Μαθηματικά κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου
Διαγώνισμα διάρκειας 3 ωρών στις
Συναρτήσεις και τα Όρια

9 – 11 - 2015

Θέμα Α

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ τότε η gof είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Αν το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα (α,β), τότε η f δεν έχει ελάχιστο ούτε μέγιστο.

γ) Αν μια συνάρτηση είναι άρτια, τότε δεν υπάρχει η αντίστροφή της.

δ) Αν μια συνάρτηση f έχει σύνολο τιμών κλειστό διάστημα, τότε και το πεδίο ορισμού της είναι κλειστό διάστημα.

ε) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\Delta$, τότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ.

στ) Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 και $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=0$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$.

ζ) Αν $f(x)>0$ για κάθε x κοντά στο x_0 και υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)>0$.

η) Αν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\leq\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε $f(x)\leq g(x)$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$.

θ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$.

ι) Αν f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)f(\beta)>0$, τότε $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

κ) Κάθε συνάρτηση ορισμένη σε κλειστό διάστημα έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο διάστημα αυτό.

λ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία μόνο ρίζα στο (α,β), τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο $[\alpha,\beta]$.

μ) Η σύνθεση δύο περιττών συναρτήσεων $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι άρτια συνάρτηση.

ν) Η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}^*$.

ξ) Η συνάρτηση f είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, αν και μόνο αν για κάθε $x_1,x_2\in A_f$ με $x_1=x_2$ είναι $f(x_1)=f(x_2)$.

μ 1,5x15

Θέμα Β

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\frac{\lambda x}{x-2}$, $x\neq 2$, $\lambda\in\mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύει ότι: $(f\circ f)(x)=x$ για κάθε $x\neq 2$.

α) Να δείξετε ότι $\lambda=2$. μ 6

β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $f(x)=f^{-1}(x)$ για κάθε $x\neq 2$. μ 5

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $f(f(x+1))+f(x+1)=x+\frac{2e^{-x}}{e^{-x}-2}+1$. μ 7

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f. μ 7

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+\alpha x+\beta}{x-2}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=7$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha=3$ και $\beta=-10$. μ 4

β) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f^2(x_0)=x_0^4+x_0^3+6x_0+28$. μ 5

γ) Έστω συνάρτηση g ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(g(x))=\sqrt{x^2+1}-x+5$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να δείξετε ότι $g(x)=\sqrt{x^2+1}-x$. μ 4

ii. Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα. μ 5

iii. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x+1)-g(x)\right)=0$. μ 4,5

iv. Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{10}<x-3$. μ 4

Θέμα Δ

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f^2(x)-x^2=e^{2x}+2xf(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=1$.

α) Να δείξετε ότι $f(x)=e^x+x$. μ 6

β) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $x_0\in\mathbb{R}$ για τον οποίο ισχύει ότι: $e^{e^{x_0}+x_0}+e^{x_0}+x_0=1$.
μ 6

Έστω επιπλέον συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $e^{g(x)}-e^{\eta\mu x}=\eta\mu x-g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ) Να δείξετε ότι $g(x)=\eta\mu x$. μ 5

δ) Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-g(x)}{x+1}$ **ii.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2 g\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]$ **iii.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{2-x}{1-g(x)}$

μ 3+3+3

Καλή επιτυχία!

Στέλιος Μιχαήλογλου

Λύσεις

Θέμα Α

α) Λ , β) Σ, γ) Σ, δ) Λ, ε) Σ, στ) Σ, ζ) Λ, η) Σ, θ) Λ, ι) Λ, κ) Σ, λ) Λ, μ) Λ, ν) Λ, ξ) Λ

Θέμα Β

α) $\begin{cases} x \in A_f \\ f(x) \in A_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ \dfrac{\lambda x}{x-2} \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ \lambda x \neq 2x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ (\lambda-2)x \neq -4 \end{cases}$ (1)

Αν $\lambda \neq 2$, τότε $\begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq \dfrac{-4}{\lambda-2} \end{cases}$, οπότε η σχέση $(f \circ f)(x) = x$ δεν ισχύει για κάθε $x \neq 2$.

Αν $\lambda = 2$, τότε από την (1) έχουμε: $\begin{cases} x \neq 2 \\ 0 \neq -4 \quad \text{ισχύει} \end{cases}$, άρα $A_{f \circ f} = \mathbb{R} - \{2\}$. Τότε

$$f(x) = \frac{2x}{x-2} \text{ και } (f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{2\dfrac{2x}{x-2}}{\dfrac{2x}{x-2} - 2} = \frac{\dfrac{4x}{\cancel{x-2}}}{\dfrac{\cancel{2x} - \cancel{2x} + 4}{\cancel{x-2}}} = \frac{4x}{4} = x$$

β) Έστω $x_1, x_2 \neq 2$ με $f(x_1) = f(x_2)$, τότε

$\dfrac{2x_1}{x_1-2} = \dfrac{2x_2}{x_2-2} \Leftrightarrow \cancel{2x_1x_2} - 4x_1 = \cancel{2x_1x_2} - 4x_2 \Leftrightarrow -4x_1 = -4x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ άρα η f είναι 1 – 1 και αντιστρέφεται.

$f(x) = y \Leftrightarrow \dfrac{2x}{x-2} = y \Leftrightarrow 2x = xy - 2y \Leftrightarrow 2y = xy - 2x \Leftrightarrow x(y-2) = 2y$ (2).

Αν $y = 2$, τότε η (2) γίνεται $0 = 4$ και είναι αδύνατη.

Αν $x = 2$, τότε και πάλι η (2) είναι αδύνατη.

Αν $y \neq 2$ τότε $x = \dfrac{2y}{y-2}$ δηλαδή $f^{-1}(y) = \dfrac{2y}{y-2}$, $y \neq 2$, άρα

$f^{-1}(x) = \dfrac{2x}{x-2} = f(x)$, $x \neq 2$

γ) Επειδή $(f \circ f)(x) = x$ για κάθε $x \neq 2$, είναι $f(f(x+1)) = x+1$ με $x+1 \neq 2 \Leftrightarrow x \neq 1$.

$f(f(x+1)) + f(x+1) = x + \dfrac{2e^{-x}}{e^{-x}-2} + 1 \Leftrightarrow x+1+f(x+1) = x + f(e^{-x}) + 1 \Leftrightarrow$

$f(x+1) = f(e^{-x}) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x+1 = e^{-x} \Leftrightarrow e^{-x} - x - 1 = 0$ (3) με

$e^{-x} \neq 2 \Leftrightarrow -x \neq \ln 2 \Leftrightarrow x \neq -\ln 2$.

Έστω $h(x) = e^{-x} - x - 1,\ x \in \mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι $-x_1 > -x_2$ (4) και $e^{-x_1} > e^{-x_2}$ (5)

Με πρόσθεση κατά μέλη των (4) και (5) έχουμε:

$e^{-x_1} - x_1 > e^{-x_2} - x_2 \Leftrightarrow e^{-x_1} - x_1 - 1 > e^{-x_2} - x_2 - 1 \Leftrightarrow h(x_1) > h(x_2) \Rightarrow h \searrow \mathbb{R} \Rightarrow h\ 1-1$

$(3) \Rightarrow h(x) = h(0) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x = 0$ δεκτή.

δ) $f(x)=\frac{2x}{x-2}=\frac{2x-4+4}{x-2}=2+\frac{4}{x-2}$

Έστω $x_1<x_2<2$ τότε $x_1-2<x_2-2<0 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1-2}>\frac{1}{x_2-2}\Leftrightarrow$

$\frac{4}{x_1-2}>\frac{4}{x_2-2}\Leftrightarrow 2+\frac{4}{x_1-2}>2+\frac{4}{x_2-2}\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)\Rightarrow f\searrow(-\infty,2)$

Έστω $2<x_1<x_2$ τότε $0<x_1-2<x_2-2\Leftrightarrow \frac{1}{x_1-2}>\frac{1}{x_2-2}\Leftrightarrow$

$\frac{4}{x_1-2}>\frac{4}{x_2-2}\Leftrightarrow 2+\frac{4}{x_1-2}>2+\frac{4}{x_2-2}\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)\Rightarrow f\searrow(2,+\infty)$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x}{x-2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}}=2$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}}=2$.

$\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\left(2x\frac{1}{x-2}\right)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\left(2x\frac{1}{x-2}\right)=+\infty$

Στο διάστημα $\Delta_1=(-\infty,2)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, άρα

$f(\Delta_1)=\left(\lim\limits_{x\to2^-}f(x),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)=(-\infty,2)$.

Στο διάστημα $\Delta_2=(2,+\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, άρα

$f(\Delta_2)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to2^+}f(x)\right)=(2,+\infty)$. $f(A)=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)=\mathbb{R}-\{2\}$.

Θέμα Γ

α) Για κάθε $x\neq2$ είναι $f(x)=\frac{x^2+\alpha x+\beta}{x-2}\Leftrightarrow f(x)(x-2)=x^2+\alpha x+\beta$ άρα και

$\lim\limits_{x\to2}\left[f(x)(x-2)\right]=\lim\limits_{x\to2}(x^2+\alpha x+\beta)\Leftrightarrow 0=4+2\alpha+\beta\Leftrightarrow\beta=-4-2\alpha$ (1)

$\lim\limits_{x\to2}f(x)=\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2+\alpha x+\beta}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2+\alpha x-4-2\alpha}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)+\alpha\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}=4+\alpha$

Επειδή $\lim\limits_{x\to2}f(x)=7$ είναι $4+\alpha=7\Leftrightarrow\alpha=3$, τότε από (1)$\Rightarrow\beta=-10$.

β) Για $\alpha=3$ και $\beta=-10$ είναι $f(x)=\frac{x^2+3x-10}{x-2}=\frac{\cancel{(x-2)}(x+5)}{\cancel{x-2}}=x+5$

Έστω $h(x)=x^4+x^3+6x+28-f^2(x)=x^4+x^3+6x+28-(x+5)^2\Leftrightarrow$

$h(x)=x^4+x^3+6x+28-x^2-10x-25=x^4+x^3-x^2-4x+3=(x-1)(x^3+2x^2+x-3)$

Έστω $\varphi(x)=x^3+2x^2+x-3,\ x\in[0,1]$.

Είναι $\varphi(0)=-3,\varphi(1)=1$, δηλαδή $\varphi(0)\varphi(1)<0$ και επειδή η φ είναι συνεχής ως πολυωνυμική, λόγω του θεωρήματος Bolzano, υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε

$\varphi(x_0)=0\Leftrightarrow x_0^3+2x_0^2+x_0-3=0\Rightarrow h(x_0)=0\Leftrightarrow f^2(x_0)=x_0^4+x_0^3+6x_0+28$.

γ) i. $f(g(x))=\sqrt{x^2+1}-x+5\Leftrightarrow g(x)+5=\sqrt{x^2+1}-x+5\Leftrightarrow g(x)=\sqrt{x^2+1}-x$

ii. $f(x_1)-f(x_2)=\sqrt{x_1^2+1}-x_1-\sqrt{x_2^2+1}+x_2=\dfrac{x_1^2+\cancel{1}-x_2^2-\cancel{1}}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_1^2+1}}-(x_1-x_2)\Leftrightarrow$

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_1^2+1}}-(x_1-x_2)=(x_1-x_2)\left[\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}-1\right]=,$$

$$(x_1-x_2)\left[\frac{x_1+x_2-\sqrt{x_1^2+1}-\sqrt{x_2^2+1}}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}\right]$$

Είναι $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x|\Leftrightarrow-\sqrt{x^2+1}<x<\sqrt{x^2+1}\Rightarrow x-\sqrt{x^2+1}<0$, άρα

$x_1-\sqrt{x_1^2+1}<0$, $x_2-\sqrt{x_2^2+1}<0$ και επειδή $x_1-x_2<0$ είναι

$f(x_1)-f(x_2)>0\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)\Rightarrow f\searrow\mathbb{R}$.

iii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x+1)-g(x)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(x+1)^2+1}-x-1-\sqrt{x^2+1}+x\right)=$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{x^2+1}-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cancel{x^2}+2x+2-\cancel{x^2}-1}{\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2+1}}-1\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cancel{x}\left(2+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}-1\right)=\frac{2}{1+1}-1=0$$

iv. $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{10}<x-3\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}-x<\sqrt{10}-3\Leftrightarrow g(x)<g(3)\overset{g\searrow}{\Leftrightarrow}x>3$.

Θέμα Δ

α) $f^2(x)-x^2=e^{2x}+2xf(x)\Leftrightarrow f^2(x)-2xf(x)+x^2=e^{2x}\Leftrightarrow\left(f(x)-x\right)^2=e^{2x}$ (1)

Επειδή $e^{2x}\neq0$ είναι $h(x)=f(x)-x\neq0$ και επειδή η h είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επειδή $h(0)=f(0)=1>0$, είναι $h(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η (1) γίνεται:

$f(x)-x=e^x\Leftrightarrow f(x)=e^x+x$.

β) Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$, τότε $e^{x_1}<e^{x_2}$ και $e^{x_1}+x_1<e^{x_2}+x_2\Leftrightarrow$

$f(x_1)<f(x_2)\Rightarrow f\nearrow\mathbb{R}\Rightarrow f$ 1−1.

$e^{e^{x_0}+x_0}+e^{x_0}+x_0=1\Leftrightarrow e^{f(x_0)}+f(x_0)=f(0)\Leftrightarrow f\left(f(x_0)\right)=f(0)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}f(x_0)=0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x+x\right)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x+x\right)=+\infty$.

Η f έχει σύνολο τιμών το $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=\mathbb{R}$.

Επειδή $0\in f(A)$ υπάρχει μοναδικό $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$.

γ) $e^{g(x)}-e^{\eta\mu x}=\eta\mu x-g(x)\Leftrightarrow e^{g(x)}+g(x)=e^{\eta\mu x}+\eta\mu x\Leftrightarrow f\left(g(x)\right)=f(\eta\mu x)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}g(x)=\eta\mu x$.

δ)i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-g(x)}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\eta\mu x}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x}\left(1-\frac{\eta\mu x}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}=1$ γιατί για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι

$\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right| = \frac{|\eta\mu x|}{|x|} \le \frac{1}{x} \Leftrightarrow -\frac{1}{x} \le \frac{\eta\mu x}{x} \le \frac{1}{x}$ και από Κ.Π είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x} = 0$.

ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2 g\left(\frac{1}{x}\right)\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2\eta\mu\frac{1}{x}\right) \underset{u\to0^+}{\overset{\frac{1}{x}=u}{=}} \lim\limits_{u\to0^+}\left(\frac{1}{u^2}\eta\mu u\right) = \lim\limits_{u\to0^+}\left(\frac{1}{u}\frac{\eta\mu u}{u}\right) = +\infty$.

iii. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2-x}{1-g(x)} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[(2-x)\frac{1}{1-\eta\mu x}\right] = +\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(2-x) = 2-\frac{\pi}{2} > 0$ και

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1-\eta\mu x} = +\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-\eta\mu x) = 0$ και $1-\eta\mu x > 0$ για κάθε $x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$