ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ 2015

ΘΕΜΑ Α

Α.1. Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha)<f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha)<\eta<f(\beta)$.
Έστω $g(x)=f(x)-\eta$, $x\in[\alpha,\beta]$. Παρατηρούμε ότι: η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $g(\alpha)g(\beta)<0$, αφού $g(\alpha)=f(\alpha)-\eta<0$ και $g(\beta)=f(\beta)-\eta>0$.
Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει
$x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=f(x_0)-\eta=0$, οπότε $f(x_0)=\eta$.

Α2. Έστω μια συνάρτηση f και ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η f είναι **συνεχής στο x_0**, όταν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Α3. Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού Α, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0\in A$ **τοπικό ελάχιστο**, όταν υπάρχει $\delta>0$, τέτοιο ώστε $f(x)\ge f(x_0)$ για κάθε $x\in A\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$.

Α4. Λ Σ Λ Σ Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $|z-4|=2|z-1|\Leftrightarrow|z-4|^2=4|z-1|^2\Leftrightarrow(z-4)(\bar z-4)=4(z-1)(\bar z-1)\Leftrightarrow$

$|z|^2\cancel{-4z}\cancel{-4\bar z}+16=4|z|^2\cancel{-4z}\cancel{-4\bar z}+4\Leftrightarrow 3|z|^2=12\Leftrightarrow|z|^2=4\Leftrightarrow|z|=2$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ=2.

β΄ τρόπος
Έστω $z=x+yi,\ x,y\in\mathbb{R}$, τότε

$$|z-4|=2|z-1|\Leftrightarrow|x-4+yi|=2|x-1+yi|\Leftrightarrow\sqrt{(x-4)^2+y^2}=2\sqrt{(x-1)^2+y^2}\Leftrightarrow$$

$$x^2-8x+16+y^2=4\left(x^2-2x+1+y^2\right)\Leftrightarrow x^2-\cancel{8x}+16+y^2=4x^2-\cancel{8x}+4-4y^2\Leftrightarrow$$

$$3x^2+3y^2=12\Leftrightarrow x^2+y^2=4$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ=2.

Β2. α) $|z_1|=2\Leftrightarrow|z_1|^2=4\Leftrightarrow z_1\bar z_1=4\Leftrightarrow\bar z_1=\dfrac{4}{z_1}$. Όμοια $\bar z_2=\dfrac{4}{z_2}$

$$\bar w=\frac{2\bar z_1}{\bar z_2}+\frac{2\bar z_2}{\bar z_1}=\frac{\frac{8}{z_1}}{\frac{4}{z_2}}+\frac{\frac{8}{z_2}}{\frac{4}{z_1}}=\frac{\cancelto{2}{8}z_2}{\cancel{4}z_1}+\frac{\cancelto{2}{8}z_1}{\cancel{4}z_2}=\frac{2z_2}{z_1}+\frac{2z_1}{z_2}=w\Leftrightarrow w\in\mathbb{R}$$

β΄ τρόπος:

$w \in \mathbb{R} \Leftrightarrow w = \bar{w} \Leftrightarrow \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} = \frac{2\bar{z}_1}{\bar{z}_2} + \frac{2\bar{z}_2}{\bar{z}_1} \Leftrightarrow 2|z_1|^2 z_1\bar{z}_2 + 2|z_2|^2 \bar{z}_1 z_2 = 2|z_2|^2 \bar{z}_1 z_2 + 2|z_1|^2 z_1\bar{z}_2$ ισχύει

β) $|w| = \left|\frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1}\right| \le \left|\frac{2z_1}{z_2}\right| + \left|\frac{2z_1}{z_2}\right| = \frac{2|z_1|}{|z_2|} + \frac{2|z_2|}{|z_1|} = \frac{2\cdot 2}{2} + \frac{2\cdot 2}{2} = 2+2 = 4 \Leftrightarrow |w| \le 4 \Leftrightarrow -4 \le w \le 4$

2ος τρόπος

Αν $z_1 = x_1 + y_1 i,\ z_2 = x_2 + y_2 i,\ x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$ με αντίστοιχες εικόνες $\mathrm{A}(z_1), B(z_2)$ έχουμε

$z_1\bar{z}_2 = (x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i) = x_1x_2 + y_1y_2 + (y_1x_2 - x_1y_2)i$

$$w = 2\left(\frac{z_2}{z_1} + \frac{z_1}{z_2}\right) = 2\left(\frac{z_2}{z_1} + \frac{\frac{\cancel{4}}{\bar{z}_1}}{\frac{\cancel{4}}{\bar{z}_2}}\right) = 2\left(\frac{z_2}{z_1} + \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1}\right) = 2\frac{\bar{z}_1 z_2 + z_1\bar{z}_2}{|z_1|^2} = \cancel{2}\frac{\cancel{2}\,\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)}{\cancel{4}} = x_1x_2 + y_1y_2$$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|\cdot \sigma\upsilon\nu(\mathrm{A\hat{O}B}) = 4\sigma\upsilon\nu(\mathrm{A\hat{O}B}) \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 4\sigma\upsilon\nu(\mathrm{A\hat{O}B})$.

$-1 \le \sigma\upsilon\nu(\mathrm{A\hat{O}B}) \le 1 \Leftrightarrow -4 \le 4\sigma\upsilon\nu(\mathrm{A\hat{O}B}) \le 4 \Leftrightarrow -4 \le |w| \le 4 \overset{w\in\mathbb{R}}{\Leftrightarrow} -4 \le w \le 4$

Β3. $w = -4 \Leftrightarrow \frac{\cancel{2}z_1}{z_2} + \frac{\cancel{2}z_2}{z_1} = -\cancel{4} \overset{\cancel{2}\cdot z_1\cdot z_2}{\Leftrightarrow} z_1^2 + z_2^2 = -2z_1z_2 \Leftrightarrow z_1^2 + z_2^2 + 2z_1z_2 = 0 \Leftrightarrow$

$(z_1 + z_2)^2 = 0 \Leftrightarrow z_1 + z_2 = 0 \Leftrightarrow z_1 = -z_2$.

Άρα $A(z_1), B(-z_1), \Gamma(2\mathrm{i}z_1)$ και

$(\mathrm{B\Gamma}) = |-z_1 - 2iz_1| = |z_1(-1-2i)| = |z_1||-1-2i| = |z_1|\cdot\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{5}$

$(\mathrm{A\Gamma}) = |z_1 - 2iz_1| = |z_1(1-2i)| = |z_1||1-2i| = |z_1|\cdot\sqrt{1^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{5}$.

Άρα $(\mathrm{B\Gamma}) = (\mathrm{A\Gamma})$ οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

β΄τρόπος

Αν $z_1 = x_1 + y_1 i, x_1, y_1 \in \mathbb{R}$ τότε $A(x_1, y_1), B(-x_1, -y_1), \Gamma(-2y_1, 2x_1)$.

$(\mathrm{A\Gamma}) = \sqrt{(x_1 + 2y_1)^2 + (y_1 - 2x_1)^2} = \sqrt{x_1^2 + 4y_1^2 \cancel{+4x_1y_1} + 4x_1^2 + y_1^2 \cancel{-4x_1y_1}} = \sqrt{5(x_1^2 + y_1^2)} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$(\mathrm{B\Gamma}) = \sqrt{(2y_1 - x_1)^2 + (-2x_1 - y_1)^2} = \sqrt{x_1^2 + 4y_1^2 \cancel{-4x_1y_1} + 4x_1^2 + y_1^2 \cancel{+4x_1y_1}} = \sqrt{5(x_1^2 + y_1^2)} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Άρα (ΑΓ)=(ΒΓ) οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $x^2 + 1 \ne 0 \Rightarrow A_f = (-\infty, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2+1) - e^x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x(x^2 - 2x + 1)}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$$

$f'(x) > 0$ για $x \ne 1$ επομένως η $f \nearrow$ στο $\mathbb{R}$ αφού η f είναι συνεχής στο 1.

Το σύνολο τιμών της f είναι το $f(A) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = (0, +\infty)$

αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty} e^x\cdot\frac{1}{x^2+1}=0\cdot 0=0$ και

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2+1}\underset{D.L.H}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}\underset{D.L.H}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty$$

Γ2. $f\left(e^{3-x}\cdot\left(x^2+1\right)\right)=\frac{e^2}{5}=f(2)\overset{f\nearrow \text{ και } 1-1}{\Leftrightarrow} e^{3-x}\cdot\left(x^2+1\right)=2\Leftrightarrow\frac{e^3}{e^x}=\frac{2}{x^2+1}\Leftrightarrow$

$\frac{e^3}{2}=\frac{e^x}{x^2+1}\Leftrightarrow f(\mathrm{x})=\frac{e^3}{2}$

Ο αριθμός $\frac{e^3}{2}\in f(A)$ άρα υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=\frac{e^3}{2}$.

Το x_0 μοναδικό αφού η f είναι 1-1.

β΄τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\mathrm{h}(\mathrm{x})=\mathrm{f}\left(\mathrm{e}^{3-\mathrm{x}}\cdot\left(\mathrm{x}^2+1\right)\right)-\frac{\mathrm{e}^2}{5},\ \ \mathrm{x}\in\mathbb{R}$. Είναι

$\mathrm{h}'(\mathrm{x})=\mathrm{f}'\left(\mathrm{e}^{3-\mathrm{x}}\cdot\left(\mathrm{x}^2+1\right)\right)\cdot\left(\mathrm{e}^{3-\mathrm{x}}\cdot\left(\mathrm{x}^2+1\right)\right)'=\mathrm{f}'\left(\mathrm{e}^{3-\mathrm{x}}\cdot\left(\mathrm{x}^2+1\right)\right)\left(-\mathrm{e}^{3\mathrm{x}}\right)\left(\mathrm{x}-1\right)^2<0$

για κάθε $\mathrm{x}\neq 1$ και επειδή η h είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα (↘) στο $\mathbb{R}$.

Έστω $\mathrm{s}(\mathrm{x})=\mathrm{e}^{3-\mathrm{x}}\cdot\left(\mathrm{x}^2+1\right),\ \mathrm{x}\in\mathbb{R}$. Είναι

$\mathrm{s}'(\mathrm{x})=-\mathrm{e}^{3-x}\left(x^2+1\right)+2\mathrm{e}^{3-x}x=-\mathrm{e}^{3-x}\left(x-1\right)^2<0$ για κάθε $\mathrm{x}\neq 1$ και επειδή

η s είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα (↘) στο $\mathbb{R}$.

Είναι $\lim\limits_{\mathrm{x}\to-\infty}\mathrm{s}(\mathrm{x})=\lim\limits_{\mathrm{x}\to-\infty}\left[\mathrm{e}^{3-\mathrm{x}}\cdot\left(\mathrm{x}^2+1\right)\right]=+\infty$ (από το Γ1) και

$\lim\limits_{\mathrm{x}\to+\infty}\mathrm{s}(\mathrm{x})=\lim\limits_{\mathrm{x}\to+\infty}\frac{\mathrm{x}^2+1}{\mathrm{e}^{\mathrm{x}-3}}\underset{\mathrm{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{\mathrm{x}\to+\infty}\frac{2\mathrm{x}}{\mathrm{e}^{\mathrm{x}-3}}\underset{\mathrm{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{\mathrm{x}\to+\infty}\frac{2}{\mathrm{e}^{\mathrm{x}-3}}=0$ (από το Γ1), άρα $\mathrm{s}(\mathrm{A})=(0,+\infty)$

Είναι $\mathrm{f}\left((0,+\infty)\right)=\left(\lim\limits_{\mathrm{x}\to 0^+}\mathrm{f}(\mathrm{x}),\lim\limits_{\mathrm{x}\to+\infty}\mathrm{f}(\mathrm{x})\right)=(1,+\infty)$

Επειδή $\frac{\mathrm{e}^2}{5}\in(1,+\infty)$, υπάρχει $\mathrm{x}_1\in(0,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $\mathrm{f}\left(\mathrm{e}^{3-\mathrm{x}_1}\cdot\left(\mathrm{x}_1^2+1\right)\right)=\frac{\mathrm{e}^2}{5}$ και επειδή η h είναι γνησίως φθίνουσα, το x_1 είναι μοναδικό.

Γ3. Για κάθε $t\in[2x,4x]$ είναι $2x\le t\le 4x\overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(t)\le f(4x)$ και επειδή η ισότητα δεν ισχύει για κάθε $t\in[2x,4x]$, έχουμε: $\int_{2x}^{4x} f(t)dt<\int_{2x}^{4x} f(4\mathrm{x})dt\Leftrightarrow$

$\int_{2x}^{4x} f(t)dt<f(4\mathrm{x})\int_{2x}^{4x}dt\Leftrightarrow\int_{2x}^{4x} f(t)dt<f(4\mathrm{x})[t]_{2x}^{4x}\Leftrightarrow\int_{2x}^{4x} f(t)dt<2xf(4\mathrm{x})$.

2ος τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\int_1^x f(t)dt,\ x\in(0,+\infty)$.

Για την h ισχύει το Θ.Μ.Τ στο $[2x,4x]$,οπότε υπάρχει $\xi\in(2x,4x)$ τέτοιο ώστε

$$h'(\xi)=\frac{h(4x)-h(2x)}{4x-2x}=\frac{\int_1^{4x} f(t)dt-\int_1^{2x} f(t)dt}{2x}=\frac{\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{2x}\Leftrightarrow f(\xi)=\frac{\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{2x}$$

$$2x<\xi<4x\overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(\xi)<f(4x)\Leftrightarrow\frac{\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{2x}<f(4x)\Leftrightarrow\int_{2x}^{4x} f(t)dt<2x\cdot f(4x)$$

Γ4. Η g συνεχής στο $(0,+\infty)$ αφού η f συνεχής ....

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_1^{4x} f(t)dt-\int_1^{2x} f(t)dt}{x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{D.L.H}{=}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{4f(4x)-2f(2x)}{1}=4f(0)-2f(0)=2=g(0)$$. Άρα η g συνεχής στο $[0,+\infty)$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$με: $g'(x)=\dfrac{(4f(4x)-2f(2x))\cdot x-\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{x^2}$

Είναι $\int_{2x}^{4x} f(t)dt<2xf(4x)\Leftrightarrow-\int_{2x}^{4x} f(t)dt>-2xf(4x)$ και για κάθε $x>0\Rightarrow 2x<4x\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(2x)<f(4x)$

Άρα $g'(x)>\dfrac{2(2f(4x)-f(2x))\cdot x-2xf(4x)}{x^2}=\dfrac{2\cancel{x}(f(4x)-f(2x))}{x^{\cancel{2}}}=\dfrac{2(f(4x)-f(2x))}{x}>0\Leftrightarrow$

$g'(x)>0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο 0, είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x)\left[e^{f(x)}+e^{-f(x)}\right]=2\Leftrightarrow f'(x)e^{f(x)}+f'(x)e^{-f(x)}=2\Leftrightarrow$

$\left(e^{f(x)}-e^{-f(x)}\right)'=(2x)'\Leftrightarrow e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x+c, c\in\mathbb{R}$.(1) $(1)\overset{x=0}{\Rightarrow} c=0$ οπότε $e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x\overset{\cdot e^{f(x)}}{\Leftrightarrow}$

$\left(e^{f(x)}\right)^2-1=2xe^{f(x)}\Leftrightarrow\left(e^{f(x)}\right)^2-2xe^{f(x)}=1\Leftrightarrow$

$\left(e^{f(x)}\right)^2-2xe^{f(x)}+x^2=x^2+1\Leftrightarrow\left(e^{f(x)}-x\right)^2=x^2+1\neq 0$ (2)

Η συνάρτηση $a(x)=e^{f(x)}-x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $a(x)\neq 0$ οπότε η α διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επειδή $a(0)=1>0$ η α(x)>0 οπότε

$(2)\Rightarrow e^{f(x)}-x=\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow e^{f(x)}=x+\sqrt{x^2+1}$ (3)

Είναι $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x|\Leftrightarrow-\sqrt{x^2+1}<x<\sqrt{x^2+1}\Rightarrow x+\sqrt{x^2+1}>0$ (2)

Η (3) γίνεται $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

β΄ τρόπος

$\left(e^{f(x)}\right)^2-2xe^{f(x)}-1=0$ Θέτω $e^{f(x)}=\omega>0$, τότε $\omega^2-2x\omega-1=0$. Είναι $\Delta=4x^2+4>0$, άρα

$\omega_{1,2}=x\pm\sqrt{x^2+1}$

Από τη σχέση (1) είναι $x-\sqrt{x^2+1}<0$, και επειδή $e^{f(x)}=\omega>0$, είναι

$\omega=e^{f(x)}=x+\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

Δ2. α) $f'(x)=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\dfrac{1}{\cancel{x+\sqrt{x^2+1}}}\cdot\dfrac{\cancel{x+\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$f''(x)=-\dfrac{1}{x^2+1}\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=-\dfrac{x}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}$.

$f''(x)\geq 0\Leftrightarrow -\dfrac{x}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}\geq 0\Leftrightarrow x\leq 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	−
$f(x)$	$\cup$		$\cap$

Σ.Κ.

Για κάθε $x<0$ είναι $f''(x)>0$, άρα η f είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$ και για κάθε $x>0$ είναι $f''(x)<0$ άρα η f είναι κοίλη στο $[0,+\infty)$.Παρουσιάζει σημείο καμπής το $(0,f(0))$ δηλαδή την αρχή των αξόνων.

β) $E=\int_0^1|x-f(x)|dx$.Η εφαπτομένη της f στο 0 είναι η $y=x$.

Επειδή η f είναι κοίλη στο $[0,+\infty)$ είναι $f(x)\leq x\Leftrightarrow f(x)-x\leq 0$.

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E=\int_0^1(x-f(x))\,dx=\int_0^1 xdx-\int_0^1 f(x)dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1-\int_0^1 x'f(x)dx=$$

$$\frac{1}{2}-[xf(x)]_0^1+\int_0^1 xf'(x)dx=\frac{1}{2}-f(1)+\int_0^1 x\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\frac{1}{2}-\ln(1+\sqrt{2})+\left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1=$$

$$\frac{1}{2}-\ln(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}-1=\sqrt{2}-\frac{1}{2}-\ln(1+\sqrt{2}).$$

Δ3. $x>0\overset{f\nearrow}{\Rightarrow}f(x)>f(0)=0$

$$\lim_{x\to0^+}\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)\cdot\ln|f(x)|\right]=\lim_{x\to0^+}\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)\cdot\ln f(x)\right]=$$

$$\lim_{x\to0^+}\left[\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1}{f(x)}\cdot\left(f(x)\ln f(x)\right)\right]=0\cdot0=0$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1}{f(x)}\underset{D.L.H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}\cdot f^2(x)}{f'(x)}=\frac{0\cdot0}{1}=0$$

$$\lim_{x\to0^+}\left(\ln f(x)\cdot f(x)\right)\underset{x\to0^+\Rightarrow u\to0^+}{\overset{u=f(x)}{=}}\lim_{x\to0^+}(\ln u\cdot u)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln u}{\frac{1}{u}}\underset{D.L.H}{\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{\cancel{u}}}{-\frac{1}{u^{\cancel{2}}}}=\lim_{x\to0^+}(-u)=0\ .$$

β΄ τρόπος:

$$\lim_{x\to0^+}\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)\ln f(x)\right]=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln f(x)}{\dfrac{1}{e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1}}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to0^+}\frac{\dfrac{f'(x)}{f(x)}}{-\dfrac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}f^2(x)}{\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)^2}}=\lim_{x\to0^+}\frac{-f'(x)\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)^2}{f^3(x)e^{\int_0^x f^2(t)dt}}=$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{f'(x)}{e^{\int_0^x f^2(t)dt}}\cdot\frac{\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)^2}{f^3(x)}\right)=-\frac{f'(0)}{1}\cdot 0=0 \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)^2}{f^3(x)}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\frac{2\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)e^{\int_0^x f^2(t)dt}\cancel{f^2(x)}}{3\cancel{f^2(x)}f'(x)}=0$$

Δ4. Θεωρούμε $h(x)=(x-2)\left(1-3\int_0^{x-2}f(t^2)dt\right)+(x-3)\left(8-3\int_0^x f^2(t)dt\right)$.

Η f συνεχής στο [2,3] σαν πράξεις συνεχών.....

$h(2)=-8+3\int_0^2 f^2(t)dt<0$ αφού

$$f(t)\le t, x\in[0,+\infty)\Rightarrow f^2(t)\le t^2\Rightarrow\int_0^x f^2(t)dt<\int_0^x t^2dt\Leftrightarrow$$

$$3\int_0^x f^2(t)dt<3\int_0^x t^2dt\Leftrightarrow 3\int_0^x f^2(t)dt<3\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x\Leftrightarrow 3\int_0^x f^2(t)dt<x^3\overset{x=2}{\Rightarrow}$$

$$3\int_0^2 f^2(t)dt<8\Leftrightarrow -8+3\int_0^2 f^2(t)dt<0$$

$h(3)=1-3\int_0^1 f(t^2)dt>0$ αφού

$$f(\mathrm{x})\le x, x\in[0,+\infty)\Rightarrow f\left(t^2\right)\le t^2\Rightarrow\int_0^1 f\left(t^2\right)dt<\int_0^1 t^2dt\Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 f\left(t^2\right)dt<\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1\Leftrightarrow\int_0^1 f\left(t^2\right)dt<\frac{1}{3}\Leftrightarrow 3\int_0^1 f\left(t^2\right)dt<1\Leftrightarrow 1-3\int_0^1 f\left(t^2\right)dt>0$$

Άρα ισχύει το θεώρημα Bolzano δηλαδή υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(2,3)$ τέτοιο ώστε

$$h(\xi)=0\Leftrightarrow(\xi-2)\left(1-3\int_0^{\xi-2}f(t^2)dt\right)+(\xi-3)\left(8-3\int_0^{\xi}f^2(t)dt\right)=0\overset{:(\xi-2)(\xi-3)}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{1-3\int_0^{\xi-2}f(t^2)dt}{\xi-3}+\frac{8-3\int_0^{\xi}f^2(t)dt}{\xi-2}=0.$$