοια της παραγώγου

- i. Τι ονομάζεται μέση ταχύτητα ενός κινητού στο χρονικό διάστημα από t_0 έως t ;
- ii. Τι ονομάζεται στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού τη χρονική στιγμή t_0 ;
- iii. Πότε ένα κινητό κινείται προς τα δεξιά και πότε προς τα αριστερά τη χρονική στιγμή t_0 ;
- iv. Τι ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$;
- v. Πότε μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;
- vi. Ποια είναι η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ και τι ονομάζουμε κλίση της f στο x_0 ;
- vii. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. Ισχύει το αντίστροφο; Δώστε παράδειγμα.

Βασικές ασκήσεις

54. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1, & x \leq 1 \\ ax + \beta, & x > 1 \end{cases}$. Να βρείτε τα $a, \beta \in \mathbb{R}$ για τα οποία η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

55. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής στο $x_0 = 4$, για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - x}{\sqrt{x} - 2} = 8$.
Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 4$ με $f'(4) = 3$.

56. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο x_0 . Να δείξετε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{xf(x_0) - x_0 f(x)}{x - x_0} = f(x_0) - x_0 f'(x_0).$$

57. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\eta x - 2x^3 \leq f(x) \leq \eta x + 2x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Παραγωγίσιμες συναρτήσεις- Παράγωγος συνάρτηση

- i. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της A ;
- ii. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) του πεδίου ορισμού της;
- iii. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της;

- iv. Ποια συνάρτηση ονομάζεται πρώτη παράγωγος μιας συνάρτησης f ;
- v. Ποια συνάρτηση ονομάζεται δεύτερη παράγωγος μιας συνάρτησης f ;
- vi. Εστω η σταθερή συνάρτηση $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και ισχύει $f'(x) = 0$, δηλαδή $(c)' = 0$.
- vii. Εστω η συνάρτηση $f(x) = x$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και ισχύει $f'(x) = 1$, δηλαδή $(x)' = 1$.
- viii. Εστω η συνάρτηση $f(x) = x^v$, $v \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και ισχύει $f'(x) = vx^{v-1}$, δηλαδή $(x^v)' = vx^{v-1}$.
- ix. Εστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, δηλαδή $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Κανόνες παραγώγισης

- x. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.
- xi. Να γράψετε τις παραγώγους των συναρτήσεων $(fg)(x)$, $(cf)(x)$ και $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$.
- xii. Εστω η συνάρτηση $f(x) = x^{-v}$, $v \in \mathbb{N}^*$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}^* και ισχύει $f'(x) = -vx^{-v-1}$, δηλαδή $(x^{-v})' = -vx^{-v-1}$.
- xiii. Εστω η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon \varphi x$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x / \sigma v x = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{\sigma v^2 x}$, δηλαδή $(\varepsilon \varphi x)' = \frac{1}{\sigma v^2 x}$.
- xiv. Ποια είναι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \sigma \varphi x$;
- xv. Πότε η συνάρτηση $f(g(x))$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και πότε σε ένα διάστημα Δ ;
- xvi. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, δηλαδή $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.
- xvii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, $\alpha > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και ισχύει $f'(x) = \alpha^x \ln \alpha$, δηλαδή $(\alpha^x)' = \alpha^x \ln \alpha$.
- xviii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}^* και ισχύει $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$.

Βασικές ασκόσεις

58. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ b) $f(x) = \begin{cases} \eta \mu x + 3x + 1, & x \leq 0 \\ x^2 + 4x + 1, & x > 0 \end{cases}$

59. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta \mu x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

a) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

b) Να βρείτε την παράγωγο της f^{-1} .

60. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση, $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(xy) = f(x) + f(y)$, για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$. Να αποδείξετε ότι $xf'(x) - yf'(y) = 0$, για κάθε $x, y > 0$.

61. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^2$ η οποία άγεται από το σημείο $A(0, -1)$.

62. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η C_f , διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$ και εφάπτεται της ευθείας $y = x$ στην αρχή των αξόνων.

63. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + 2$ και $g(x) = \frac{1}{x}$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τα οποία οι γραφικές παραστάσεις τους έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$.

64. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x$ και $g(x) = -x^2 - x$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0, 1)$ εφάπτεται και στην C_g .

65. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f , που:

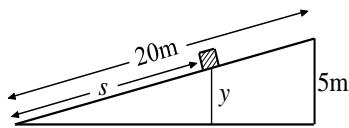
- a) είναι παράλληλες στην $\delta_1 : y = 4x - 5$ b) είναι κάθετες στην $\delta_2 : x - 2y + 1 = 0$.
γ) είναι παράλληλες στον άξονα x' δ) Σχηματίζουν με τον άξονα x' , γωνία 135° .

Ρυθμός μεταβολής

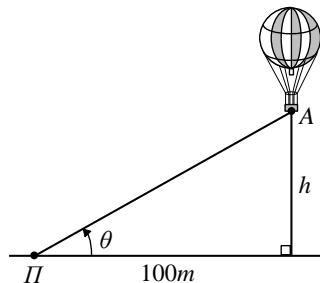
Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, τότε τι ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0 :

Βασικές ασκόσεις

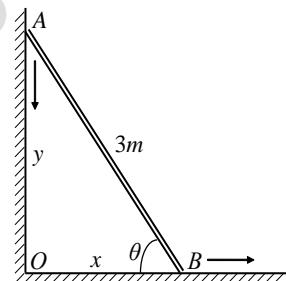
66. Ένας άνθρωπος σπρώχνει ένα κουτί στην ράμπα του διπλανού σχήματος και το κουτί κινείται με ταχύτητα 3m/s . Να βρείτε πόσο γρήγορα ανυψώνεται το κουτί, δηλαδή το ρυθμό μεταβολής του y .



67. Ένα αερόστατο A αφήνει το έδαφος σε απόσταση 100m από έναν παρατηρητή Π με ταχύτητα 50m/min . Με ποιο ρυθμό αυξάνεται η γωνία θ που σχηματίζει η $A\Pi$ με το έδαφος την χρονική στιγμή κατά την οποία το μπαλόνι βρίσκεται σε ύψος 100m .



68. Μία σκάλα μήκους 3m είναι τοποθετημένη σ' έναν τοίχο. Το κάτω μέρος της σκάλας γλυστράει στο δάπεδο με ρυθμό $0,1\text{m/sec}$. Τη χρονική στιγμή t_0 , που η κορυφή της σκάλας απέχει από το δάπεδο $2,5\text{m}$, να βρείτε:
a) Το ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ (Σχήμα).
b) Την ταχύτητα με την οποία πέφτει η κορυφή A της σκάλας.



Θεώρημα Rolle

Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Βασικές ασκήσεις

69. Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = e^x (x^2 - 1)$ ημ x , με τετυμένη $\xi \in (-1, 1)$, στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον áξονα x' .
70. Δίνεται συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ με $f(0) = 4$ και $f(1) = 1$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = 3\xi^2 - 4\xi - 2$.
71. Εστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ με $f(1) = 1$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $xf'(x) = 2x - f(x)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.
72. Δίνεται συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο $[a, b]$, $a, b > 0$, με $f(a) = a^2\beta$ και $f(b) = a\beta^2$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο $M(\xi, f(\xi))$, με $\xi \in (a, b)$, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
73. Δίνεται η συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής στο $[-3, 3]$, παραγωγίσιμη στο $(-3, 3)$ με $f(-3) = f(3)$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [-3, 3]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (-3, 3)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 2\xi f(\xi)$.
74. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f(a) < 0$, $f(a)f(b) < 0$, και $f(\gamma) < 0$, όπου $a, b, \gamma \in \mathbb{R}$, με $a < b < \gamma$. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f , δέχεται εφαπτομένη παράλληλη στον áξονα x' .
75. Δίνεται συνάρτηση f , δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[a, b]$, $a, b < 0$, με $f(a) = f(b) = f(0)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$, τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 0$.

Θεώρημα Μέσος τιμής

Να διατυπώσετε το θεώρημα Μέσος τιμής και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Βασικές ασκήσεις

76. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[-1, 1]$, παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$ με $f'(x) \leq 1$ για κάθε $x \in (-1, 1)$. Αν $f(-1) = -1$ και $f(1) = 1$, να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$.

77. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ συνάρτηση f , για την οποία ισχύουν οι σχέσεις

$f(a) = \beta + 4a$ και $f(b) = a + 4\beta$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (a, b)$ τέτοια, ώστε: $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + f'(\xi_3) = 9$.

78. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[1, 10]$, με $f(1) = 4$ και $f(10) = 9$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (1, 10)$ τέτοια, ώστε: $2f'(\xi_1) + 3f'(\xi_2) + 4f'(\xi_3) = 5$.

79. Δίνεται συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο $[-2, 2]$ με $f(-2) = 2$ και $f(2) = 6$. Να αποδείξετε ότι:

a) Υπάρχει $x_0 \in (-2, 2)$ τέτοιο, ώστε: $f(x_0) = 4 - x_0$.

b) Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (-2, 2)$ τέτοια, ώστε: $f'(\xi_1)f'(\xi_2) = 1$.

80. Εστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(3) < f(1) < f(2) < f(0)$.

a) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (0, 3)$ τέτοια, ώστε: $f'(\xi_1) < 0$, $f'(\xi_2) > 0$ και $f'(\xi_3) < 0$.

b) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 3)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 0$.

81. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$. Αν $f(0) = 2$ και $f(1) = 4$, να αποδείξετε ότι:

a) Η ευθεία $y = 3$ τέμνει την C_f σ' ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, 1)$.

b) Υπάρχει $x_1 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = \frac{f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}$.

c) Υπάρχει $x_2 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(x_2, f(x_2))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x + 1821$.

Συνέπειες του θεωρήματος Μέσης τιμής

Εύρεση συνάρτησης

- Εστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή στο Δ .
- Αν για μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σύνολο A που αποτελείται από ένωση διαστημάτων, είναι παραγωγίσιμη στο A και $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του A , τότε η f είναι σταθερή στο A ; Δώστε παράδειγμα.
- Εστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει: $f(x) = g(x) + c$

Βασικές ασκήσεις

82. Δίνονται οι παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύει :

$f'(x) = g(x)$ και $g'(x) = -f(x)$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$h(x) = f^2(x) + g^2(x)$ είναι σταθερή στο \mathbb{R} .

83. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f , σε καθεμία από τις παραπάνω περιπτώσεις:

α) $f''(x) = 6x - 10$, $f(1) = 0$, $f'(1) = -1$.

β) ημ x f(x) = 2 x sin x - $f'(x)$ sin x και $f(0) = 1$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

γ) $f'(x) = e^{x-f(x)}$, $f(0) = 0$

δ) $f'(x) = 2xf(x)$, $f(1) = e$, $f(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

ε) $f'(x) = \frac{2\ln x}{x}$, $x > 0$, $f(1) = 0$

σι) $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$, $f(0) = 0$

ζ) $f(x) + xf'(x) = 6x^5 + 4x^3 + 2x$, $x \in \mathbb{R}$

84. Δίνεται συνάρτηση f , δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , για την οποία ισχύει:

$f''(x) = f(x) + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = -1$ και $f'(0) = 2$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = (f(x) - f'(x) + 2)e^x$ είναι σταθερή στο \mathbb{R} .

β) Να αποδείξετε ότι $f'(x) - f(x) = 2 + e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

γ) Να βρείτε τον τύπο της f .

85. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ με $f(e) = 1$ και $xf(x)f'(x) = \ln x$ για κάθε $x > 1$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x > 1$.

β) Να βρείτε τον τύπο της f .

γ) Να αποδείξετε ότι $1 - \frac{a}{\beta} \leq \ln \frac{\beta}{a} \leq \frac{\beta}{a} - 1$ για κάθε $a, \beta > 1$

86. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $(f(x) - \sin x)(f'(x) + \eta x) = 0$ (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

87. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύει ότι: $f(x+y) = f(x)f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι: i. $f(0) = 1$

ii. Αν f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, τότε είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

β) Να βρείτε το πρόσημο της f .

γ) Αν f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 1$, να αποδείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} .

δ) Να βρείτε την f .

Μονοτονία συνάρτησης

Εστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ .

Να αποδείξετε ότι αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .

Όμοια αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ .

Το αντίστροφο ισχύει; Δώστε παράδειγμα.

Βασικές ασκήσεις

88. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

a) $f(x) = x^2 - 2x + x \ln x - \ln x$ b) $h(x) = \frac{\ln(x-1)}{\ln x}$, όταν $x \geq 2$

89. Να βρείτε το πρόσημο των παρακάτω συναρτήσεων:

a) $f(x) = e^x - x$, $x \in \mathbb{R}$ b) $f(x) = 2 \ln x + 1 - x^2$, $x > 0$

90. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με f' γνησίως φθίνουσα και $f(0) = 0$. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση: $g(x) = 2e^x + 3 \ln x - \frac{f(x)}{x} - 1$, $x > 0$.

91. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln x + \frac{x^3}{3} = 6$ έχει το πολύ μία ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

92. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^4 + x^3 + 20x^2 - 28 = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

93. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^\nu + \ln x = -1$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0, 1)$.

94. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης: $6x^2 + 2 = x^3 + 9x$.

95. Να λύσετε τις εξισώσεις: a) $e^{4x} + e^x = 2$ b) $e^{x^3+18} - e^{2x^2+9x} = 9x - x^3 + 2x^2 - 18$

96. Δίνεται συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , για την οποία ισχύει:

$f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1$, $x \in \mathbb{R}$, $\beta^2 < 3\gamma$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$, έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

97. Εστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} . Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης $f \circ g$ είναι 1-1.

a) Να αποδείξετε ότι η g είναι 1-1.

b) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $g(f(x) + x^3 - x) = g(f(x) + 2x - 1)$ έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα.

98. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$, για την οποία ισχύει ότι:

$f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

99. Να αποδείξετε ότι: **a)** $\ln(x-1) < x-2$, $x > 2$ **b)** $x \sin x < \eta \mu x$, $x \in (0, \pi)$

y) $e^x > 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$, $x > 0$

Ακρότατα συνάρτησης

- i. Πότε μια συνάρτηση f παρουσιάζει στο $x_0 \in A_f$ τοπικό μέγιστο και πότε τοπικό ελάχιστο;
- ii. Πότε μια συνάρτηση f παρουσιάζει στο $x_0 \in A_f$ ολικό ελάχιστο και ποες είναι οι θέσεις των τοπικών της ακροτάτων;
- iii. Να διατυπώσετε το θεώρημα Fermat και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.
- iv. Εστω συνάρτηση f είναι ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και $x_0 \in \Delta$. Να αποδείξετε ότι αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε $f'(x_0) = 0$.
- v. Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων και ποια σημεία ονομάζονται κρίσιμα;
- vi. Εστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι:
 - i) Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .
 - ii) Αν $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .
- vii. Εστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) .

Βασικές ασκήσεις

100. Αν $\alpha, \beta > 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\alpha^x + \beta^x \geq 2$, να αποδείξετε ότι $\alpha\beta = 1$.

101. Αν η συνάρτηση $f(x) = x^2 - (\alpha - \beta)x + 3(\beta + \alpha)$ παρουσιάζει στο $x_0 = 2$ τοπικό ακρότατο το 8, να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

102. Για ποια τιμή της παραμέτρου $\lambda > 0$ το μέγιστο της συνάρτησης $f(x) = \frac{x+1}{e^{\lambda x}}$ γίνεται ελάχιστο;

103. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^4 + 4\beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon$, $\alpha\beta \neq 0$. Αν η f έχει τρία κρίσιμα σημεία, να αποδείξετε ότι $\alpha\gamma < 6\beta^2$.

104. Να αποδείξετε ότι $x+1 \leq e^x \leq xe^x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

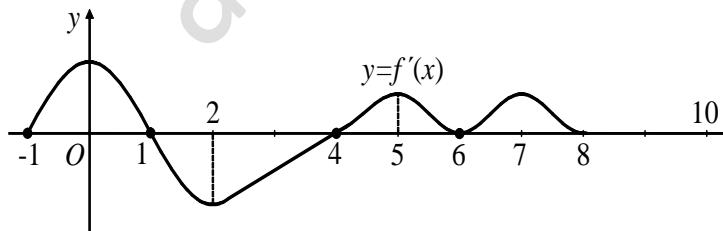
105. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = (x-\alpha)^2(x-\beta)^2(x-\gamma)^2$, $\alpha < \beta < \gamma$ έχει τρία τοπικά ελάχιστα και δύο τοπικά μέγιστα.
106. **a)** Δίνεται συνάρτηση f , παραγωγήσιμη στο διάστημα $[1,4]$ με $f(3) > f(4) > f(1) > f(2)$, να αποδείξετε ότι η f έχει τουλάχιστον δύο κρίσιμα σημεία.
β) Αν η f' είναι συνεχής στο $[1,4]$ και $f(1) > f(3) > f(2) > f(4)$, να αποδείξετε ότι η f έχει τουλάχιστον δύο κρίσιμα σημεία.

Κυρτότητα - Σημεία Καμπής

- Εστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγήσιμη στο εσωτερικό του Δ , πότε θα λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω και πότε προς τα κάτω;
- Με βάση ποιο θεώρημα εξετάζουμε την κυρτότητα μιας συνάρτησης f ; Ισχύει το αντίστροφό του; Δώστε παράδειγμα.
- Ποια είναι η σχετική θέση της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f με μία εφαπτομένη της με βάση τη κυρτότητα της συνάρτησης f ;
- Πότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f ;
- Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής;
- Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγήσιμη και το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της, τότε ποια σχέση ισχύει για τη δεύτερη παράγωγο της f στο x_0 ;
- Πότε ένα σημείο είναι βέβαιο σημείο καμπής;

Βασικές ασκήσεις

107. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μίας συνάρτησης f στο διάστημα $[-1,10]$.



108. Εστω f μια συνάρτηση, δυο φορές παραγωγήσιμη στο $[-2,2]$, για την οποία ισχύει $f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 3 = 0$. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει σημεία καμπής.

109. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - x + 2$, $a, b, x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τα a, b ώστε η f να έχει σημείο καμπής το $A(1,2)$.

110. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + (x-1)^4$, $x \in \mathbb{R}$.

- Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο \mathbb{R} .
- Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$.
- Να αποδείξετε ότι $e^x + (x-1)^4 \geq -3x + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

111. Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή στο \mathbb{R} συνάρτηση f .

$$\text{Να αποδείξετε ότι } 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \leq f(\alpha)+f(\beta) \text{ για κάθε } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

112. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη και κυρτή στο \mathbb{R} . Να αποδείξετε ότι:

$$f'(x) < f(x+1) - f(x) < f'(x+1), \quad x \in \mathbb{R}.$$

113. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη και κυρτή στο $[a, b]$. Να αποδειχθεί ότι τρία οποιαδήποτε σημεία της C_f , διαφορετικά μεταξύ τους, δεν μπορούν να βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

Aσύμπτωτες – De L' Hospital

- i. Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f ;
- ii. Πότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$);
- iii. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$);
- iv. Αν η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, (αντιστοίχως στο $-\infty$), τότε τι γνωρίζετε για τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x]$;
- v. Να διατυπώσετε τους κανόνες de L' Hospital.

Βασικές ασκήσεις

114. Να βρείτε τις ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων:

a) $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 4}{x - 2}$ b) $f(x) = \sqrt{4x^2 + 3x + 1} - 2x$ c) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

115. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \eta \mu x + \alpha & , \quad x \leq 0 \\ e^{\beta x} & , \quad x > 0 \end{cases}$

να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

116. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(a-2)x^2 + \beta x + 3}{2x + \gamma}$. Να βρείτε τα $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, για τα οποία οι ευθείες $x = 3$ και $y = 2$ είναι ασύμπτωτες της C_f .

117. Να βρείτε τα $a, \beta \in \mathbb{R}^*$, για τα οποία η ευθεία $y = ax - 6$, να είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \frac{4ax^2 - 12x + 5}{\beta x - 2}$ στο $+\infty$.

118. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση έχει στο $+\infty$ ασύμπτωτη την ευθεία $y = 2x - 7$. Να υπολογίσετε τις τιμές του $a \neq 2$, για τις οποίες:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a^2 - 1)f(x) - 4ax - 7}{xf(x) - 2x^2 + (a+5)x - 4} = 4.$$

119. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \ln x}$ **β)** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + \ln x}{e^x}$ **γ)** $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$ **δ)** $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - 2 \ln x)$ **ε)** $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$

120. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln x - x + 1$, $x > 0$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να αποδείξετε ότι $x \ln x \geq x - 1$ για κάθε $x > 0$.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

121. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , με $f'(0) = f(0) = 0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση: $e^x(f'(x) + f''(x) - 1) = f'(x) + x f''(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \ln(e^x - x)$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής.

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln(e^x - x) = \text{συνχ}$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα

$$\left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

122. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln[(\lambda+1)x^2 + x + 1] - \ln(x+2)$, $x > -1$, $\lambda \geq -1$.

α) Να προσδιορίσετε την τιμή του λ , ώστε να υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ και να είναι πραγματικός αριθμός.

β) Εστω ότι $\lambda = -1$

i. να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ii. να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + \alpha^2 = 0$ έχει μοναδική λύση για κάθε $\alpha \neq 0$.

4. Ολοκληρωτικός λογισμός

Αρχική συνάρτηση

- Τι ονομάζετε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f σε ένα διάστημα Δ ;
- Εστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Βασικές ασκήσεις

123. Από την πώληση ενός νέου προϊόντος μιας εταιρείας διαπιστώθηκε ότι ο ρυθμός μεταβολής του κόστους $K(t)$ δίνεται από τον τύπο $K'(t) = 800 - 0,6t$ (σε χιλιάδες δραχμές την ημέρα), ενώ ο ρυθμός μεταβολής της είσπραξης $E(t)$ στο τέλος των t ημερών δίνεται από τον τύπο $E'(t) = 1000 + 0,3t$ (σε χιλιάδες δραχμές την ημέρα). Να βρείτε το συνολικό κέρδος της εταιρείας από την τρίτη έως και την έκτη ημέρα παραγωγής.

124. Εστω f, g δύο συναρτήσεις με $f(0) = g(0)$, $f(1) = g(1) + 1$ και $f''(x) = g''(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

- $f(x) = g(x) + x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Αν η συνάρτηση g έχει δύο ρίζες α, β με $\alpha < 0 < \beta$, τότε η συνάρτηση f έχει μια τουλάχιστον, ρίζα στο (α, β) .

Ορισμένο ολοκλήρωμα

- Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2$, τον άξονα των x και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$ είναι $E(\Omega) = \frac{1}{3}$.
- Να δώσετε τον ορισμό του εμβαδού χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με $f(x) \geq 0$, τον άξονα x και τις ευθείες $x=a$ και $x=b$.
- Να δώσετε τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος μιας συνεχούς συνάρτησης f στο $[\alpha, \beta]$.
- Ποιες οι ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος;
- Ποιος είναι ο τύπος της κατά παράγοντες ολοκλήρωσης;
- Ποιος είναι ο τύπος της ολοκλήρωσης με αλλαγή μεταβλητής;
- Αν f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα Δ και a ένα σημείο του Δ , να γράψετε τι γνωρίζετε συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t) dt$.
- Εστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, να αποδείξετε ότι $\int_a^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

Βασικές ασκήσεις

125. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\alpha) \int_1^4 (\sqrt{x} - 1) dx$$

$$\beta) \int_0^1 (e^{2x} - e^x) dx$$

$$\gamma) \int_0^1 2x e^{x^2} dx$$

$$\delta) \int_0^4 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} dx$$

$$\epsilon) \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx$$

$$\sigma) \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+3} dx$$

$$\zeta) \int_0^1 \frac{4x+5}{x+2} dx$$

$$\eta) \int_0^1 \frac{x-7}{x^2+x-6} dx$$

$$\theta) \int_0^1 (x+1) e^{2x} dx$$

$$\iota) \int_1^e \ln x dx$$

$$\kappa) \int_0^{\pi} e^x \eta \mu x dx$$

$$\lambda) \int_0^1 \frac{3x^2+x+1}{x+2} dx$$

126. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + 3x - 4$, $x \in \mathbb{R}$

a) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται

b) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-3}^{e-1} f^{-1}(x) dx$

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{f^{-1}(x)}{x+3}$.

127. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[a, b]$, για την οποία ισχύει: $f(x) + f(a+b-x) = c$,

$c \in \mathbb{R}$, $x \in [a, b]$. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_a^b f(x) dx = [f(a) + f(b)] \frac{b-a}{2} = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a).$$

128. Να αποδείξετε ότι: **a)** $2 \leq \int_0^2 e^{x^2} dx \leq 2e^4$

$$\beta) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\eta \mu x}{x} dx \leq 1$$

129. Δίνεται συνάρτηση f , δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[a, b]$, με $f''(x) > 0$ για κάθε

$x \in [a, b]$. Να αποδείξετε ότι:

a) $f(x) - f(a) \leq f'(b)(x-a)$ για κάθε $x \in [a, b]$.

β) $2 \int_a^b f(x) dx \leq f'(b)(b-a)^2 + 2f(a)(b-a)$

130. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[0, 3]$, για την οποία ισχύει: $\int_2^3 f(x) \left(\int_2^3 f(x) dx \right) dx = 16$

και $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [2, 3]$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_2^3 f(x) dx$.

131. Να βρείτε συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $\int_0^1 e^{1-x} f(x) dx = f(x) + e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

132. Εστω f, g δύο συναρτήσεις συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι:

i) Αν $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$.

ii) Αν m η ελάχιστη και M η μέγιστη τιμή της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε

$$m(\beta-\alpha) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(\beta-\alpha)$$

iii) Με τη βοήθεια της ανισότητας $\epsilon \varphi x > x$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, να αποδείξετε ότι η

συνάρτηση $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι γνησίως φθίνουσα και στη συνέχεια να

αποδείξετε ότι:

$$\text{a)} \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{3}{\pi} \text{ για κάθε } x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right] \text{ και} \quad \text{b)} \frac{\sqrt{3}}{4} \leq \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\eta\mu x}{x} dx \leq \frac{1}{2}.$$

iv) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = e^{-x^2}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$

και στη συνέχεια, με τη βούθεια της ανισότητας $e^x \geq 1+x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

$$\text{a)} 1-x^2 \leq e^{-x^2} \leq 1 \text{ για κάθε } x \in [0, 1] \text{ και} \quad \text{b)} \frac{2}{3} \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 1.$$

133. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο \mathbb{R} , να αποδείξετε ότι

$$\int_0^x f(u)(x-u)du = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)dt \right) du.$$

134. Να βρείτε συνεχή συνάρτηση f , για την οποία ισχύει: $f(x) = 2x^2 - \int_1^x \frac{xf(t)}{t^2} dt$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

135. Να βρείτε συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f(x) = \eta\mu x + \int_0^x e^{-t} f(x-t) dt, x \in \mathbb{R}.$$

136. Εστω μια πραγματική συνάρτηση f , συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών για την οποία ισχύουν οι σχέσεις: $f(x) \neq 0$ και $f(x) = 1 - 2x^2 \int_0^1 tf^2(xt) dt$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έστω ακόμη g η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο $g(x) = \frac{1}{f(x)} - x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Να αποδείξετε ότι ισχύει $f'(x) = -2xf^2(x)$

b) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή.

c) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

d) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (xf(x)\eta\mu 2x)$.

137. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο \mathbb{R} με $f(x) \geq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τη

συνάρτηση $g(x) = x^2 - 5x + 1 - \int_0^{x^2-5x} f(t)dt$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Να αποδείξετε ότι: $g(-3)g(0) < 0$

b) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία μόνο ρίζα στο διάστημα $(-3, 0)$.

138. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x) \neq x \text{ και } f(x) - x = 3 + \int_0^x \frac{t}{f(t)-t} dt.$$

a) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με παράγωγο

$$f'(x) = \frac{f(x)}{f(x)-x}, x \in \mathbb{R}.$$

b) $x \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $g(x) = (f(x))^2 - 2xf(x)$, $x \in \mathbb{R}$, είναι σταθερή.

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}$, $x \in \mathbb{R}$.

δ) Να αποδείξετε ότι $\int_x^{x+1} f(t) dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t) dt$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

139. Δίνονται οι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$ συναρτήσεις g, h . Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$

τέτοιο, ώστε: $g(\xi) \int_\xi^\beta h(u) du = h(\xi) \int_\alpha^\xi g(u) du$.

140. Δίνεται η συνάρτηση $F(x) = \int_1^x f(t) dt$, όπου $f(t) = \int_1^t \sqrt{u^2 - 1} du$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και F .

ii) Να αποδείξετε ότι η F είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή.

141. Δίνεται συνάρτηση f , παραγωγίσιμη και κοίλη στο \mathbb{R} , της οποίας η γραφική παράσταση

διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \int_a^x \frac{f(t)}{t} dt$,

$\alpha > 0$ είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$.

142. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $f(x) > 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Να μελετήσετε

ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $h(x) = \frac{\int_a^x t f(t) dt}{\int_a^x f(t) dt}$, $x \in (\alpha, \beta]$.

143. Να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{10} < \int_1^3 \frac{1}{1+t^2} dt - \int_1^2 \frac{1}{1+t^2} dt < \frac{1}{5}$.

144. Δίνεται συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , με $f'(0) = 1$ και τέτοια, ώστε να ισχύει:

$\int_0^x f(t) dt \geq x e^{-x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$.

145. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \int_1^{3x} \frac{e^u}{\sqrt{u}} du$ και $g(x) = \int_1^x f(t) dt$, $x, t \in (0, +\infty)$. Να

υπολογίσετε:

α) Το $g''(1)$

β) Το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} g''(x) - \sqrt{3}}{\sqrt{x+1} - 1}$.

146. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} \frac{e^t}{t^2 + 3} dt$.

Εμβαδόν επίπεδου χωρίου

- i. Εστω, δυο συναρτήσεις f και g , συνεχείς στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $f(x) \geq g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g , και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ είναι:
- $$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx$$
- ii. Εστω, δυο συναρτήσεις f και g , συνεχείς στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $0 \leq g(x) \leq f(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g , και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ είναι: $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx$
- iii. Εστω, μια συνάρτηση g συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $g(x) < 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g , του άξονα x και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ είναι: $E(\Omega) = - \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$

Βασικές ασκήσεις

147. i) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική πράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x}$, την εφαπτόμενή της στο σημείο $(1, 1)$ και τον άξονα των x .

ii) Να βρείτε την ευθεία $x = \alpha$, η οποία χωρίζει το χωρίο αυτό σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

148. Εστω η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + x$.

a) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη συνάρτηση.

b) Να αποδείξετε ότι $f(e^x) \geq f(x+1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

c) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(0, 0)$ είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της f και της f^{-1} .

d) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1} , τον άξονα των x και την ευθεία με εξίσωση $x = 3$.

149. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 3x + \frac{1}{x^2}$ και $g(x) = x$.

a) Να βρείτε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τις C_f , C_g και τις ευθείες $x = 1$ και $x = \lambda > 0$.

b) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} E(\lambda)$.

150. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $F(x) = \int_1^x 2e^{t^2} dt$, τους άξονες x , y και την ευθεία $x = 1$.

151. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} e^{x-1}, & x \leq 1 \\ \frac{1}{x^2}, & x > 1 \end{cases}$

Να βρείτε το εμβαδό που καθορίζεται από τη C_f και τις ασύμπτωτες αυτής.

152. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x \ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τους άξονες x - x , y - y και την ευθεία $x=1$.

153. **α)** Να αποδείξετε ότι αν $h(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε και $\int_{\alpha}^{\beta} h(x) dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$.

β) Δίνεται η παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} συνάρτηση f , που ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x) - e^{-f(x)} = x - 1, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f(0) = 0.$$

i. Να εκφράσετε την f' ως συνάρτηση της f .

ii. Να αποδείξετε ότι $\frac{x}{2} < f(x) < xf'(x)$ για κάθε $x > 0$.

iii. Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τις ευθείες $x=0$, $x=1$ και τον άξονα x - x , να δείξετε ότι $\frac{1}{4} < E < \frac{1}{2} f(1)$.

ΣΤΕΛΙΟΣ ΜΙΧΑΪΛΟΥ