30η Άσκηση

Έως κυρτότητα

Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύει ότι:

- $xf''(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$ και
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Να δείξετε ότι:

α) η f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$

β) $xf(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$.

γ) Να δείξετε ότι η f δεν είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της.

δ) Αν $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\beta, f(\beta))$ με $0 < \alpha < \beta$ δύο σημεία της C_f, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από το ευθύγραμμο τμήμα AB στο διάστημα (α, β).

Στέλιος Μιχαήλογλου

Λύση

α) Αν $x>0$ τότε $f''(x)>0 \Leftrightarrow f'\nearrow(0,+\infty) \Rightarrow f\cup(0,+\infty)$

Αν $x<0$ τότε $f''(x)<0 \Leftrightarrow f'\searrow(-\infty,0) \Rightarrow f\cap(-\infty,0)$.

Επειδή η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$ βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό.

Η εφαπτομένη της C_f στο $K(x_0,f(x_0))$ με $x_0>0$ έχει εξίσωση: $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow$

$y=f'(x_0)x-x_0f'(x_0)+f(x_0)$. Είναι $f(x)\geq f'(x_0)x-x_0f'(x_0)+f(x_0)$ (1) για κάθε $x>0$.

Έστω ότι $f'(x_0)>0$ τότε επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f'(x_0)x-x_0f'(x_0)+f(x_0)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x_0)x=+\infty$, από τη σχέση (1) θα είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ που είναι άτοπο. Άρα $f'(x)\leq 0$ για κάθε $x>0$. Όμως η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, οπότε η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο $(0,+\infty)$, άρα $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(0,\rho)\cup(\rho,+\infty)$,ρ η πιθανή ρίζα της . Επειδή η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Επειδή η f είναι κοίλη στο $(-\infty,0)$ βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό.

Η εφαπτομένη της C_f στο $M(x_1,f(x_1))$ με $x_1<0$ έχει εξίσωση: $y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1) \Leftrightarrow$

$y=f'(x_1)x-x_1f'(x_1)+f(x_1)$. Είναι $f(x)\leq f'(x_1)x-x_1f'(x_1)+f(x_1)$ (2) για κάθε $x<0$.

Έστω ότι $f'(x_1)>0$ τότε επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f'(x_1)x-x_1f'(x_1)+f(x_1)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x_1)x=-\infty$, από τη σχέση (2) θα είναι και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ που είναι άτοπο. Άρα $f'(x)\leq 0$ για κάθε $x<0$. Όμως η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0)$, οπότε η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο διάστημα αυτό , άρα $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)$ ή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,\rho')\cup(\rho',0)$,ρ΄ η πιθανή ρίζα της .

Επειδή η f είναι συνεχής στο $(-\infty,0)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

β) Έστω ότι στο υπάρχει $\rho_1>0$ τέτοιο, ώστε $f(\rho_1)\leq 0$, τότε στο διάστημα $\Delta_1=(\rho_1,+\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, άρα έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το

$f(\Delta_1)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),f(\rho_1)\right)=(0,f(\rho_1))$ που είναι αδύνατο. Άρα $f(x)>0$ για κάθε $x>0$ και $xf(x)>0$ στο $(0,+\infty)$.

Έστω ότι στο υπάρχει $\rho_2<0$ τέτοιο, ώστε $f(\rho_2)\geq 0$, τότε στο διάστημα $\Delta_2=(-\infty,\rho_2)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, άρα έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το

$f(\Delta_2)=\left(f(\rho_2),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)=(f(\rho_2),0)$ που είναι αδύνατο.

Άρα $f(x)<0$ για κάθε $x<0$ και $xf(x)>0$ στο $(-\infty,0)$

γ) Για να είναι η f γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της πρέπει για κάθε $x_2,x_3\in\mathbb{R}^*$ με $x_2<x_3$ να είναι $f(x_2)>f(x_3)$. Έστω $x_2<0<x_3$ τότε $f(x_2)<0,\ f(x_3)>0$ άρα $f(x_2)<f(x_3)$ οπότε η f δεν είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.

δ) Η ευθεία ΑΒ έχει εξίσωση $y-f(\alpha)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\alpha) \Leftrightarrow y=\lambda_{AB}x-\alpha\lambda_{AB}+f(\alpha)$.

Αρκεί να δείξουμε ότι $f(x)<\lambda_{AB}x-\alpha\lambda_{AB}+f(\alpha)$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$.

Έστω $g(x)=f(x)-\lambda_{AB}x+\alpha\lambda_{AB}-f(\alpha)$, $x\in[\alpha,\beta]$. Είναι $g'(x)=f'(x)-\lambda_{AB}$.

Λόγω του θεωρήματος μέσης τιμής για την f στο $[\alpha,\beta]$, υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε:

$f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\lambda_{AB}$.

Για κάθε $\alpha<x<\xi \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x)<f'(\xi)=\lambda_{AB} \Leftrightarrow g'(x)<0 \Rightarrow g\searrow[\alpha,\xi]$, οπότε για κάθε $\alpha<x\le\xi$ είναι $g(x)<g(\alpha)=0$.

Για κάθε $\xi<x<\beta \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x)>f'(\xi)=\lambda_{AB} \Leftrightarrow g'(x)>0 \Rightarrow g\nearrow[\xi,\beta]$, οπότε για κάθε $\xi\le x<\beta$ είναι $g(x)<g(\beta)=0$. Άρα για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ είναι $g(x)<0 \Leftrightarrow f(x)<\lambda_{AB}x-\alpha\lambda_{AB}+f(\alpha)$