

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

### Σύνθετες ασκήσεις

1. Σε μια σακούλα υπάρχουν 12 καραμέλες με γεύση λεμόνι, 8 καραμέλες με γεύση πορτοκάλι και  $x$  καραμέλες με γεύση μανταρίνι. Αν επιλέξουμε τυχαία μια καραμέλα από τη σακούλα, τότε η πιθανότητα να έχει γεύση μανταρίνι είναι 20%.
  - α) Να βρείτε τον αριθμό  $x$
  - β) Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων :
    - i) Π : η καραμέλα έχει γεύση πορτοκάλι
    - ii) A : η καραμέλα έχει γεύση λεμόνι ή πορτοκάλι
    - iii) B : η καραμέλα δεν έχει γεύση λεμόνι
  - γ) Από τη σακούλα φάγαμε 3 καραμέλες με γεύση λεμόνι και 2 καραμέλες με γεύση μανταρίνι. Αν επιλέξουμε τώρα τυχαία μια καραμέλα από τη σακούλα, να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου Γ: η καραμέλα έχει γεύση μανταρίνι.
2. Οι πιθανότητες των ενδεχομένων A, B,  $A \cap B$  ενός πειράματος τύχης με δειγματικό χώρο  $\Omega$  ικανοποιούν την σχέση  $[3P(A)-1]^2 + [2P(B)-1]^2 + [6P(A \cap B)-1]^2 = 0$ . (1) Να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων :
  - α. Να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο A.
  - β. Να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο B.
  - γ. Να πραγματοποιηθεί ακριβώς ένα από τα ενδεχόμενα A και B.
  - δ. Να μην πραγματοποιούνται συγχρόνως τα ενδεχόμενα A και B.
3. Μέσα σε ένα κουτί υπάρχουν  $x^2 - 4x$  άσπρες σφαίρες,  $3x - 15$  κόκκινες σφαίρες και  $x + 15$  μαύρες σφαίρες με  $x \geq 5$ . Βγάζουμε από το κουτί στην τύχη μία σφαίρα
  - α) Να αποδείξετε ότι η πιθανότητα P να βγάλουμε από το κουτί μια κόκκινη σφαίρα είναι 
$$P(x) = \frac{3x - 15}{x^2}$$
  - β) Πόσες κόκκινες σφαίρες πρέπει να περιέχει το κουτί έτσι ώστε να βγάλουμε μια κόκκινη σφαίρα με την μεγαλύτερη δυνατή πιθανότητα;
  - γ) Για το παραπάνω πλήθος των κόκκινων σφαιρών, να υπολογισθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων:  
A: «να βγάλουμε κόκκινη σφαίρα»,    B: «να βγάλουμε άσπρη σφαίρα»,  
Γ: «να βγάλουμε μαύρη σφαίρα»
4. Σε ένα κουτί υπάρχουν  $x$  λευκά σφαιρίδια, 20 κίτρινα και  $y$  μαύρα. Επιλέγουμε τυχαία ένα σφαιρίδιο. Η πιθανότητα να επιλέξουμε λευκό σφαιρίδιο είναι ίση με  $\frac{1}{4}$  ενώ η πιθανότητα να επιλέξουμε μαύρο σφαιρίδιο είναι ίση με
  - α. Να υπολογισθεί το πλήθος των σφαιριδίων που βρίσκονται μμέσα στο κουτί.
  - β. Να υπολογισθεί η πιθανότητα του ενδεχομένου : «Το σφαιρίδιο που θα επιλεγεί να είναι κίτρινο».
5. Σε ένα κουτί υπάρχουν κόκκινες και πράσινες σφαίρες. Οι κόκκινες σφαίρες είναι κατά 10 περισσότερες από τις πράσινες, ενώ αν επιλέξουμε τυχαία μια σφαίρα από το κουτί, τότε η πιθανότητα να είναι πράσινη ισούται με 0,4. Να βρείτε πόσες κόκκινες και πόσες πράσινες σφαίρες υπάρχουν στο κουτί.
6. Ένα κουτί περιέχει 2 άσπρες, 12 μπλε σφαίρες και ορισμένες πράσινες σφαίρες. Επιλέγουμε τυχαία μια σφαίρα. Η πιθανότητα η σφαίρα να είναι πράσινη είναι 30%. Να βρείτε :

- i) πόσες είναι οι πράσινες σφαίρες
- ii) την πιθανότητα η μπάλα που επιλέξαμε να είναι ή άσπρη ή πράσινη.

7. Σε ένα επιστημονικό συνέδριο συμμετέχουν 30 επιστήμονες ,από τους οποίους οι 10 είναι Φυσικοί και οι υπόλοιποι είναι Μαθηματικοί ή Χημικοί. Αν επιλέξουμε τυχαία έναν από τους επιστήμονες ,τότε η πιθανότητα να είναι Μαθηματικός είναι κατά  $\frac{1}{3}$  μεγαλύτερη από την πιθανότητα να είναι Χημικός. Να βρείτε πόσοι είναι οι Μαθηματικοί και πόσοι οι Χημικοί που συμμετέχουν στο συνέδριο.
8. Σε ένα πάρκινγκ υπάρχουν 15 ασημί, x μαύρα και y κόκκινα αυτοκίνητα. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα αυτοκίνητο ,τότε η πιθανότητα να είναι ασημί είναι 30% και η πιθανότητα να είναι κόκκινο είναι 20%.Να βρείτε τους αριθμούς x και y.
9. Οι θεατές μιας θεατρικής παράστασης ήταν x παιδιά ,y άντρες και 80 γυναίκες. Επιλέγουμε τυχαία έναν θεατή. Η πιθανότητα να είναι παιδί είναι 25%,ενώ η πιθανότητα να είναι γυναίκα είναι κατά 5% μεγαλύτερη από την πιθανότητα να είναι άντρας. Να βρείτε πόσα ήταν τα παιδιά και πόσοι οι άντρες.
10. Κατά την αρχή της σχολικής χρονιάς οι μαθητές της Α΄ τάξης ενός λυκείου ρωτήθηκαν Σχετικά με τον αριθμό των βιβλίων που διάβασαν την περίοδο των θερινών διακοπών. Σύμφωνα με τις απαντήσεις που δόθηκαν ,συντάχθηκε ο επόμενος πίνακας

Αριθμός βιβλίων	Αριθμός μαθητών
0	$\alpha+4$
1	$5\alpha+8$
2	$4\alpha$
3	$\alpha-1$
4	$2\alpha$

Γνωρίζουμε ότι αν επιλέξουμε τυχαία ένα μαθητή ,τότε η πιθανότητα να έχει διαβάσει 2 βιβλία είναι 24%.

- i) Να αποδείξετε ότι  $\alpha=3$
- ii) Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:  
 Α: ο μαθητής έχει διαβάσει το πολύ 1 βιβλίο  
 Β: ο μαθητής έχει διαβάσει τουλάχιστον 3 βιβλία.

11. Σε ένα ξενοδοχείο μένουν Άγγλοι ,Γάλλοι και Ιταλοί τουρίστες. Επιλέγουμε τυχαία ένα τουρίστα. Γνωρίζουμε ότι οι Άγγλοι τουρίστες είναι 70,ενώ η πιθανότητα να επιλέξουμε Γάλλο τουρίστα είναι  $\frac{1}{5}$  και η πιθανότητα να επιλέξουμε Ιταλό τουρίστα είναι  $\frac{9}{20}$  .  
 Να βρείτε πόσοι είναι οι Γάλλοι και πόσοι οι Ιταλοί τουρίστες.

12. Σε έναν διαγωνισμό του Α.Σ.Ε.Π. για πλήρωση θέσεων στο Υπουργείο Οικονομικών συμμετέχουν 20.000 υποψήφιοι για 3.000 θέσεις. Ο αριθμός των υποψηφίων της Αθήνας είναι τριπλάσιος από τον αριθμό των υποψηφίων των νησιών του Αιγαίου και του Ιονίου μαζί. Ο αριθμός των υποψηφίων των νησιών του Αιγαίου είναι διπλάσιος από τον αριθμό των υποψηφίων των νησιών του Ιονίου. Τα ποσοστά επιτυχίας είναι 40% για την Αθήνα, 30% για τα νησιά του Αιγαίου, 40% για τα νησιά του Ιονίου και 5% για την υπόλοιπη Ελλάδα. Επιλέγουμε τυχαία έναν επιτυχόντα του διαγωνισμού. Να υπολογισθεί η πιθανότητα του ενδεχομένου : «Ο επιτυχών να προέρχεται από τα νησιά του Ιονίου».

13. Οι μαθητές της Α΄ Λυκείου ενός σχολείου έχουν επιλέξει να παραδώσουν μια εργασία είτε στα Μαθηματικά είτε στη Φυσική. Γνωρίζουμε ότι τα  $\frac{3}{4}$  των αγοριών και το  $\frac{1}{3}$  των κοριτσιών θα παραδώσουν εργασία στα Μαθηματικά. Επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή της Α΄ Λυκείου από το παραπάνω σχολείο. Η πιθανότητα αυτός ο μαθητής να είναι αγόρι και να παραδώσει εργασία στη Φυσική είναι 10%.
- α) Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής που επιλέξαμε να είναι κορίτσι και να παραδώσει εργασία στα Μαθηματικά
- β) Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι συνολικά στην Α΄ Λυκείου υπάρχουν 50 μαθητές, να βρείτε :
- i) πόσα είναι τα αγόρια και πόσα τα κορίτσια
- ii) την πιθανότητα ο μαθητής που επιλέξαμε να παραδώσει εργασία στη Φυσική
14. Σε ένα δείγμα 200 στρατιωτών από το Κέντρο Εκπαίδευσης Πυροβολικού της Θήβας, 150 στρατιώτες δήλωσαν ότι κατάγονται από την Αθήνα ενώ 60 στρατιώτες δήλωσαν πτυχιούχοι Ανώτατης Εκπαίδευσης. Επιλέγουμε έναν στρατιώτη και θεωρούμε τα ενδεχόμενα :
- A : «Ο στρατιώτης να κατάγεται από την Αθήνα» και
- B : «Ο στρατιώτης να είναι πτυχιούχος Ανώτατης Εκπαίδευσης».
- α. Ναδειχθεί ότι τα ενδεχόμενα A και B δεν είναι ασυμβίβαστα.
- β. Ναδειχθεί ότι  $P(A \cup B) \geq 0,75$  και  $0,05 \leq P(A \cap B) \leq 0,3$ .
- γ. Να υπολογισθεί η ελάχιστη τιμή της πιθανότητας του ενδεχομένου
- Γ : «Ο στρατιώτης να κατάγεται μόνο από την Αθήνα ή να είναι μόνο πτυχιούχος Ανώτατης Εκπαίδευσης».
15. Σε μία συνεστίαση τα  $\frac{3}{4}$  των παρευρισκόμενων ανδρών και τα  $\frac{5}{6}$  των παρευρισκόμενων γυναικών είναι παντρεμένοι. Επιλέγουμε ένα άτομο στη τύχη. Αν είναι γνωστό ότι όλα τα αντρόγυνα παρευρίσκονται στη συνεστίαση, να βρεθεί η πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων:
- A: Το άτομο που επιλέχθηκε είναι ανύπαντρο.
- B: Το άτομο που επιλέχθηκε είναι ανύπαντρος άντρας ή παντρεμένη γυναίκα.
16. Στο ράφι ενός βιβλιοπωλείου βρίσκονται βιβλία Μαθηματικών και Φυσικής και τα βιβλία Μαθηματικών είναι 5 περισσότερα από τα βιβλία Φυσικής. Επιλέγουμε τυχαία ένα από τα βιβλία και έστω  $P(M)$ ,  $P(\Phi)$  οι πιθανότητες επιλογής βιβλίου Μαθηματικών και Φυσικής αντίστοιχα. Να βρείτε τον ελάχιστο αριθμό βιβλίων που πρέπει να υπάρχει στο ράφι, ώστε να ισχύει:  $P(\Phi) \geq \frac{3}{4}P(M)$ .
17. Έστω η εξίσωση  $ax^2 + bx - 2 = 0$ , όπου τα  $a, b$  καθορίζονται από τη ρίζη δύο αμερόληπτων ζαριών. Να βρείτε τη πιθανότητα η εξίσωση να έχει ρίζα το  $-2$ .
18. Σ' ένα κουτί υπάρχουν όμοιες σφαίρες χρώματος άσπρου και μαύρου.. Οι άσπρες σφαίρες είναι 3 περισσότερες από τις μαύρες. Επιλέγουμε τυχαία μία σφαίρα από το κουτί. Αν  $P(A)$ ,  $P(M)$  είναι οι πιθανότητες επιλογής άσπρης και μαύρης σφαίρας αντίστοιχα, να βρείτε τον ελάχιστο αριθμό σφαιρών που πρέπει να υπάρχουν στο κουτί ώστε να ισχύει:  $P(M) \geq \frac{1}{2}P(A)$ .
19. Έστω ο δειγματικός χώρος  $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 2010\}$  ο οποίος αποτελείται από ισοπίθανα και απλά ενδεχόμενα και A, B είναι δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα του  $\Omega$  για τα οποία ισχύει  $9(P(B))^2 - 13P(B) - P(A) + 5 = 0$
- α) Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων A και B.

- β) Να βρείτε το πλήθος των στοιχείων των  $A$  και  $B$ .  
γ) Δείξτε ότι τα  $A$ ,  $B$  είναι αντίθετα ενδεχόμενα

20. Σε ένα κουτί υπάρχουν  $n$  σφαίρες αριθμημένες από το 1 έως το  $n$ . Επιλέγουμε τυχαία μία σφαίρα από το κουτί. Η πιθανότητα η σφαίρα αυτή να έχει περιττό αριθμό είναι κατά 4% μεγαλύτερη από το να έχει άρτιο αριθμό. Να βρείτε το πλήθος  $n$  των σφαιρών που υπάρχουν στο κουτί.

21. Από τους 25 μαθητές ενός τμήματος  $A'$  Λυκείου ενός σχολείου, οι 23 μαθαίνουν Αγγλικά, οι 8 Γαλλικά. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή της τάξης.

i) Να δείξετε ότι :  $\frac{6}{25} \leq p(A \cap B) \leq \frac{8}{25}$

ii) Να αποδείξετε ότι :  $\frac{3}{5} \leq p(A - B) \leq \frac{23}{25}$

22. Ένας κήπος έχει 1200 δέντρα. Από αυτά τα 300 είναι τροπικά, τα 1000 είναι οπωροφόρα. Επιλέγουμε τυχαία ένα δέντρο.

Αν  $A$ : το ενδεχόμενο το δέντρο να είναι τροπικό και

$B$ : το ενδεχόμενο το δέντρο να είναι οπωροφόρο.

i) Να αποδείξετε ότι :  $\frac{1}{12} \leq p(A \cap B) \leq \frac{1}{4}$

ii) Να αποδείξετε ότι  $\frac{7}{12} \leq p(B - A) \leq \frac{5}{6}$

23. Ένα ενυδρείο έχει 2400 ψάρια. Από αυτά τα 1800 είναι τροπικά ψάρια, τα 800 έχουν κόκκινο χρώμα. Επιλέγουμε τυχαία ένα ψάρι.

Αν  $A$ : το ενδεχόμενο το ψάρι να είναι τροπικό και

$B$ : το ενδεχόμενο το ψάρι να είναι κόκκινο.

i) Να δείξετε ότι  $\frac{1}{12} \leq p(A \cap B) \leq \frac{1}{3}$

ii) Να αποδείξετε ότι  $\frac{5}{12} \leq p(A - B) \leq \frac{3}{4}$