

## Εξισώσεις 2ου βαθμού

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

**α)**  $(3x-2)(x+5)=0$       **β)**  $2x(x-3)(x+1)=0$       **γ)**  $4x(4x-8)(x^2+4)=0$   
 $(\text{Απ.: } \alpha) \frac{2}{3}, -5, \beta) 0, 3, -1, \gamma) 0, 2)$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

**α)**  $x^2 + 7x = 0$       **β)**  $4x^2 - 9 = 0$       **γ)**  $9x^2 = 2x$   
**δ)**  $x^2 + \frac{6}{5}x = 0$       **ε)**  $4x^2 = 36$       **στ)**  $-3x^2 - 12 = 0$   
 $(\text{Απ.: } \alpha) 0, -7, \beta) \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \gamma) 0, \frac{2}{9}, \delta) 0, -\frac{6}{5}, \epsilon) 3, -3, \sigma) \text{αδύνατη})$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

**α)**  $(x-3)^2 = 81$       **β)**  $(x-1)^2 = 36$       **γ)**  $(x-5)^2 = 49$       **δ)**  $(3x+2)^2 = 64$   
 $(\text{Απ.: } i) -6, 12, ii) -5, 7, iii) -2, 12, iv) -\frac{10}{3}, 2)$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

**α)**  $5(x+3)^2 = 180$       **β)**  $\frac{(2x+3)^2}{4} = 25$   
 $(\text{Απ.: } \alpha) -9, 3, \beta) -\frac{13}{2}, \frac{7}{2})$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

**α)**  $x^2 + 6x + 9 = 0$       **β)**  $81x^2 - 18x + 1 = 0$       **γ)**  $49x^2 - 28x + 4 = 0$   
 $(\text{Απ.: } i) -3, ii) \frac{1}{9}, iii) \frac{2}{7})$

6. Να λύσετε τις εξισώσεις:

**α)**  $(9x^2 - 4)(x^2 - 16) = 0$       **β)**  $(3x+2)(x^2 - 36)(4 - 81x^2) = 0$   
**γ)**  $(x-1)^2(x^2 - 4)(x^2 + 2) = 0$       **δ)**  $(x^2 + 1)^2 + 1 = 0$   
 $(\text{Απ.: } i) \pm \frac{2}{3}, \pm 4, ii) -\frac{2}{3}, \pm 6, \pm \frac{2}{9}, iii) 1, \pm 2, iv) \text{αδύνατη})$

7. Να λύσετε τις εξισώσεις:

**α)**  $(2x-1)^2 = (3x-2)^2$       **β)**  $x^5 - x = 0$   
 $(\text{Απ.: } \alpha) 1, \frac{3}{5}, \beta) 0, \pm 1)$

8. Να λύσετε τις εξισώσεις:

**α)**  $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$       **β)**  $2x^3 - 4x^2 - 5x + 10 = 0$   
 $(\text{Απ.: } \alpha) \pm 1, \beta) 2, \pm \sqrt{\frac{5}{2}})$

9. Να λύσετε τις εξισώσεις:

**α)**  $x^2 - 9x + 18 = 0$       **β)**  $2x^2 + 5x - 3 = 0$       **γ)**  $x^2 - 2x - 80 = 0$       **δ)**  $4x^2 + 7x - 2 = 0$   
 $(\text{Απ.: } \alpha) 3, 6, \beta) -3, \frac{1}{2}, \gamma) -8, 10, \delta) -2, \frac{1}{4})$

10. Να λύσετε τις εξισώσεις:

**α)**  $4x^2 + 20x + 25 = 0$     **β)**  $2x^2 + 5x + 1 = 0$     **γ)**  $2x^2 - 3x + 7 = 0$     **δ)**  $5x^2 - 7x + 1 = 0$   
(Απ.: α)  $-\frac{5}{2}$ , β)  $\frac{-5 \pm \sqrt{17}}{4}$ , γ) αδύνατη, δ)  $\frac{7 \pm \sqrt{29}}{10}$ )

11. Να λύσετε τις εξισώσεις:

**α)**  $x^2 - 4\sqrt{3}x + 8 = 0$     **β)**  $x^2 - 6\sqrt{2}x + 9 = 0$   
(Απ.: α)  $2\sqrt{3} \pm 2$ , β)  $3\sqrt{2} \pm 3$ )

12. Να λύσετε τις εξισώσεις:

**α)**  $(x+1)^2 - (x-1)(x+2) = -2x(x-3)$     **β)**  $x(5x-1) = 3(5x-1) - 9$   
**γ)**  $4x^2 + (x+2)^2 = 4x(x+2)$     (Απ.: α) 1,  $\frac{3}{2}$ , β) 2,  $\frac{6}{5}$ , γ) 2)

13. Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα:

**α)**  $x^2 - 3x + 2$     **β)**  $x^2 - 2x - 3$     **γ)**  $x^2 + x - 6$     **δ)**  $3x^2 + 5x - 2$     **ε)**  $6x^2 - x - 1$

14. Να λύσετε τις εξισώσεις: α)  $(x+5)(x^2 - 10x + 9) = 0$     β)  $(4x^2 - 25)(x^2 - 8x + 7) = 0$   
(Απ.: i)  $-5, 1, 9$ , ii)  $\pm \frac{5}{2}, 1, 7$ )

15. Δίνεται η εξίσωση  $(\lambda - 1)x^2 - 5x + 2 = 0$ , όπου  $\lambda$  πραγματικός αριθμός. Να βρείτε την τιμή του  $\lambda$  για την οποία η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα.

(Απ.:  $\lambda = \frac{33}{8}$ )

16. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις κοινές λύσεις των εξισώσεων  $x^2 + 7x + 10 = 0$  και  $x^5 - 5x + 22 = 0$

17. Αν  $a \neq 0$  να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $ax^2 + 2x - (a-2) = 0$  έχει πραγματικές ρίζες.

18. Να προσδιορίσετε τον κέντρο, ώστε η εξίσωση  $x^2 - 2κx + κ^2 = 0$  να έχει ρίζα το 2 και στη συνέχεια να δείξετε ότι η ρίζα αυτή είναι διπλή.

(Απ.:  $\kappa = 2$ )

19. Να λύσετε την εξίσωση:  $(x^2 + 1)^2 - 7(x^2 + 1) + 10 = 0$   
(Απ.:  $\pm 1, \pm 2$ )

20. Για ποιες τιμές του  $\lambda$  η εξίσωση  $-x^2 + 9x + 2\lambda^2 - \lambda + 9 = 0$  έχει ρίζα το -1; Για καθεμιά από τις τιμές του  $\lambda$  που θα βρείτε να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

(Απ.:  $\lambda = 1$  ή  $\lambda = -\frac{1}{2}$ )

21. Να βρείτε τις τιμές των  $\kappa$ ,  $\lambda$  ώστε η εξίσωση  $3x^2 + (2\kappa - 1)x + \lambda + 4 = 0$  να έχει μοναδική λύση την  $x = 0$ .

(Απ.:  $\kappa = \frac{1}{2}$ ,  $\lambda = -4$ )

22. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

**α)**  $\kappa^2 x^2 - 2\lambda\kappa^2 + \lambda^2\kappa^2 - 1 = 0$ ,  $\kappa \neq 0$   
**β)**  $(\kappa^2 - \lambda^2)x^2 - 2(\kappa^2 + \lambda^2)x + \kappa^2 - \lambda^2 = 0$ ,  $\kappa \neq \pm \lambda$

γ)  $x^2 + (\sqrt{2} - 1)x - \sqrt{2} = 0$

(Απ.: α)  $\frac{\kappa\lambda \pm 1}{\kappa}$ , β)  $\frac{\kappa+\lambda}{\kappa-\lambda}$ , γ)  $\sqrt{2}, -1$ )

23. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α)  $(x+\kappa)(x-\lambda)+2\kappa\lambda=2x^2$

γ)  $2x^2=a(a-x)$

β)  $a^2x^2-2a^3x+a^4-1=0, a \neq 0$

δ)  $x^2-\frac{a-\beta}{2}x-\frac{a\beta}{4}=0$

(Απ.: α)  $\kappa, -\lambda$ , β)  $\frac{a^2 \pm 1}{a}$ , γ)  $-a, \frac{a}{2}$ , δ)  $-\frac{a}{2}, \frac{\beta}{2}$ )

24. Να αποδείξετε ότι δεν είναι αδύνατες οι παρακάτω εξισώσεις:

α)  $\lambda x^2+2x-(\lambda-2)=0, \lambda \neq 0$

β)  $ax^2+(a+\beta)x+\beta=0, a \neq 0$

25. Να βρείτε τις τιμές του αριθμού  $\lambda$  για τις οποίες η εξίσωση  $x^2-6x+\lambda+2=0$ :

α) έχει ρίζες άνισες

β) έχει ρίζες ίσες

γ) είναι αδύνατη

(Απ.: α)  $\lambda < 7$ , β)  $\lambda = 7$ , γ)  $\lambda > 7$ )

26. Για ποια τιμή του  $\mu$  η εξίσωση  $3x^2-\mu x+3=0$  έχει μία μόνο ρίζα και η εξίσωση

$2x^2-2x+\mu=0$  έχει δύο διαφορετικές ρίζες;

(Απ.:  $\mu = -6$ )

27. Να δείξετε ότι οι εξισώσεις  $x^2+5x+a=0$  και  $x^2+2ax+a^2+4a-25=0$  έχουν το ίδιο πλήθος λύσεων.

28. Αν  $\alpha-\beta+\gamma=0$  και  $\alpha \neq 0$  να λύσετε την εξίσωση:  $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ .

(Απ.:  $x = -1$  ή  $x = \frac{\alpha-\beta}{\alpha}$ )

### Κλασματικές εξισώσεις

29. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α)  $\frac{5}{x+8}=\frac{1}{x-8}$

β)  $\frac{8}{x}+5=\frac{5x}{x-2}$

γ)  $x+\frac{3}{x}=\frac{12}{x}$

(Απ. α) 12, β) αδύνατη γ) ±3 )

30. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α)  $\frac{1}{x}-\frac{x}{x-1}=\frac{6x+5}{x^2-x}$

β)  $1-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{2-x}=\frac{2x}{x^2-4}$

γ)  $\frac{3x+1}{x+3}+\frac{x-5}{x}-4=0$

(Απ. α) -3,-2, β) 0 γ)  $-\frac{15}{13}$ )

31. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α)  $\frac{3}{x-2}+\frac{5}{x}=\frac{6}{x^2-2x}$

β)  $\frac{2}{x^2-4}-\frac{1}{x^2-2x}=\frac{4-x}{x^2+2x}$

γ)  $\frac{13}{x+1}-\frac{1}{1-x}=\frac{5x-3}{x^2-1}$

(Απ. α) αδύνατη, β) 3 γ) αδύνατη)

32. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{a) } \frac{x+\frac{1}{4}}{x-\frac{1}{4}} - 2x = \frac{x-\frac{1}{4}}{x+\frac{1}{4}}$$

$$\text{b) } \frac{x-2}{x} + \frac{4}{x-2} = \frac{8}{x^2-2x}$$

(Απ.: i) 0,  $-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}$  ii) -2)

33. Δίνεται το κλάσμα  $K = \frac{(x-2)^2 + 2x^2 - 4x}{9x^2 - 4}$

**a)** Ποιες τιμές δεν μπορεί να πάρει το x.

**β)** Να απλοποιήσετε το κλάσμα

**γ)** Να λύσετε την εξίσωση  $K = 0$

(Απ.: a)  $-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}$ , γ)  $x = 2$ )

34. Να εξετάσετε αν οι εξισώσεις:

$$\frac{8}{x-10} = \frac{x}{10-x} \text{ και } \frac{x-10}{8} = \frac{10-x}{x} \text{ έχουν τις ίδιες λύσεις.}$$

(Απ.: Όχι)

35. Άντας  $\frac{2}{x^2} + \frac{3}{x} - 2 = 0$  να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:  $\Pi = x^3 - \frac{1}{x^3}$ .

(Απ.:  $\frac{63}{8}$ )

36. Δίνεται η εξίσωση:  $\frac{\alpha x - 2}{x+1} - \frac{x+1}{x-1} = \frac{2\alpha}{x^2-1}$

**a)** Ποιοι αριθμοί δεν μπορούν να είναι λύση αυτής της εξίσωσης;

**β)** Να βρείτε, αν υπάρχει, την τιμή του α ώστε η εξίσωση να έχει λύση τη  $x = 2$ .

(Απ.: a)  $x \neq \pm 1$ , β) δεν υπάρχει)

37. Να λύσετε τις εξισώσεις: **a)**  $\frac{3}{x^2+2x+1} = \frac{1}{x^2+x} - \frac{1}{x}$       **β)**  $\frac{4}{x^2-x} + \frac{x+7}{1-x^2} = \frac{1}{x}$

(Απ.: a) -4, β)  $-\frac{5}{2}$ )

38. Δίνονται οι κλασματικές παραστάσεις:  $A = \frac{2x}{x^2+2x}$ ,  $B = \frac{3}{2x-4}$ ,  $\Gamma = \frac{x-14}{2(x^2-4)}$

i) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η καθεμιά.

ii) Να λύσετε την εξίσωση  $A - B = \Gamma$ .

39. Άντας  $x = \lambda + 2$  είναι λύση της εξίσωσης  $x = \frac{6}{x-5}$ , να υπολογίσετε το λ.

(Απ.:  $\lambda = 4$  ή  $\lambda = -3$ )

40. Δίνονται οι αλγεβρικές παραστάσεις:

$$A = (x-2)^2 - (3x-6)(2x+5) + x^2 - 4, \quad B = 9(2x-3)^2 - 4(5x+3)^2$$

**a)** Να τρέψετε σε γινόμενα τις παραστάσεις A, B.

**β)** Να απλοποιήσετε το κλάσμα  $\frac{A}{B}$

**γ)** Να λύσετε την εξίσωση  $\frac{A}{B} = 5$ .

(Απ.: iii)  $x = \frac{13}{79}$ )

41. Να λύσετε την εξίσωση:  $\frac{x+\alpha}{x-\alpha} + \frac{x+\beta}{x-\beta} = 2$  αν  $\alpha\beta \neq 0$  και  $\alpha+\beta \neq 0$

$$(Απ.: x = \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta})$$

42. **a)** Να παραγοντοποιήσετε τα πολυώνυμα:  $A(x) = x^3 - 3x + 2$ ,  $B(x) = x^5 - x^3 - x^2 + 1$

**b)** Να λύσετε την εξίσωση:  $\frac{B(x)}{x+1} = A(x)$

$$(Απ.: i) x = 1)$$

43. Να λύσετε την εξίσωση:  $\frac{x-5}{x-6} + \frac{x-2}{x-3} = \frac{x-1}{x-2} + \frac{x-6}{x-7}$

$$(Απ.: \frac{9}{2})$$

44. Να λύσετε τις εξισώσεις:

a)  $\frac{3}{x^2+x-2} - \frac{1}{x^3-2x^2+x} = \frac{3}{x^2-3x}$

b)  $\frac{4}{4-(x-2)^2} - \frac{2x+5}{x^3+2x^2+x} = \frac{-3}{x^2-3x-4}$

$$(Απ.: i) \frac{19}{13}, ii) -\frac{8}{3}, 2)$$