

Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες

1. Για κάθε γωνία ω ισχύει ότι:

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\nu^2\omega = 1$$

Απόδειξη

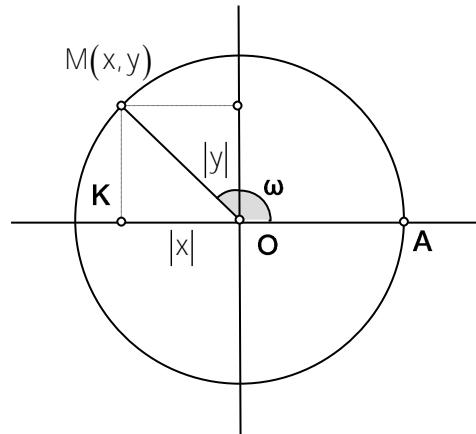
Εστω $M(x, y)$ το σημείο στο οποίο τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο η τελική πλευρά της γωνίας ω . Τότε $x = \sigma\nu\omega$ και $y = \eta\mu\omega$.

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο OKM , έχουμε: $OK^2 + KM^2 = OM^2 \Leftrightarrow$

$$|x|^2 + |y|^2 = 1^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\sigma\nu^2\omega + \eta\mu^2\omega = 1$$



$$2. \varepsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\nu\omega} \text{ και } \sigma\phi\omega = \frac{\sigma\nu\omega}{\eta\mu\omega}$$

Απόδειξη

Από τον ορισμό της εφαπτομένης είναι: $\varepsilon\phi\omega = \frac{y}{x}$, όμως $y = \eta\mu\omega$ και $x = \sigma\nu\omega$, άρα

$$\varepsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\nu\omega}, \quad \sigma\nu\omega \neq 0.$$

$$\text{Όμοια } \sigma\phi\omega = \frac{x}{y} = \frac{\sigma\nu\omega}{\eta\mu\omega}, \quad \eta\mu\omega \neq 0.$$

3. Αν $\eta\mu\omega \neq 0$ και $\sigma\nu\omega \neq 0$, τότε $\varepsilon\phi\omega \cdot \sigma\phi\omega = 1$.

Απόδειξη

$$\varepsilon\phi\omega \cdot \sigma\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\nu\omega} \cdot \frac{\sigma\nu\omega}{\eta\mu\omega} = 1.$$

Από την τελευταία ταυτότητα προκύπτει ότι: $\varepsilon\phi\omega = \frac{1}{\sigma\phi\omega}$ και $\sigma\phi\omega = \frac{1}{\varepsilon\phi\omega}$.

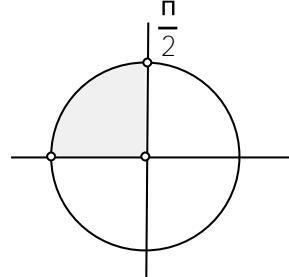
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

30. Αν $\eta\mu x = \frac{4}{5}$ και $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, να βρεθούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας x rad.

Λύση

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \eta\mu^2 x + \sigma\mu v^2 x = 1 &\Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \sigma\mu v^2 x = 1 \Leftrightarrow \frac{16}{25} + \sigma\mu v^2 x = 1 \Leftrightarrow \\ \sigma\mu v^2 x = 1 - \frac{16}{25} &= \frac{9}{25} \Leftrightarrow \sigma\mu v x = \pm \sqrt{\frac{9}{25}} = \pm \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Επειδή $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ η γωνία x βρίσκεται στο 2o τεταρτημόριο
όπου το συνημίτονο είναι αρνητικό, οπότε $\sigma\mu v x = -\frac{3}{5}$.



$$\text{Είναι } \varepsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\mu v x} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3} \text{ και } \sigma\phi x \cdot \varepsilon\phi x = 1 \Leftrightarrow \sigma\phi x = \frac{1}{-\frac{4}{3}} = -\frac{3}{4}.$$

31. Αν $\varepsilon\phi x = \frac{3}{4}$ και $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, να βρεθούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας x rad.

Λύση

$$\text{Είναι } \sigma\phi x = \frac{1}{\varepsilon\phi x} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}.$$

$$\varepsilon\phi x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{\sigma\mu v x} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \eta\mu x = \frac{3}{4} \sigma\mu v x \quad (1).$$

$$\text{Είναι } \eta\mu^2 x + \sigma\mu v^2 x = 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{4} \sigma\mu v x\right)^2 + \sigma\mu v^2 x = 1 \Leftrightarrow$$

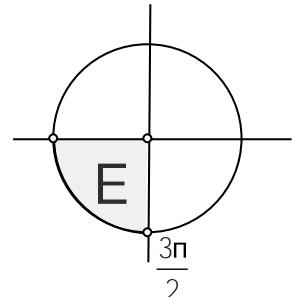
$$\frac{9}{16} \sigma\mu v^2 x + \sigma\mu v^2 x = 1 \Leftrightarrow 9\sigma\mu v^2 x + 16\sigma\mu v^2 x = 16 \Leftrightarrow$$

$$25\sigma\mu v^2 x = 16 \Leftrightarrow \sigma\mu v^2 x = \frac{16}{25} \Leftrightarrow \sigma\mu v x = \pm \sqrt{\frac{16}{25}} = \pm \frac{4}{5}.$$

Επειδή $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, η γωνία x βρίσκεται στο 3o τεταρτημόριο

όπου το συνημίτονο είναι αρνητικό, άρα $\sigma\mu v x = -\frac{4}{5}$.

Τότε από τη σχέση (1) προκύπτει ότι: $\eta\mu x = \frac{3}{4} \left(-\frac{4}{5} \right) = -\frac{3}{5}$.



32. Να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας x για την οποία ισχύει ότι:

$$\varepsilon\phi x = 9\sigma\phi x \text{ και } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Λύση

$$\text{Είναι } \varepsilon\phi x = 9\sigma\phi x \Leftrightarrow \varepsilon\phi x = 9 \cdot \frac{1}{\varepsilon\phi x} \Leftrightarrow \varepsilon\phi^2 x = 9 \Leftrightarrow \varepsilon\phi x = \pm 3.$$

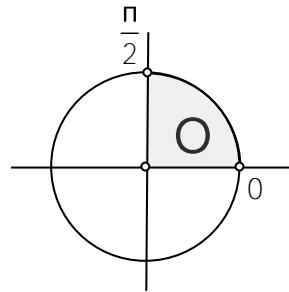
Επειδή $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $\varepsilon\phi x > 0$, άρα $\varepsilon\phi x = 3$.

$$\text{Τότε } \sigma\phi x = \frac{1}{\varepsilon\phi x} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Είναι } \varepsilon\phi x = 3 \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon x} = 3 \Leftrightarrow \eta\mu x = 3\sigma\upsilon x \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon^2 x = 1 &\Rightarrow (3\sigma\upsilon x)^2 + \sigma\upsilon^2 x = 1 \Leftrightarrow 9\sigma\upsilon^2 x + \sigma\upsilon^2 x = 1 \Leftrightarrow 10\sigma\upsilon^2 x = 16 \Leftrightarrow \\ \sigma\upsilon^2 x = \frac{16}{10} &\Leftrightarrow \sigma\upsilon x = \pm \sqrt{\frac{16}{10}} = \pm \frac{4}{\sqrt{10}} = \pm \frac{4\sqrt{10}}{10} = \pm \frac{2\sqrt{10}}{5}. \end{aligned}$$

$$\text{Επειδή } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ είναι } \sigma\upsilon x > 0, \text{ άρα } \sigma\upsilon x = \frac{2\sqrt{10}}{5} \text{ και τότε } \eta\mu x = 3 \frac{2\sqrt{10}}{5} = \frac{6\sqrt{10}}{5}.$$



$$33. \text{ Αν } 4\eta\mu x + 3\sigma\upsilon x = 5 \text{ και } 0 < x < \frac{\pi}{2}, \text{ να υπολογιστεί } \eta\mu x.$$

Λύση

$$\text{Επειδή } 0 < x < \frac{\pi}{2}, \text{ η γωνία } x \text{ βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο οπότε } \sigma\upsilon x \neq 0.$$

Διαιρούμε όλους τους όρους της σχέσης $4\eta\mu x + 3\sigma\upsilon x = 5$ με $\sigma\upsilon x$ έχοντας σκοπό να εμφανίσουμε $\varepsilon\phi x$.

$$\text{Είναι: } 4\eta\mu x + 3\sigma\upsilon x = 5 \Leftrightarrow 4 \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon x} + 3 \frac{\sigma\upsilon x}{\sigma\upsilon x} = \frac{5}{\sigma\upsilon x} \Leftrightarrow 4\varepsilon\phi x + 3 = \frac{5}{\sigma\upsilon x}$$

$$\text{Υψώνοντας στο τετράγωνο έχουμε: } (4\varepsilon\phi x + 3)^2 = \left(\frac{5}{\sigma\upsilon x}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$16\varepsilon\phi^2 x + 24\varepsilon\phi x + 9 = 25 \frac{1}{\sigma\upsilon^2 x} \Leftrightarrow$$

$$16\varepsilon\phi^2 x + 24\varepsilon\phi x + 9 = 25 \frac{\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon^2 x}{\sigma\upsilon^2 x} \Leftrightarrow$$

$$16\varepsilon\phi^2 x + 24\varepsilon\phi x + 9 = 25 \left(\frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon^2 x} + \frac{\sigma\upsilon^2 x}{\sigma\upsilon^2 x} \right) \Leftrightarrow$$

$$16\varepsilon\phi^2 x + 24\varepsilon\phi x + 9 = 25(\varepsilon\phi^2 x + 1) \Leftrightarrow$$

$$16\varepsilon\phi^2 x + 24\varepsilon\phi x + 9 = 25\varepsilon\phi^2 x + 25 \Leftrightarrow$$

$$9\varepsilon\phi^2 x - 24\varepsilon\phi x + 16 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(3\varepsilon\phi x - 4)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$3\varepsilon\phi x - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\phi x = \frac{4}{3}$$

34. Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού λ για τις οποίες υπάρχει γωνία x για την οποία ισχύει:

$$a) \eta\mu x = \frac{\lambda+2}{\lambda+4} \text{ και } \sigma uv x = \frac{\lambda}{\lambda+4}$$

$$\beta) \varepsilon\phi x = \frac{\lambda}{\lambda+2} \text{ και } \sigma\phi x = \frac{2\lambda}{1-\lambda}$$

Λύση

$$a) \text{Αρχικά πρέπει να ορίζονται τα κλάσματα } \frac{\lambda+2}{\lambda+4} \text{ και } \frac{\lambda}{\lambda+4} \text{ οπότε πρέπει:}$$

$$\lambda+4 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq -4.$$

Επειδή υπάρχει γωνία x ισχύει η πρώτη βασική ταυτότητα, δηλαδή:

$$\eta\mu^2 x + \sigma uv^2 x = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{\lambda+2}{\lambda+4}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{\lambda+4}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{(\lambda+2)^2}{(\lambda+4)^2} + \frac{\lambda^2}{(\lambda+4)^2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$(\lambda+2)^2 + \lambda^2 = (\lambda+4)^2 \Leftrightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 4 + \lambda^2 = \lambda^2 + 8\lambda + 16 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda = 6 \text{ ή } \lambda = -2.$$

$$\beta) \text{Αρχικά πρέπει να ορίζονται τα κλάσματα } \frac{\lambda}{\lambda+2} \text{ και } \frac{2\lambda}{1-\lambda}, \text{ οπότε πρέπει:}$$

$$\lambda+2 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq -2 \text{ και } 1-\lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1.$$

Επειδή υπάρχει γωνία x ισχύει ότι: $\varepsilon\phi x \cdot \sigma\phi x = 1 \Leftrightarrow$

$$\frac{\lambda}{\lambda+2} \cdot \frac{2\lambda}{1-\lambda} = 1 \Leftrightarrow \frac{2\lambda^2}{\lambda-\lambda^2+2-2\lambda} = 1 \Leftrightarrow 2\lambda^2 = -\lambda^2 - \lambda + 2 \Leftrightarrow 3\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

Η τελευταία είναι εξίσωση δευτέρου βαθμού με $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 25$ και ρίζες

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{6} \Leftrightarrow \lambda = -1 \text{ ή } \lambda = \frac{2}{3}.$$

35. Να αποδειχτεί ότι:

$$a) \frac{\eta\mu x}{1-\sigma uv x} = \frac{1+\sigma uv x}{\eta\mu x}$$

$$\beta) \sigma uv^4 x - \eta\mu^4 x = 2\sigma uv^2 x - 1$$

$$\gamma) \frac{\eta\mu x}{1+\sigma uv x} + \frac{1+\sigma uv x}{\eta\mu x} = \frac{2}{\eta\mu x}$$

Λύση

$$a) \frac{\eta\mu x}{1-\sigma uv x} = \frac{1+\sigma uv x}{\eta\mu x} \Leftrightarrow \eta\mu^2 x = (1-\sigma uv x)(1+\sigma uv x) \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu^2 x = 1 - \sigma uv^2 x \Leftrightarrow \eta\mu^2 x + \sigma uv^2 x = 1 \text{ που ισχύει.}$$

$$\beta) \sigma uv^4 x - \eta\mu^4 x = (\sigma uv^2 x)^2 - (\eta\mu^2 x)^2 = (\sigma uv^2 x - \eta\mu^2 x)(\sigma uv^2 x + \eta\mu^2 x) \Leftrightarrow$$

$$\sigma uv^4 x - \eta\mu^4 x = [\sigma uv^2 x - (1-\eta\mu^2 x)] \cdot 1 = \sigma uv^2 x - 1 + \sigma uv^2 x = 2\sigma uv^2 x - 1$$

$$\gamma) \frac{\eta\mu x}{1+\sigma uv x} + \frac{1+\sigma uv x}{\eta\mu x} = \frac{\eta\mu^2 x + (1+\sigma uv x)^2}{(1+\sigma uv x)\eta\mu x} = \frac{\eta\mu^2 x + 1 + 2\sigma uv x + \sigma uv^2 x}{(1+\sigma uv x)\eta\mu x} =$$

$$= \frac{1+1+2\sigma uv x}{(1+\sigma uv x)\eta\mu x} = \frac{2+2\sigma uv x}{(1+\sigma uv x)\eta\mu x} = \frac{2\underline{(1+\sigma uv x)}}{\underline{(1+\sigma uv x)}\eta\mu x} = \frac{2}{\eta\mu x}$$

36. Να αποδειχτεί ότι:

$$a) (\eta\mu x - \varepsilon\phi x)^2 + (\sigma uv x - 1)^2 = \left(1 - \frac{1}{\sigma uv x}\right)^2$$

$$\beta) \frac{\sigma uv^3 x}{\eta\mu x} + \frac{\varepsilon\phi x}{1+\varepsilon\phi^2 x} = \sigma\phi x$$

Λύση

α) Αρχικά θα αντικαταστήσουμε την εφχ γιατί δεν χρειάζεται στο β μέλος. Είναι:

$$\begin{aligned}
 (\eta\mu x - \varepsilon\phi x)^2 + (\sigma u v x - 1)^2 &= \left(\eta\mu x - \frac{\eta\mu x}{\sigma u v x} \right)^2 + (\sigma u v x - 1)^2 = \\
 &= \left(\frac{\eta\mu x \cdot \sigma u v x - \eta\mu x}{\sigma u v x} \right)^2 + (\sigma u v x - 1)^2 = \\
 &= \left[\frac{\eta\mu x(\sigma u v x - 1)}{\sigma u v x} \right]^2 + (\sigma u v x - 1)^2 = \\
 &= \frac{\eta\mu^2 x(\sigma u v x - 1)^2}{\sigma u v^2 x} + (\sigma u v x - 1)^2 = (\sigma u v x - 1)^2 \left(\frac{\eta\mu^2 x}{\sigma u v^2 x} + 1 \right) = \\
 &= (\sigma u v x - 1)^2 \left(\frac{\eta\mu^2 x + \sigma u v^2 x}{\sigma u v^2 x} \right) = (\sigma u v x - 1)^2 \frac{1}{\sigma u v^2 x} = \\
 &= \frac{(\sigma u v x - 1)^2}{\sigma u v^2 x} = \left(\frac{\sigma u v x - 1}{\sigma u v x} \right)^2 = \left(\frac{\sigma u v x}{\sigma u v x} - \frac{1}{\sigma u v x} \right)^2 = \left(1 - \frac{1}{\sigma u v x} \right)^2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \beta) \frac{\sigma u v^3 x}{\eta\mu x} + \frac{\varepsilon\phi x}{1 + \varepsilon\phi^2 x} &= \frac{\sigma u v^3 x}{\eta\mu x} + \frac{\frac{\eta\mu x}{\sigma u v x}}{1 + \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma u v^2 x}} = \frac{\sigma u v^3 x}{\eta\mu x} + \frac{\frac{\eta\mu x}{\sigma u v x}}{\frac{\sigma u v^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma u v^2 x}} = \frac{\sigma u v^3 x}{\eta\mu x} + \frac{\frac{\eta\mu x}{\sigma u v x}}{\frac{1}{\sigma u v^2 x}} = \\
 &= \frac{\sigma u v^3 x}{\eta\mu x} + \frac{\eta\mu x \cdot \sigma u v^2 x}{\sigma u v x} = \frac{\sigma u v^3 x}{\eta\mu x} + \eta\mu x \cdot \sigma u v x = \frac{\sigma u v^3 x + \eta\mu^2 x \cdot \sigma u v x}{\eta\mu x} = \\
 &= \frac{\sigma u v x(\sigma u v^2 x + \eta\mu^2 x)}{\eta\mu x} = \frac{\sigma u v x \cdot 1}{\eta\mu x} = \sigma\phi x
 \end{aligned}$$

37. Να αποδειχτεί ότι $-\sqrt{5} \leq \sigma u v x + 2\eta\mu x \leq \sqrt{5}$.

Λύση

$$\begin{aligned}
 -\sqrt{5} \leq \sigma u v x + 2\eta\mu x \leq \sqrt{5} &\Leftrightarrow |\sigma u v x + 2\eta\mu x| \leq \sqrt{5} \Leftrightarrow |\sigma u v x + 2\eta\mu x|^2 \leq (\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow \\
 (\sigma u v x + 2\eta\mu x)^2 \leq 5 &\Leftrightarrow \sigma u v^2 x + 4\sigma u v x \cdot \eta\mu x + 4\eta\mu^2 x \leq 5 \Leftrightarrow \\
 \sigma u v^2 x + 4\sigma u v x \cdot \eta\mu x + 4\eta\mu^2 x - 5 &\leq 0 \quad (1)
 \end{aligned}$$

Επειδή πρέπει να καταλήξουμε σε προφανή αλήθεια και αυτό συνήθως γίνεται μέσω της ταυτόπτας $(\alpha \pm \beta)^2 \geq 0$, θα αντικαταστήσουμε το 5 χρησιμοποιώντας την βασική ταυτόπτη:

$$1 = \eta\mu^2 x + \sigma u v^2 x \Leftrightarrow 5 = 5\eta\mu^2 x + 5\sigma u v^2 x$$

Η σχέση (1) γίνεται: $\sigma u v^2 x + 4\sigma u v x \cdot \eta\mu x + 4\eta\mu^2 x - 5\eta\mu^2 x - 5\sigma u v^2 x \leq 0 \Leftrightarrow$

$$-4\sigma u v^2 x + 4\sigma u v x \cdot \eta\mu x - \eta\mu^2 x \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$4\sigma u v^2 x - 4\sigma u v x \cdot \eta\mu x + \eta\mu^2 x \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(2\sigma u v x)^2 - 2 \cdot 2\sigma u v x \cdot \eta\mu x + (\eta\mu x)^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(2\sigma u v x - \eta\mu x)^2 \geq 0 \text{ ισχύει}$$

ΕΞΑΣΚΗΣΗ

Α ΟΜΑΔΑ

38. Αν $\eta\mu x = \frac{12}{13}$ και $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x rad.

39. Αν $\sigma u v x = \frac{3}{5}$, $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x rad.

40. Αν $\epsilon \phi x = \frac{4}{3}$ και $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, να υπολογίσετε τη τιμή της παράστασης

$$A = \frac{3\sigma u v x - 4\eta\mu x}{\eta\mu x \cdot \sigma u v x}.$$

(Απ. $A = 0$)

41. Αν $\epsilon \phi x = 4\sigma \phi x$ και $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x .

42. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ για τις οποίες υπάρχει γωνία x για την οποία ισχύει ότι:

a) $\eta\mu x = \sqrt{\frac{\lambda+1}{2-\lambda}}$ και $\sigma u v x = \sqrt{\frac{3\lambda-2}{\lambda-4}}$

β) $\eta\mu x = \lambda + 1$ και $\sigma u v x = 2\lambda$

γ) $\eta\mu x = \frac{\lambda-1}{\lambda+2}$ και $\sigma u v x = \frac{\lambda+1}{\lambda+2}$

δ) $\epsilon \phi x = \frac{\lambda-1}{\lambda+2}$ και $\sigma \phi x = \frac{\lambda+2}{\lambda^2-3}$

(Απ. a) $\lambda = 0$ ή 1 , β) $\lambda = 0$ ή $-2/5$, γ) $\lambda = 2 \pm \sqrt{6}$, δ) $\lambda = 2$ ή -1)

43. Να αποδείξετε ότι:

α) $\epsilon \phi^2 x \cdot \sigma u v^2 x + \sigma \phi^2 x \cdot \eta\mu^2 x = 1$

β) $(\alpha \sigma u v x + \beta \eta\mu x)^2 + (\alpha \eta\mu x - \beta \sigma u v x)^2 = \alpha^2 + \beta^2$

γ) $\eta\mu^2 x \cdot \eta\mu^2 \omega + \sigma u v^2 x \cdot \eta\mu^2 \omega + \sigma u v^2 x \cdot \sigma u v^2 \omega + \eta\mu^2 x \cdot \sigma u v^2 \omega = 1$

44. Να αποδείξετε ότι:

α) $\sigma u v^2 x - \sigma u v^2 \omega = \eta\mu^2 \omega - \eta\mu^2 x$

β) $(\epsilon \phi x + \sigma \phi x)^2 = \frac{1}{\eta\mu^2 x} + \frac{1}{\sigma u v^2 x}$

45. Να αποδείξετε ότι:

α) $\epsilon \phi^2 x - \eta\mu^2 x = \epsilon \phi^2 x \cdot \eta\mu^2 x$

β) $\frac{1 - \epsilon \phi^2 x}{1 + \epsilon \phi^2 x} = \sigma u v^2 x - \eta\mu^2 x$

46. Να αποδείξετε ότι:

α) $\epsilon \phi^2 x + \sigma \phi^2 x + 2 = \frac{1}{\eta\mu^2 x \cdot \sigma u v^2 x}$

β) $\frac{\epsilon \phi x}{1 - \sigma \phi x} + \frac{\sigma \phi x}{1 - \epsilon \phi x} = \frac{1 + \eta\mu x \cdot \sigma u v x}{\eta\mu x \cdot \sigma u v x}$

47. Να αποδείξετε ότι: $\sigma u v^2 x \cdot \sigma u v^2 \omega - \eta \mu^2 x \cdot \eta \mu^2 \omega = \sigma u v^2 x + \sigma u v^2 \omega - 1$

48. Αν $K = \alpha \eta \mu x$ και $\Lambda = \beta \sigma u v x$, να αποδείξετε ότι: $(\beta K)^2 + (\alpha \Lambda)^2 = \alpha^2 \beta^2$.

49. Αν $A = \alpha \eta \mu x + \beta \sigma u v x$ και $B = \alpha \sigma u v x - \beta \eta \mu x$, να αποδείξετε ότι $A^2 + B^2 = \alpha^2 + \beta^2$.

50. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \left(\frac{1}{\sigma u v x} - \varepsilon \varphi x \right)^2 = \frac{1 - \eta \mu x}{1 + \eta \mu x}$$

$$\beta) \frac{1 - 3\eta \mu x}{1 + \eta \mu x} + \frac{2\eta \mu x - 1}{\sigma u v^2 x} = -3\varepsilon \varphi^2 x$$

51. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \frac{\sigma u v x}{1 - \varepsilon \varphi x} + \frac{\eta \mu^2 x}{\sigma u v x - \eta \mu x} = \sigma u v x + \eta \mu x \quad \beta) 2\eta \mu^4 x + \eta \mu^2 x \sigma u v^2 x - \sigma u v^4 x + 1 - 3\eta \mu^2 x = 0$$

52. Να αποδείξετε ότι: $\sigma u v^2 x + \sigma u v^2 \omega + 2\eta \mu x \cdot \eta \mu \omega \leq 2$.

Β ΟΜΑΔΑ

53. Αν $x \in \left(\frac{9\pi}{2}, 5\pi \right)$ και $16\sigma \varphi^2 x - 9 = 0$, να υπολογίσετε τη τιμή της παράστασης

$$A = \frac{1 + \varepsilon \varphi x}{\eta \mu x + \sigma u v x} \quad (\text{Απ. } -5/3)$$

54. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \eta \mu^4 x + \sigma u v^4 x - \eta \mu^6 x - \sigma u v^6 x - \eta \mu^2 x \cdot \sigma u v^2 x$ είναι σταθερή.

55. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω παραστάσεις είναι ανεξάρτητες του x .

$$\alpha) 1 - 2\eta \mu^2 x + (\sigma u v x - \eta \mu x)^2 + 2\eta \mu x(\sigma u v x + \eta \mu x)$$

$$\beta) \frac{1 + \sigma u v^2 x}{2 + \varepsilon \varphi^2 x} + \frac{1 + \eta \mu^2 x}{2 + \sigma \varphi^2 x}$$

$$\gamma) \eta \mu^2 x \cdot \sigma u v^2 x \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (1 + \eta \mu^2 x) \sigma u v^2 x}} + \frac{1}{\sqrt{1 - (1 + \sigma u v^2 x) \eta \mu^2 x}} \right)$$

56. Αν $3\eta \mu x + 4\sigma u v x = 5$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$, να υπολογίσετε την $\varepsilon \varphi x$. (Απ. 3/4)

57. Αν $3\sigma u v^2 x - \eta \mu^2 x = 0$ και $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x .

58. Να αποδείξετε ότι :

$$\alpha) \eta\mu x \cdot \sigma u v x \leq \frac{1}{2} \quad \beta) \varepsilon \varphi x + \sigma \varphi x \geq 2, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

59. Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x για τις οποίες να ισχύει: $\eta\mu x + \sigma u v x = 2$.

60. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \frac{1}{\sigma u v^2 x \cdot \eta \mu^2 x} - 4 = (\varepsilon \varphi x - \sigma \varphi x)^2$$

$$\beta) (\eta \mu^4 x + \sigma u v^4 x)(\varepsilon \varphi x + \sigma \varphi x)^2 = \varepsilon \varphi^2 x + \sigma \varphi^2 x$$

$$\gamma) \frac{\eta \mu^4 x + \eta \mu^2 x \cdot \sigma u v^2 x + \sigma u v^2 x}{\sigma u v^4 x + \eta \mu^2 x \cdot \sigma u v^2 x + \eta \mu^2 x} = 1$$

61. Αν $\varepsilon \varphi x + \sigma \varphi x = \lambda$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) \eta \mu x \cdot \sigma u v x$$

$$\beta) \varepsilon \varphi^2 x + \sigma \varphi^2 x$$

$$\gamma) |\eta \mu x + \sigma u v x|$$

$$\delta) \varepsilon \varphi^3 x + \sigma \varphi^3 x$$

$$(\text{Απ. } \alpha) 1/\lambda \quad \beta) \sqrt{\frac{\lambda+2}{\lambda}}$$

$$\gamma) \lambda^2 - 2 \quad \delta) \lambda^3 - 3\lambda$$

62. Αν $\varepsilon \varphi x = \lambda$, να υπολογίσετε τη παράσταση $\Pi = 3\eta \mu^2 x + 2\sigma u v^2 x - 5\eta \mu x \cdot \sigma u v x$

$$(\text{Απ. } \frac{(3\lambda-2)(\lambda-1)}{1+\lambda^2})$$

63. Αν $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, να αποδείξετε ότι $\sqrt{\frac{1}{\sigma u v^2 x} + 2\varepsilon \varphi x} = \varepsilon \varphi x + 1$.

64. Αν $\eta \mu x = \eta \mu \varphi \cdot \sigma u v \varphi$, να αποδείξετε ότι: $\sigma u v^2 x - 3\eta \mu^2 x = (\eta \mu^2 \varphi - \sigma u v^2 \varphi)^2$.

65. Να αποδείξετε ότι $-\sqrt{5} \leq 2\sigma u v x + \eta \mu x \leq \sqrt{5}$.

66. Αν ρ_1, ρ_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $(1 + \eta \mu \omega)x^2 - (1 + \eta \mu^2 \omega)x + (1 - \eta \mu \omega)\eta \mu \omega = 0$ με $\eta \mu \omega \neq -1$, να αποδείξετε ότι: $\rho_1 + \rho_2 + \rho_1 \rho_2 = 1$.