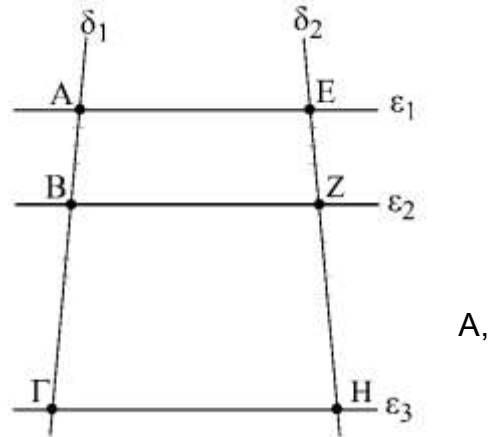


ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7° ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ

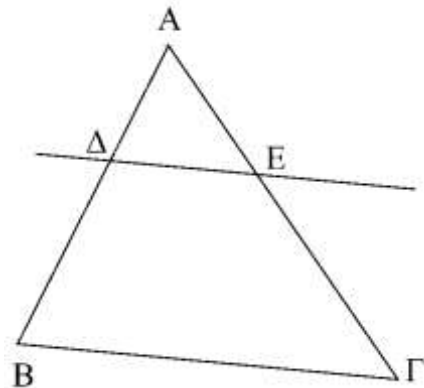
□ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΘΑΛΗ

◆ Βασικά θεωρήματα

- Αν τρεις τουλάχιστον παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες, ορίζουν σε αυτές τμήματα ανάλογα.
- **(αντίστροφο Θεωρήματος Θαλή)**
Θεωρούμε δύο ευθείες δ_1 και δ_2 που τέμνουν δύο παράλληλες ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 στα σημεία Β και Ε, Ζ αντίστοιχα. Αν Γ και Η είναι σημεία των ευθειών δ_1 και δ_2 αντίστοιχα τέτοια ώστε $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{EZ}{ZH}$, τότε η ευθεία ΓΗ είναι παράλληλη προς τις ϵ_1 και ϵ_2 .



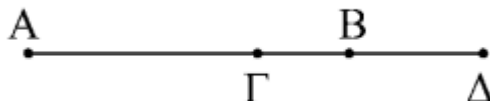
- Κάθε ευθεία που είναι παράλληλη με μία από τις πλευρές ενός τριγώνου χωρίζει τις δύο άλλες πλευρές σε μέρη ανάλογα και αντίστροφα.
- Το τρίγωνο που ορίζεται από τις ευθείες δύο πλευρών τριγώνου και είναι παράλληλη προς την τρίτη πλευρά του, έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του αρχικού τριγώνου.



✓ Ορισμός:

Δύο σημεία Γ και Δ που είναι συνευθειακά με τα Α και Β και διαιρούν εσωτερικά και εξωτερικά το τμήμα ΑΒ στον ίδιο λόγο λέγονται **συζυγή αρμονικά** των Α και Β. Δηλαδή

ισχύει: $\frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{\Delta A}{\Delta B}$



ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΤΟΥ ΘΑΛΗ

Οι ασκήσεις που στηρίζονται στο θεώρημα του Θαλή χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες:

A) Σε αυτές που μας ζητείται να υπολογίσουμε κάποιο λόγο ή να δείξουμε ότι ισχύει κάποια αναλογία (ή κάποια σχέση της μορφής $a \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$ που γίνεται αναλογία $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$).

Τότε ξεκινούμε από το ζητούμενο λόγο ή από τα μέλη της ζητούμενης αναλογίας και προσπαθούμε με βάση τις παραλληλίες που ισχύουν από την υπόθεση να γράψουμε αυτούς τους λόγους με άλλους ίσους χρησιμοποιώντας τις γνωστές ιδιότητες των αναλογιών.

B) Σε αυτές που μας ζητείται να δείξουμε κάποια παραλληλία. Τότε με βάση το θεώρημα του Θαλή που ισχύει και αντιστρόφως προσπαθούμε να βρούμε την αναλογία που θα πρέπει να ισχύει ώστε τα τμήματα να είναι παράλληλα. Στην συνέχεια όπως και στην προηγούμενη περίπτωση δείχνουμε ότι ισχύει η αναλογία.

Γ) Όταν μας ζητείται να δείξουμε ότι δύο ευθύγραμμα τμήματα είναι ίσα και στην υπόθεση της άσκησης αναφέρονται μόνο παραλληλίες, τότε προσπαθούμε να φτιάξουμε δύο λόγους οι οποίοι να έχουν στους αριθμητές τα ζητούμενα ενώ σαν παρανομαστή να έχουν το ίδιο τμήμα. Αν δείξουμε με βάση τα προηγούμενα ότι οι λόγοι είναι ίσοι τότε και τα ζητούμενα ευθύγραμμα τμήματα θα είναι ίσα.

Όταν στις ασκήσεις δεν αναφέρονται παράλληλες αλλά ζητείται η απόδειξη κάποιας αναλογίας τότε θα πρέπει από κάποιο σημείο να φέρουμε μια παράλληλη η οποία μας βοηθάει να εφαρμόσουμε το θεώρημα του Θαλή και για τους δύο λόγους της αναλογίας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ**A ΟΜΑΔΑ**

1. Από τυχαίο σημείο E της πλευράς AB κυρτού τετραπλεύρου ABΓΔ φέρνουμε την EZ//BD (Z ∈ AD) και EH//BG (H ∈ AG). Δείξτε ότι ZH//GD.
2. Αν μια παράλληλη προς τη διάμεσο AM τριγώνου ABΓ τέμνει τις ευθείες AB, BG και ΓA στα σημεία Δ, E και Z αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι: $AB \cdot AZ = AG \cdot AD$
3. Μια ευθεία διέρχεται από την κορυφή A ενός παραλληλογράμμου ABΓΔ και τέμνει τις ευθείες BD, GD και BG στα σημεία E, Z και H αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα AE είναι η μέση ανάλογος των τμημάτων EZ και EH.
4. Μια ευθεία παράλληλη προς την πλευρά BG τριγώνου ABΓ τέμνει τις πλευρές AB και AG στα σημεία Δ και E αντίστοιχα. Αν η παράλληλη από το Γ προς τη BE τέμνει την AB σε σημείο Z, να δειχθεί ότι το AB είναι μέσο ανάλογο των AD και AZ

5. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Από το σημείο τομής Ο των διαγωνίων του φέρνουμε παράλληλες προς την ΑΒ και ΑΔ που τέμνουν τις ΓΒ και ΓΔ στα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα. Να δειχθεί ότι $MN \parallel \Delta B$.
6. Στη διαγώνιο ΒΔ παρ/μου ΑΒΓΔ παίρνουμε σημείο Ρ, ώστε να είναι $\frac{P\Delta}{PB} = \frac{1}{4}$. Αν η ΓΡ τέμνει την ΑΔ στο Ε, να δειχθεί ότι $EP = \frac{1}{5} EG$.
7. Δύο ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 τέμνονται από τις παράλληλες ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ και ΗΘ έτσι ώστε οι διαγώνιοι ΒΓ, ΔΕ και ΖΗ να είναι παράλληλες. Δείξτε ότι $\Delta Z^2 = B\Delta \cdot Z\Theta$
8. Δίνεται γωνία $x\hat{O}y$ και δύο τυχαία σημεία Α και Β στην Οχ. Φέρνουμε από τα Α και Β παράλληλες ευθείες που τέμνουν την Οψ στα σημεία Γ και Δ. Φέρνουμε την ΒΓ και από το Δ την ΔΕ//ΒΓ. Να δειχθεί ότι $OB^2 = OA \cdot OE$

Β ΟΜΑΔΑ

9. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ. Από το σημείο Δ φέρνουμε κάθετα τμήματα ΔΜ και ΔΝ προς τις ΓΖ και ΑΓ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι $MN \parallel ZE$.
10. Δίνεται κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Από τυχαίο σημείο Κ της πλευράς ΑΒ φέρνουμε την ΚΛ//ΑΔ ($L \in B\Delta$), ΛΜ//ΒΓ ($M \in \Gamma\Delta$) και την ΜΝ//ΑΔ ($N \in A\Gamma$). Δείξτε ότι το ΚΛΜΝ είναι παρ/μμο.
11. Έστω Δ τυχαίο σημείο της πλευράς ΒΓ ενός τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδειχθεί ότι τα κέντρα βάρους των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΔΓ ορίζουν ευθεία παράλληλη προς τη ΒΓ.
12. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με βάσεις $AB=5$ και $\Gamma\Delta=15$ και ευθεία ϵ που τέμνει τις μη παράλληλες πλευρές των ΑΔ και ΒΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Αν Ο είναι το σημείο τομής των ευθειών ΑΔ και ΒΓ και $AE=2$, $E\Delta=4$, $BZ=4$, $Z\Gamma=8$.
 (i) Να δείξετε ότι $EZ \parallel AB \parallel \Gamma\Delta$
 (ii) Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων ΟΑ και ΟΒ
 (iii) Να υπολογίσετε το ΕΖ
13. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB=12$, διάμεσο ΑΜ και βαρύκεντρο Θ. Από το Θ φέρνουμε παράλληλη προς τη ΒΓ που τέμνει την ΑΒ στο Δ.
 (i) Να υπολογίσετε τα ΔΑ και ΔΒ
 (ii) Αν $\Theta\Delta=6$ να υπολογίσετε τη ΒΓ
14. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και από το μέσο Μ της ΒΓ φέρνουμε τυχαία ευθεία που τέμνει την ΑΒ στο Ε και την ΑΓ στο Ζ. Να δειχθεί ότι $\frac{EA}{EB} = \frac{ZA}{Z\Gamma}$.

- 15.** Δυο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά στο Α. Από το Α φέρνουμε δυο ευθείες που τέμνουν τους κύκλους στα σημεία Β', Β και Γ', Γ. Να δείξετε ότι $\frac{AB}{AB'} = \frac{AG}{AG'}$.
- 16.** Από το σημείο τομής Ρ των διαγωνίων ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ φέρνουμε παράλληλες προς τις ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΑΔ που τέμνουν τις ΒΓ, ΑΒ, ΑΔ, ΔΓ στα σημεία Λ, Κ, Ν, Μ αντίστοιχα. Ναδειχθεί ότι το ΚΛΜΝ είναι τραπέζιο.
- 17.** Από την κορυφή Α παρ/μου ΑΒΓΔ φέρνουμε ευθεία ε που τέμνει τις ΒΔ, ΒΓ και ΓΔ στα Ε, Ζ και Θ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι $\frac{1}{AE} = \frac{1}{AZ} + \frac{1}{A\Theta}$.
- 18.** Από την κορυφή Γ παρ/μου ΑΒΓΔ φέρνουμε ευθεία εκτός αυτού που τέμνει την ΑΒ και ΑΔ αντίστοιχα στα Ε και Ζ. Να δείξετε ότι $\frac{AB}{AE} + \frac{AD}{AZ} = 1$.

Γ ΟΜΑΔΑ

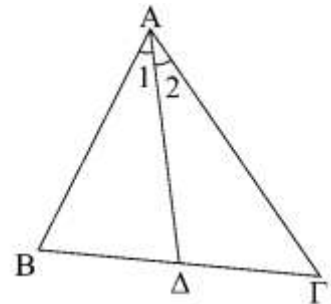
- 19.** Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ και από τις κορυφές του Α και Γ φέρνουμε δύο παράλληλες ευθείες που τέμνουν τις ευθείες των μη παράλληλων πλευρών ΓΔ και ΑΒ στα Ε και Ζ αντίστοιχα. Ναδειχθεί ότι ΔΖ//ΒΕ.
- 20.** Δίνεται γωνία $\hat{xOy} = 120^\circ$ και στις πλευρές της Οχ, Ογ παίρνουμε τα τμήματα ΟΑ=α και ΟΒ=β. Αν η διχοτόμος ΟΖ της γωνίας $\hat{xOy} = 120^\circ$ τέμνει την ΑΒ στο Γ και θέσουμε ΟΓ=γ ναδειχθεί ότι: $\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$.
- 21.** Από το κέντρο βάρους Κ ενός τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε τυχαία ευθεία ε που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Λ και Μ αντίστοιχα. Ναδειχθεί ότι: ΑΒ·ΑΜ+ΑΓ·ΑΛ=3ΑΛ·ΑΜ.
- 22.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τυχαίο σημείο Δ στην πλευρά ΑΒ. Προεκτείνουμε την ΑΓ κατά μήκος ΓΕ=ΒΔ. Η ΔΕ τέμνει την ΒΓ στο Μ. Να δείξετε ότι $\frac{\Delta M}{ME} = \frac{AG}{AB}$.

□ **ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΔΙΧΟΤΟΜΩΝ**

➤ **(Θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου τριγώνου)**

Η διχοτόμος μιας γωνίας τριγώνου διαιρεί την απέναντι πλευρά εσωτερικά σε λόγο ίσο με το λόγο των προσκείμενων πλευρών. Δηλαδή αν ΑΔ διχοτόμος του

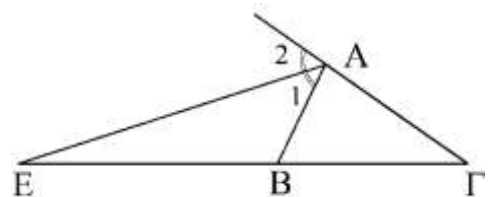
τριγώνου ΑΒΓ τότε $\frac{BD}{DG} = \frac{AB}{AG}$



➤ **(Θεώρημα εξωτερικής διχοτόμου τριγώνου)**

Η διχοτόμος μιας εξωτερικής γωνίας τριγώνου τέμνει την προέκταση της απέναντι πλευράς σε ένα σημείο, το οποίο διαιρεί εξωτερικά την πλευρά αυτή σε λόγο ίσο με το λόγο των προσκείμενων πλευρών. Δηλαδή αν ΑΕ είναι εξωτερική διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ

τότε $\frac{EB}{EG} = \frac{AB}{AG}$



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Σε τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΔ είναι διχοτόμος και ΑΓ=2ΑΒ. Τότε ισχύει ότι:

A. $BD = \frac{1}{2}BG$ B. $BD = \frac{1}{3}BG$ Γ. $BD > \frac{1}{2}BG$

Δ. $BD = \frac{1}{2}BG$ E. $BD > \frac{1}{2}BG$

2. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ, τη διχοτόμο ΑΔ και τη διχοτόμο ΒΕ του τριγώνου ΑΒΔ.

Ο λόγος $\frac{ED}{AD}$ είναι ίσος

A. $\frac{a}{\beta + \gamma}$ B. $\frac{\beta + \gamma}{a}$ Γ. $\frac{a \cdot \gamma}{\beta + \gamma}$

Δ. $\frac{a}{a + \beta + \gamma}$ E. $\frac{a \cdot \gamma}{a + \beta + \gamma}$

3. Αν ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ οι διχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου ΑΒΓ, τότε είναι

$AZ \cdot BD \cdot GE = ZB \cdot DG \cdot EA$

Σωστό

Λάθος

4. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ έχω $\beta=8$ και $\gamma=4$. Φέρνουμε τη διχοτόμο της \hat{A} . Τότε το τμήμα $B\Delta$ μπορεί να πάρει μόνο τις τιμές του διαστήματος

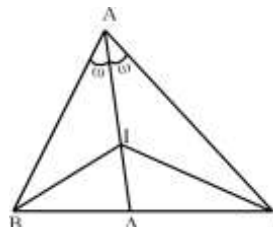
- A. (2,4) B. [2,4] Γ. $\left(\frac{4}{3}, 4\right)$
 Δ. (1,2) E. $\left(\frac{3}{4}, \frac{8}{3}\right)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A ΟΜΑΔΑ

- Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=10$, $B\Gamma=11$ και $A\Gamma=12$. Αν η εξωτερική και εσωτερική διχοτόμος της γωνίας \hat{A} τέμνουν τον φορέα της πλευράς $B\Gamma$ στα σημεία E και Δ αντίστοιχα, να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΔE .
(απ. $\Delta E=60$)
- Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμεσός του $B\Delta$. Η διχοτόμος της γωνίας \hat{A} τέμνει την AB στο E . Από το E φέρουμε την παράλληλη προς την $A\Gamma$ που τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο Z . Να δείξετε ότι η ΔZ είναι η διχοτόμος της γωνίας \hat{B} .
- Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$. Αν $A\Delta$, BE , ΓE είναι οι εσωτερικές διχοτόμοι του και $A\Delta'$, BE' , $\Gamma E'$ είναι οι εξωτερικές διχοτόμοι του, να αποδείξετε ότι:
 α) $\Delta B \cdot E\Gamma \cdot ZA = \Delta\Gamma \cdot EA \cdot ZB$
 β) $\Delta' B \cdot E'\Gamma \cdot Z'A = \Delta'\Gamma \cdot E'A \cdot Z'B$

- Το τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει την $A\Delta$ διχοτόμο και το I έγκεντρο. Να υπολογιστεί ο λόγος $\frac{I\Delta}{IA}$ συναρτήσει των α , β , γ .



- Οι διχοτόμοι των γωνιών A και B παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ τέμνουν τη διαγώνιο στα E και Z . Να δείξετε ότι $EZ \parallel AB$.

B ΟΜΑΔΑ

6. Έστω Δ το μέσο της πλευράς ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ. Αν η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}\hat{\Delta}\hat{\Gamma}$ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Ε και την προέκταση της ΑΒ στο Ζ, να αποδείξετε ότι $\frac{EB}{E\Gamma} = \frac{ZB}{ZA}$.
7. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) με $\hat{A} = 135^\circ$. Κατασκευάζουμε στο εσωτερικό του τριγώνου τις γωνίες $\hat{B}\hat{\Delta}x = \hat{\Gamma}\hat{\Delta}y = 45^\circ$ των οποίων οι πλευρές Αx και Ay τέμνουν την ευθεία ΒΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα.
- (i) Να δείξετε ότι ΒΔ=ΓΕ
(ii) Να δείξετε ότι $ΒΔ^2 = ΒΓ \cdot ΔΕ$
8. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα Δ, Ε μέσα των πλευρών του ΒΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ κατά τμήμα ΒΖ=ΑΓ. Αν η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}\hat{E}\hat{\Delta}$ τέμνει τη διάμεσο ΑΔ στο σημείο Κ, να δείξετε ότι ΒΚ//ΖΔ.
9. Έστω ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ οι διχοτόμοι των γωνιών τριγώνου ΑΒΓ και Κ, Θ και Λ τα σημεία όπου οι ΑΔ, ΒΕ και ΖΓ τέμνουν τις ΖΕ, ΔΖ και ΕΔ αντίστοιχα.
- α) Να βρεθεί ο λόγος $\frac{Z\Theta}{Z\Delta}$ από τις πλευρές α, β γ του τριγώνου ΑΒΓ
β) Να αποδειχθεί ότι $Z\Theta \cdot \Delta\Lambda \cdot EK = \Theta\Delta \cdot \Lambda E \cdot KZ$.
10. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ οι διχοτόμοι του. Αν η ΖΕ τέμνει την ΑΔ στο Ρ να δείξετε ότι $\frac{PZ}{BZ} \cdot \frac{E\Gamma}{PE} = \frac{A\Gamma}{AB}$
11. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και ο κύκλος (Ο) που εφάπτεται στις ίσες πλευρές στα σημεία Β και Γ. Η ευθεία ΑΟ τέμνει τον κύκλο στα σημεία Δ και Ε και την ΒΓ στο Ζ. Να αποδειχθεί ότι Δ και Ε είναι αρμονικά συζυγή ως προς τα Α και Ζ.
12. Από ένα σημείο Α κύκλου (Ο, R) φέρνουμε τις χορδές ΑΓ, ΑΒ και τη διάμετρο ΚΛ \perp ΒΓ. Αν Μ, Ν είναι αντιστοίχως οι τομές των ΑΓ και ΑΒ με την ΚΛ, να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ και Ν είναι συζυγή αρμονικά των Κ και Λ.
13. Στο τρίγωνο ΑΒΓ οι διχοτόμοι του ΒΔ και ΓΕ τέμνονται στο Ι και είναι ΒΕ = ΓΔ. Να αποδείξετε ότι:
- α) $\frac{EI}{I\Gamma} = \frac{\Delta I}{I\beta}$
β) Οι αποστάσεις των Ε και Δ από τη ΒΓ είναι ίσες
γ) ΑΒ = ΑΓ

14. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ γράφουμε την εσωτερική διχοτόμο AD της γωνίας A και την εξωτερική διχοτόμο AE της γωνίας A . Να βρεθεί το μήκος DZ συναρτήσει των α , β και γ .
15. Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ παίρνουμε τα μέσα M και N των βάσεων AB και $\Gamma\Delta$. Αν οι διαγώνιοι τέμνονται στο E και οι μη παράλληλες πλευρές στο Z , να δείξετε ότι τα M και N είναι αρμονικά συζυγή ως προς τα E και Z .
16. Αν I το σημείο τομής των διχοτόμων AD , BE , ΓZ των γωνιών τριγώνου $AB\Gamma$ να δείξετε ότι $IA \cdot IB \cdot I\Gamma > ID \cdot IE \cdot IZ$

Γ ΟΜΑΔΑ

17. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και έστω AD η διχοτόμος της γωνίας A . Αν DE παράλληλη με την AB να δείξετε ότι $\frac{1}{AB} + \frac{1}{A\Gamma} = \frac{1}{AE}$
18. Θεωρούμε τις διχοτόμους AD , BE και ΓZ τριγώνου $AB\Gamma$ που τέμνονται στο I .
- α) Να αποδείξετε ότι: $\frac{IA}{ID} + \frac{IB}{IE} + \frac{I\Gamma}{IZ} = \frac{\beta + \gamma}{\alpha} + \frac{\gamma + \alpha}{\beta} + \frac{\alpha + \beta}{\gamma}$.
- β) Χρησιμοποιώντας την πρόταση: "το άθροισμα δύο αντιστρόφων θετικών αριθμών είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 2" και το ερώτημα (α), να αποδείξετε ότι:
- $$\frac{IA}{ID} + \frac{IB}{IE} + \frac{I\Gamma}{IZ} \geq 6.$$
- γ) Να αποδείξετε ότι: $IA + IB + I\Gamma \geq 6\rho$, όπου ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου στο τρίγωνο κύκλου.
19. Από το μέσο M της πλευράς $B\Gamma$ ενός τριγώνου $AB\Gamma$ φέρνουμε παράλληλη προς τη διχοτόμο AD που τέμνει την ευθεία AB στο σημείο P και την $A\Gamma$ στο N .
Να αποδειχθεί ότι $\Gamma N = BP = \frac{1}{2}(AB + A\Gamma)$
20. Σε ευθεία θεωρούμε τα σημεία P , A και B έτσι ώστε $PA = PB$, και κύκλο (O, R) που διέρχεται απ' τα A και B . Αν $P\Gamma$ η εφαπτόμενη του (O, R) και η διχοτόμος της γωνίας $AP\Gamma$ τέμνει ΓA και ΓB στα σημεία Δ και E αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $EB = 2\Delta A$

21. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\beta^2 - \gamma^2 = \alpha\gamma$ τότε θα ισχύει $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$.

22. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΑΒ=10 και ΑΓ=14 φέρνουμε τη διχοτόμο της ΑΔ της γωνίας Α. Να δειχθεί

α) $A\Delta < \frac{2 \cdot AB \cdot A\Gamma}{AB + A\Gamma}$ β) $A\Delta < 12$