

Γεωμετρία Β' Λυκείου

Εκφωνήσεις

180 ασκήσεις



Στέλιος Μιχαήλογλου

www.Askisopolis.gr

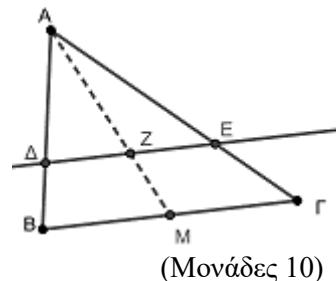
Θεώρημα Θαλή

2^o Θέμα

14534. Θεωρούμε τρίγωνο ABG με $AB=6$ και $AG=9$. AM είναι η διάμεσος του τριγώνου και το σημείο Z εσωτερικό στην AM ώστε να σχηματίζει

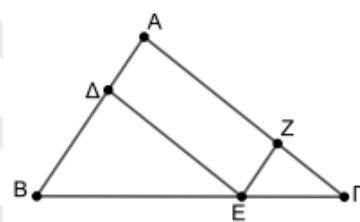
λόγο $\frac{AZ}{AM} = \frac{2}{3}$. Από το σημείο Z φέρουμε ευθεία παράλληλη στην πλευρά BG , που τέμνει τις πλευρές AB και AG στα σημεία Δ και E αντίστοιχα.

- a) Να αποδείξετε ότι $\frac{\Delta A}{AB} = \frac{2}{3}$ και $\frac{AE}{EG} = 2$. (Μονάδες 15)
- b) Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων $A\Delta$ και GE . (Μονάδες 10)



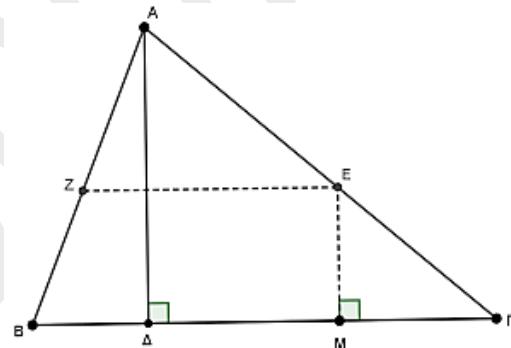
14579. Δίνεται το τρίγωνο ABG και τα σημεία Δ , E και Z των πλευρών του AB , BG και AG αντίστοιχα, ώστε η ΔE να είναι παράλληλη στην AG . Επίσης $AB = 3\Delta$.

- a) Να βρείτε τους λόγους $\frac{B\Delta}{A\Delta}$ και $\frac{BE}{EG}$. (Μονάδες 15)
- b) Αν επιπλέον γνωρίζετε ότι $AG = 3,9$ και $GZ = 1,3$ να αποδείξετε ότι η ZE είναι παράλληλη της AB . (Μονάδες 10)



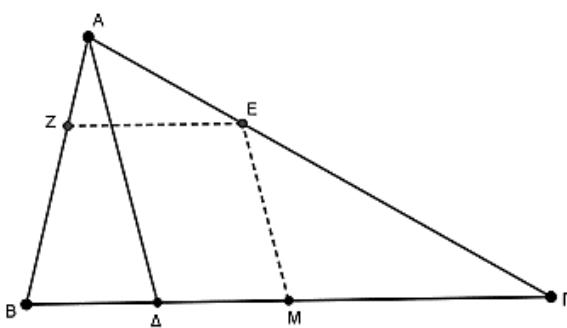
15830. Στο τρίγωνο ABG του διπλανού σχήματος, το Δ είναι ύψος του τριγώνου. Η κάθετος στην πλευρά BG σε ένα άλλο σημείο της M τέμνει την AG στο E . Από το E φέρνουμε παράλληλη στην BG , που τέμνει την AB στο Z . Να αποδείξετε ότι:

- a) $\frac{ZA}{ZB} = \frac{EA}{EG}$ (Μονάδες 10)
- b) $\frac{ZA}{ZB} = \frac{MD}{MG}$ (Μονάδες 15)



15831. Στο τρίγωνο ABG του παρακάτω σχήματος, το M είναι μέσο της πλευράς BG και το Δ είναι το μέσο του MB . Από το M φέρνουμε παράλληλη στην ΔA , που τέμνει την AG στο E . Από το E φέρνουμε παράλληλη στην BG , που τέμνει την AB στο Z . Να αποδείξετε ότι:

- a) $\frac{EA}{EG} = \frac{1}{2}$ (Μονάδες 15)
- b) $\frac{ZA}{ZB} = \frac{1}{2}$ (Μονάδες 10)

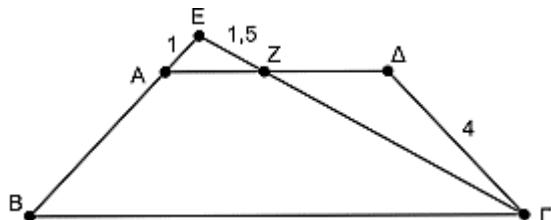


21987. Οι ευθείες $\Gamma\Theta$ και ZH τέμνουν τις παράλληλες ευθείες ε_1 , ε_2 και ε_3 στα σημεία Θ , A , B και H , Δ , E αντίστοιχα και την ευθεία ε_4 στα σημεία Γ και Z όπως στο παρακάτω σχήμα. Επίσης δίνονται τα μήκη $\Theta A = 2$, $AB = 1$, $BG = H\Delta = 4$ και $EZ = 8$.

- a) Να αποδείξετε ότι $\Delta E = 2$. (Μονάδες 10)
- b) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon 4$ είναι παράλληλη στις ευθείες ε_1 , ε_2 και ε_3 . (Μονάδες 05)
- c) Να σχεδιάσετε το ευθύγραμμο τμήμα ΘZ το οποίο τέμνει την ευθεία ε_2 στο K και την ευθεία ε_3 στο L και να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{\Lambda Z}{KL}$. (Μονάδες 10)

22132. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = \Gamma\Delta = 4$ και με βάσεις $A\Delta$ και $B\Gamma$. Στην προέκταση της πλευράς BA προς το A παίρνουμε σημείο E , ώστε $EA = 1$. Το ευθύγραμμό τμήμα $E\Gamma$ τέμνει την $A\Delta$ στο σημείο Z και $EZ = 1,5$.

- a)** Να αποδείξετε ότι $Z\Gamma = 1,5AB$. (Μονάδες 10)
b) Να υπολογίσετε το μήκος του $Z\Gamma$. (Μονάδες 05)



- γ)** Αν επιπλέον $B\Gamma = 10$, να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς AZ του τριγώνου EAZ . (Μονάδες 10)

Ομοιότητα

2^o Θέμα

14535. Δίνονται δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ για τα οποία γνωρίζουμε ότι: $AB = 9$, $A\Gamma = 15$ και $A = 48^\circ$, $Z\Delta = 12$, $ZE = 20$ και $Z = 48^\circ$.

- a)** Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι όμοια. (Μονάδες 13)
b) i. Να γράψετε τους λόγους των ομόλογων πλευρών των δύο τριγώνων.
ii. Να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους. (Μονάδες 12)

14536. Για δύο ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και $E\Delta Z$ ($E\Delta = EZ$) γνωρίζουμε ότι:

$A = 48^\circ$, $Z = 66^\circ$ και $AB = 3 \cdot E\Delta$.

- a)** Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $E\Delta Z$ είναι όμοια. (Μονάδες 13)
b) i. Να γράψετε τους ίσους λόγους που προκύπτουν από την ομοιότητα των δύο τριγώνων.
ii. Να βρείτε το λόγο των βάσεων των δύο τριγώνων. (Μονάδες 12)

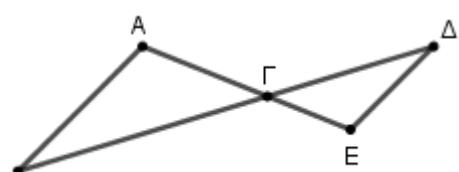
14537. Δίνονται δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ για τα οποία γνωρίζουμε ότι:

$A = 48^\circ$, $B = 53^\circ$, $E = 79^\circ$ και $Z = 48^\circ$.

- a)** Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι όμοια. (Μονάδες 10)
b) i. Ποιες είναι οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων;
ii. Να γράψετε την ισότητα των λόγων των ομόλογων πλευρών των δύο τριγώνων. (Μονάδες 6)

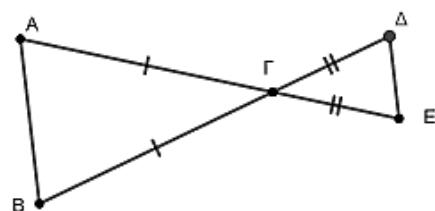
14538. Στο διπλανό σχήμα τα τμήματα AB και ΔE είναι παράλληλα και τα τμήματα $A\Gamma$ και ΓE είναι τέτοια, ώστε $A\Gamma = 2\Gamma E$.

- a)** Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Gamma\Delta E$ είναι όμοια. (Μονάδες 13)
b) i. Να γράψετε τους λόγους των ομόλογων πλευρών των δύο τριγώνων.
ii. Ποιος είναι ο λόγος ομοιότητας των δύο τριγώνων; (Μονάδες 12)



14546. Στο διπλανό σχήμα τα ευθύγραμμα τμήματα AE και $B\Delta$ τέμνονται στο Γ , τα τρίγωνα ΓAB και $\Gamma\Delta E$ που σχηματίζονται είναι ισοσκελή και οι βάσεις τους AB και ΔE είναι τέτοιες, ώστε $AB = 2 \cdot \Delta E$.

- a)** Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΓAB και $\Gamma\Delta E$ είναι όμοια. (Μονάδες 13)
b) i. Να γράψετε την ισότητα των λόγων που προκύπτει από την ομοιότητα των τριγώνων του ερωτήματος a).
ii. Ποια σχέση συνδέει τις πλευρές $A\Gamma$ και ΓE των δύο τριγώνων; (Μονάδες 12)



16100.Στο διπλανό σχήμα δίνονται ότι $AE = 5$, $AG = 4$, $EG = 2$, $\Delta E = 6$, $BE = 15$ και $B\Delta = 12$.

a) Να υπολογίσετε τους λόγους $\frac{B\Delta}{AG}$, $\frac{\Delta E}{EG}$, $\frac{BE}{AE}$.
(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AEG και $BE\Delta$ είναι όμοια.
(Μονάδες 8)

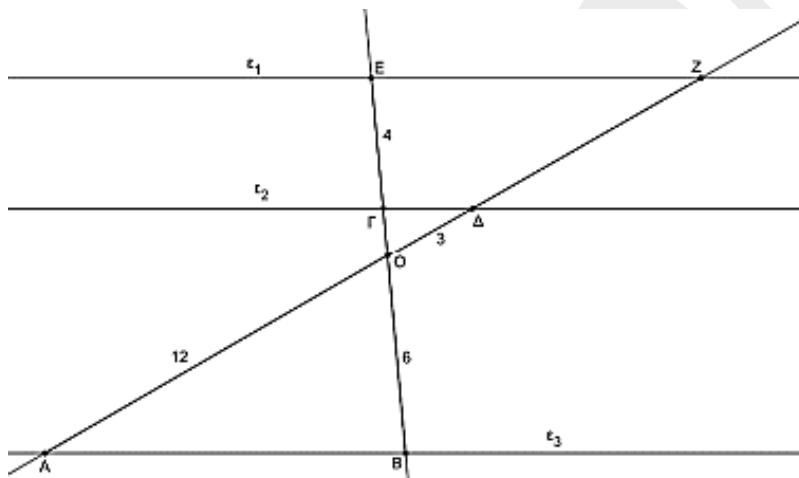
γ) Να συμπληρώσετε τις ακόλουθες ισότητες οι οποίες προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων AEG και $BE\Delta$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

$$A = \dots, \quad \Gamma = \dots, \quad AE\Gamma = \dots \quad (\text{Μονάδες 8})$$

16086.Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες e_1 , e_2 και e_3 είναι παράλληλες. Δίνονται ότι $\Gamma E = 4$, $O\Delta = 3$, $OA = 12$, $OB = 6$.

a) Να υπολογίσετε τα τμήματα $O\Gamma$ και ΔZ .
(Μονάδες 10)
β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα OEZ και OBA είναι όμοια.
(Μονάδες 09)

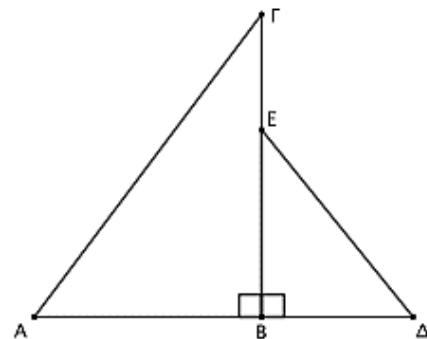
γ) Αν $O\Gamma = 1.5$ και $\Delta Z = 8$, να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{EZ}{AB}$.
(Μονάδες 06)



16099.Στο διπλανό σχήμα δίνονται $A = \Delta$, $AG = 36$, $B\Delta = 16$ και $E\Delta = 24$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABG και ΔBE είναι όμοια.
(Μονάδες 15)

β) Να υπολογίσετε την πλευρά AB .
(Μονάδες 10)

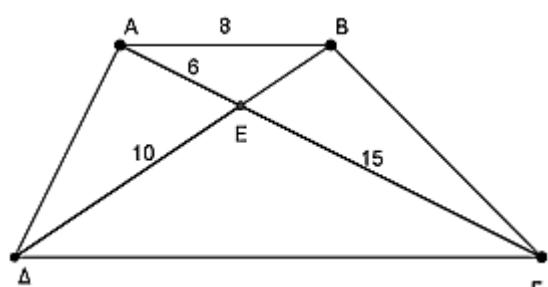


16113.Δίνεται το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB // \Delta\Gamma$, E σημείο τομής των διαγώνιων, $AE = 6$, $AB = 8$, $\Gamma E = 15$ και $\Delta E = 10$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AEB και $\Gamma E\Delta$ είναι όμοια.
(Μονάδες 09)

β) Να γράψετε την αναλογία των ομόλογων πλευρών τους.
(Μονάδες 09)

γ) Να υπολογίσετε τα τμήματα BE και $\Gamma\Delta$.
(Μονάδες 07)



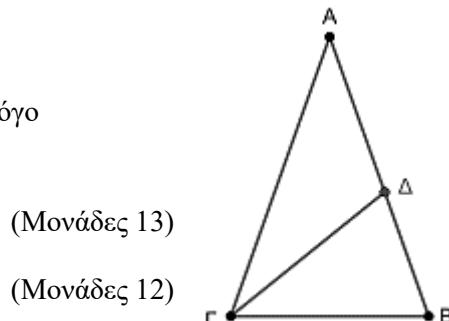
16126.Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma = 36$ και $B\Gamma = 24$.

Το σημείο Δ πλευράς AB είναι τέτοιο ώστε $B\Delta = 16$.

a) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Gamma B\Delta$ είναι όμοια με λόγο

$$\text{ομοιότητας } \frac{3}{2}.$$

b) Να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $\Gamma\Delta$.



16755.Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B\Gamma = 2A\Gamma$ και σημείο Δ στην πλευρά $B\Gamma$ τέτοιο ώστε $A\Gamma = 2\Gamma\Delta$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

a) Να υπολογίσετε τους λόγους $\frac{B\Gamma}{A\Gamma}$ και $\frac{A\Gamma}{\Gamma\Delta}$.

(Μονάδες 8)

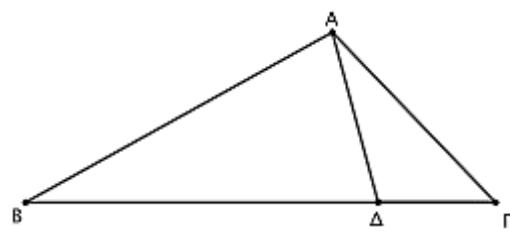
b) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta A\Gamma$ είναι όμοια.

(Μονάδες 9)

γ) Να συμπληρώσετε τις ακόλουθες ισότητες οι οποίες προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων $AB\Gamma$ και $\Delta A\Gamma$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

$$BA\Gamma = \dots, \quad B = \dots$$

(Μονάδες 8)



21350.Στο σχήμα δίνονται ότι $B = E = 90^\circ$,

$AE = 8$, $EB = 4$ και $\Delta E = 4$.

a) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AE\Delta$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια.

(Μονάδες 10)

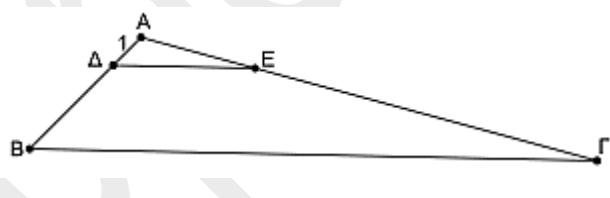
β) Να γράψετε τους ίσους λόγους που

προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων $AE\Delta$ και $AB\Gamma$.

γ) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς $B\Gamma$.

(Μονάδες 10)

(Μονάδες 05)



21986.Στις πλευρές AB και $A\Gamma$ τριγώνου $AB\Gamma$ παίρνουμε σημεία Δ και E αντίστοιχα ώστε η ΔE να είναι παράλληλη στην $B\Gamma$ και $A\Delta = 1$, όπως στο σχήμα.

a) Να αποδείξετε ότι $AE \cdot B\Delta = GE$.

(Μονάδες 10)

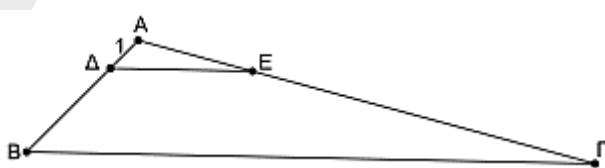
β) Αν επιπλέον $B\Delta = AE$ και $GE = 9$:

(Μονάδες 10)

i. Να αποδείξετε ότι $B\Delta = 3$ και $AB = 4$.

ii. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια και να υπολογίσετε το λόγο ομοιότητάς τους.

(Μονάδες 05)



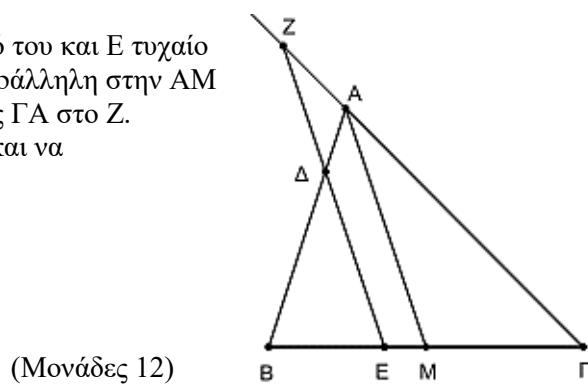
4^ο Θέμα

14499.Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Θεωρούμε AM τη διάμεσό του και E τυχαίο σημείο του τμήματος BM . Από το E φέρουμε ευθεία παράλληλη στην AM που τέμνει την πλευρά AB στο Δ και την προέκταση της GA στο Z .

a) Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας:

$$\text{i. } \frac{\Delta E}{...} = \frac{...}{BM} = \frac{B\Delta}{...}$$

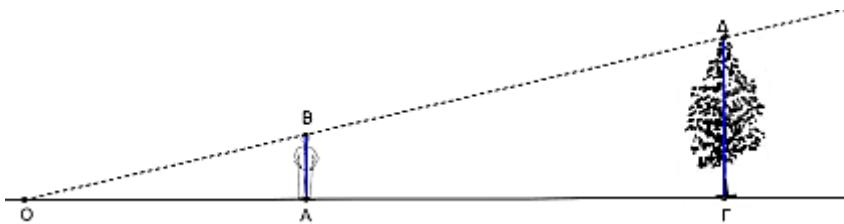
$$\text{ii. } \frac{...}{AM} = \frac{GE}{...} = \frac{...}{GA}$$



- β)** Να αποδείξετε ότι $\Delta E + EZ = 2AM$ για οποιαδήποτε θέση του E στο BM.

(Μονάδες 13)

22102. Για να βρει το ύψος ενός δέντρου, ένας μαθητής ύψους 1,60 m σκέφτηκε να μετρήσει το μήκος της σκιάς του δέντρου και το μήκος της δικιάς του σκιάς πάνω στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο κάποια χρονική στιγμή μιας ηλιόλουστης ημέρας. Στέκεται σε θέση έτσι ώστε, η άκρη της σκιάς του να συμπίπτει με την άκρη της σκιάς του δέντρου. Ο μαθητής μετράει και βρίσκει ότι η σκιά του έχει μήκος 2m και η σκιά του δέντρου ότι έχει μήκος 5m. Στο σχέδιο που ακολουθεί, τα τμήματα OA και OG, με κοινό άκρο O, αναπαριστάνονται τα μήκη των σκιών του μαθητή και του δέντρου αντίστοιχα και έχουν τον ίδιο φορέα OG, τα δε τμήματα AB και ΓΔ αναπαριστάνονται τα αντίστοιχα ύψη μαθητή και δέντρου και θεωρούνται κάθετα στην OG.



- α) i.** Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AOB και ΓΟΔ είναι όμοια και να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους. (Μονάδες 12)

ii. Να βρείτε το ύψος του δέντρου.

β) Μπορεί ο μαθητής να χρησιμοποιήσει την ίδια μέθοδο για να μετρήσει το ύψος του ίδιου δέντρου μια άλλη ώρα της ημέρας; Ποια από τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος θα άλλαζαν στην περίπτωση αυτή; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας. (Μονάδες 5)

(σημειώνεται ότι τα σχέδια δεν έχουν γίνει υπό κλίμακα)

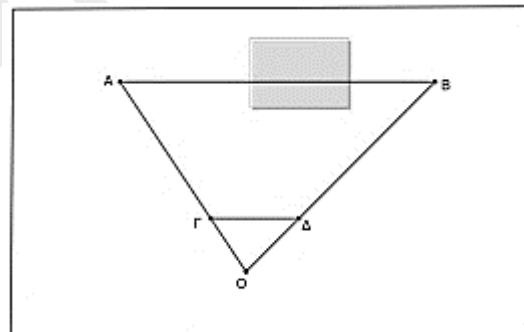
22565. Οι μαθητές θέλοντας να μετρήσουν την απόσταση των σημείων A και B στην αυλή του σχολείου τους μεταξύ των οποίων παρεμβάλλεται ένα κτίσμα και η απευθείας μέτρηση του μήκους AB είναι αδύνατη, εργάστηκαν ως εξής. Στην αυλή τους επέλεξαν σημείο O ώστε η μέτρηση των τμημάτων OA και OB να είναι εφικτή, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Μέτρησαν και βρήκαν $OA=20m$ και $OB=30m$. Στις OA και OB πήραν σημεία Γ και Δ αντίστοιχα τέτοια ώστε $OG=2m$ και $OD=3m$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. η ΓΔ είναι παράλληλη με την AB, (Μονάδες 8)

ii. τα τρίγωνα OΓΔ και OAB είναι όμοια. (Μονάδες 7)

β) Ένας από τους μαθητές υποστηρίζει ότι μπορούν να υπολογίσουν την απόσταση των σημείων A και B αν γνωρίζουν την απόσταση των δύο σημείων Γ και Δ. Είναι ο ισχυρισμός του μαθητή αληθής; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

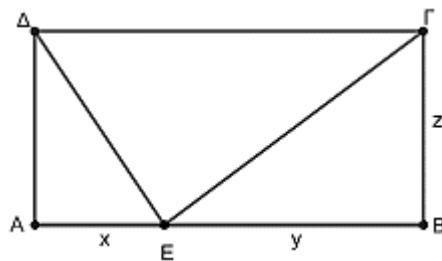


Πυθαγόρειο Θεώρημα

2^o Θέμα

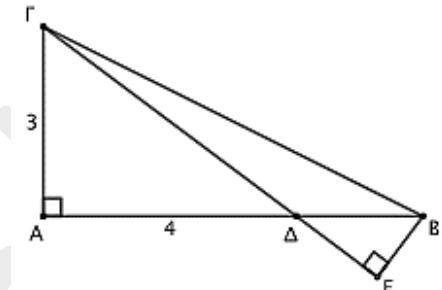
16805. Η περίμετρος του ορθογωνίου $ABΓΔ$ του σχήματος είναι 72 και το E είναι σημείο στην πλευρά AB . Τα μήκη των τμημάτων x , y , z είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 2,4,3 αντίστοιχα.

- a) Να αποδείξετε ότι $x = 8$, $y = 16$ και $z = 12$.
 (Μονάδες 13)
 b) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου $ΓΕΔ$.
 (Μονάδες 12)



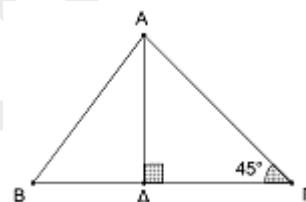
16757. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ABΓ$ με $A = 90^\circ$, $AB = 6$ και $ΑΓ = 3$. Θεωρούμε σημείο $Δ$ στην πλευρά AB , τέτοιο ώστε $ΑΔ = 4$. Φέρουμε την απόσταση $ΒΕ$ της κορυφής B από την $ΓΔ$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

- a) Να υπολογίσετε το μήκμα $ΓΔ$.
 (Μονάδες 8)
 b) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $ΑΔΓ$ και $ΕΔΒ$ είναι όμοια.
 (Μονάδες 9)
 γ) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος $ΒΕ$.
 (Μονάδες 8)



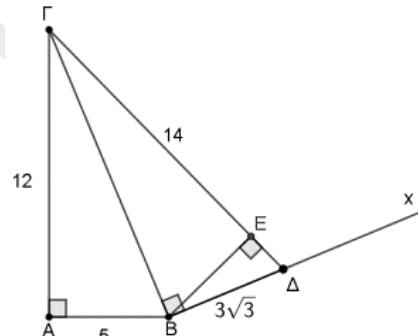
17342. Δίνεται τρίγωνο $ABΓ$ με $ΒΓ = 7$, $Γ = 45^\circ$ και ύψος $ΑΔ = 4$.

- a) Να αποδείξετε ότι:
 i. $ΓΔ = 4$.
 ii. $ΑΓ = 4\sqrt{2}$.
 b) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς AB .
 (Μονάδες 12)



21067. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ABΓ$ με $A = 90^\circ$, $ΑΓ = 12$ και $AB = 5$.

- a) Να αποδείξετε ότι $ΒΓ = 13$.
 (Μονάδες 08)
 β) Φέρουμε ημιευθεία Bx κάθετη στη $ΒΓ$ στο σημείο B και παίρνουμε σε αυτή σημείο $Δ$, τέτοιο ώστε $ΔΓ = 14$, όπως φαίνεται στο σχήμα.
 i. Να αποδείξετε ότι $ΒΔ = 3\sqrt{3}$.
 ii. Να υπολογίσετε την προβολή της $ΒΔ$ στην $ΔΓ$.
 (Μονάδες 08)
 (Μονάδες 09)

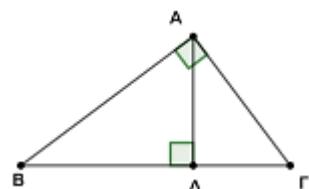


22130. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ABΓ$ ($A = 90^\circ$) εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R . Αν οι πλευρές του τριγώνου είναι $ΒΓ = \alpha$, $ΑΓ = \beta$ και $AB = \gamma$, τότε να αποδείξετε ότι:

- a) $\alpha = 2R$.
 β) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 8R^2$.
 (Μονάδες 12)
 (Μονάδες 13)

22514. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ABΓ$ ($A = 90^\circ$) με $ΒΓ = 5$ και $AB = 4$.

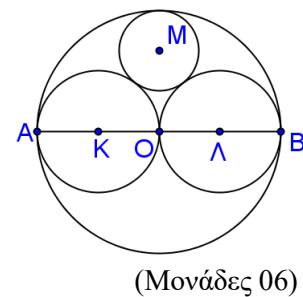
- Να υπολογίσετε:
 a) την πλευρά $ΑΓ$.
 b) την προβολή της πλευράς AB πάνω στη $ΒΓ$.
 γ) το ύψος $ΑΔ$.
 (Μονάδες 9)
 (Μονάδες 8)
 (Μονάδες 8)



4^ο Θέμα

14500. Δύο ίσοι κύκλοι (K, R) και (Λ, r) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Ο. Ένας τρίτος κύκλος (M, ρ) εφάπτεται εξωτερικά με τους δύο κύκλους κέντρων Κ και Λ. Με κέντρο το σημείο Ο και ακτίνα $2R$ γράφουμε κύκλο, ο οποίος εφάπτεται εξωτερικά των 3 παραπάνω κύκλων, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

α) Στον παρακάτω πίνακα, στη στήλη Α είναι οι διάκεντροι KM , ΛM και OM των κύκλων με κέντρα K , Λ , M και O και στη στήλη Β τα μήκη των διακέντρων αυτών. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της στήλης Α με τα αντίστοιχα της στήλης Β, γράφοντας στη κόλλα σας μόνο τις αντιστοιχίες.



(Μονάδες 06)

Στήλη Α	Στήλη Β
Διάκεντρος	Μήκος
1. $K\Lambda$	i. R
2. ΛM	ii. $2R$
3. OM	iii. $R+\rho$
	iv. $2R-\rho$

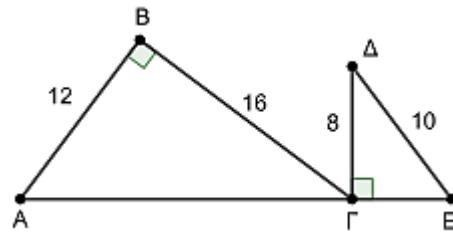
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο MKL είναι ισοσκελές και ότι το τμήμα MO είναι το ύψος προς τη βάση του. (Μονάδες 06)

γ) Να βρείτε την ακτίνα ρ του κύκλου κέντρου M ως συνάρτηση του R όπου R η ακτίνα των κύκλων κέντρων K και Λ .

16133. Στο διπλανό σχήμα, τα ευθύγραμμα τμήματα AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ και ΔE έχουν μήκη αντίστοιχα 12 , 16 , 8 και 10 , οι γωνίες $AB\Gamma$ και $\Delta\Gamma E$ είναι ορθές και τα σημεία A , Γ και E ανήκουν στην ίδια ευθεία.

α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος AE . (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $E\Gamma\Delta$ είναι όμοια. (Μονάδες 7)



γ) Έστω ότι το σημείο τομής των ευθειών AB και ED είναι το Z και ΣH είναι το ύψος του τριγώνου ZAE από την κορυφή του. Να αποδείξετε ότι:

i. $EH = 13$, (Μονάδες 6)

ii. $ZH = \frac{52}{3}$ (Μονάδες 5)

14533. Δυο κινητά βρίσκονται στο σημείο A και σκοπεύουν να μεταβούν στο σημείο E , που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Το ένα κινητό ξεκινάει από ένα σημείο A και κινείται βόρεια 3 χιλιόμετρα, κατόπιν συνεχίσει 10 χιλιόμετρα ανατολικά, στη συνέχεια προχωράει 4 χιλιόμετρα βόρεια και τέλος 14 χιλιόμετρα ανατολικά καταλήγοντας στο σημείο E . Το δεύτερο κινητό ξεκινάει από το σημείο A κινείται βόρεια μέχρι το σημείο Z και συνεχίζει ανατολικά μέχρι το σημείο E . Όταν συναντιούνται στο σημείο E επιστρέφουν μαζί στο σημείο A κινούμενα ευθύγραμμα.

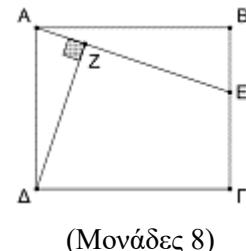
α) i. Πόσα χιλιόμετρα διάνυσε το κάθε κινητό από το σημείο A στο σημείο E με τον τρόπο που κινήθηκε; (Μονάδες 05)

ii. Να βρείτε την απόσταση AE που διάνυσαν τα δύο κινητά κατά την επιστροφή από το σημείο E στο σημείο A κινούμενα ευθύγραμμα. (Μονάδες 12)

β) Επιστρέφοντας τα δύο κινητά από το σημείο E στο σημείο A , θα περάσουν από το σημείο Γ ; Να αιτιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 08)

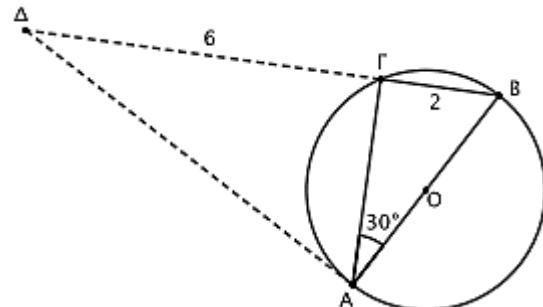
17348. Στο διπλανό σχήμα το ABΓΔ είναι ορθογώνιο με $\text{AB} = 6$ και το E σημείο της πλευράς ΒΓ , ώστε $\text{BE} = 2$. Έστω ΔZ το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα από το σημείο Δ προς την AE .

- a) Να αποδείξετε ότι $\text{AE} = 2\sqrt{10}$. (Μονάδες 8)
- b) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABE και $\Delta Z\Delta$ είναι όμοια και να γράψετε την αναλογία που προκύπτει από τους λόγους των ομόλογων πλευρών τους. (Μονάδες 9)
- c) Αν $\Delta Z = \text{ZE}$, να υπολογίσετε το μήκος του AD . (Μονάδες 8)



21149. Σε κύκλο κέντρου O και ακτίνας R θεωρούμε διάμετρο AB και σημείο Γ του κύκλου τέτοιο ώστε $\text{BA}\Gamma = 30^\circ$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν $\text{BG} = 2$, τότε:

- a) Να υπολογίσετε:
 - i. Την ακτίνα R .
 - ii. Το μήκος της πλευράς AG . (Μονάδες 16)
- b) Θεωρούμε σημείο Δ στην προέκταση της BG τέτοιο ώστε $\text{GD} = 6$. Να εξετάσετε αν το τμήμα ΔA εφάπτεται του κύκλου στο σημείο A . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)



Γενίκευση πνθαγορείου θεωρήματος

2º Θέμα

14549. Τα μήκη των πλευρών α , β , γ του τριγώνου ABΓ είναι : $\alpha=7$, $\beta=3$ και $\gamma=5$.

- a) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι αμβλυγώνιο. (Μονάδες 12)
- b) Να σχεδιάσετε την προβολή της πλευράς AB στην πλευρά AG και να υπολογίσετε το μήκος της. (Μονάδες 13)

16080. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABΓ με $\text{AB} = 5$, $\text{BG} = \sqrt{41}$ και $\text{AG} = 8$.

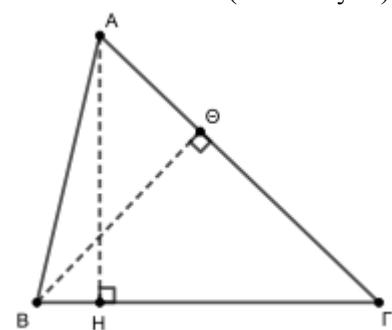
- a) Να σχεδιάσετε την προβολή AA , της AB στην AG και να υπολογίσετε το μήκος της. (Μονάδες 13)
- b) Αν $\text{AD} = 3$, να υπολογίσετε το μήκος του ύψους BD . (Μονάδες 12)

16101. Σε τρίγωνο ABΓ είναι $\text{AB} = 8$, $\text{AG} = 6$ και $\text{BG} = 11$.

- a) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι αμβλυγώνιο. (Μονάδες 10)
- b) Να σχεδιάσετε την προβολή της πλευράς AG πάνω στην AB και να υπολογίσετε το μήκος της. (Μονάδες 15)

16804. Στο διπλανό τρίγωνο ABΓ φέρουμε τα όψη του AH και BΘ .

- a) Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:
 - i. Η προβολή την πλευράς BG στην πλευρά AG είναι το τμήμα
 - ii. Η προβολή τη πλευράς AB στην πλευρά BG είναι το τμήμα
 - iii. Το τμήμα HG είναι η προβολή της πλευράς
 - iv. Το τμήμα AΘ είναι η προβολή της πλευράς στην πλευρά
 - v. $\text{AG}^2 = \text{AB}^2 + \dots - 2\text{BG} \cdot \dots$
 - vi. $\text{BG}^2 = \dots + \text{AG}^2 - 2 \dots \text{AΘ}$

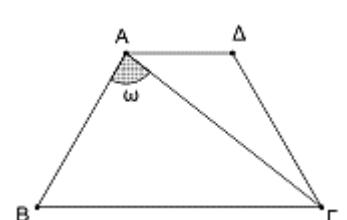


- b) Αν $\text{AB} = 4$, $\text{BG}=5$ και $\text{AG} = 6$, να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος AΘ . (Μονάδες 15)

(Μονάδες 10)

17343. Στο τετράπλευρο ABΓΔ του διπλανού σχήματος είναι $\text{AD} = 3$, $\text{AB} = \text{ΓΔ} = 5$, $\text{BG} = 8$ και $\Delta = 120^\circ$.

- a) Να αποδείξετε ότι $\text{AG} = 7$. (Μονάδες 10)
- b) Να αποδείξετε ότι $\sin \omega = \frac{1}{7}$, όπου ω είναι η γωνία BAG .

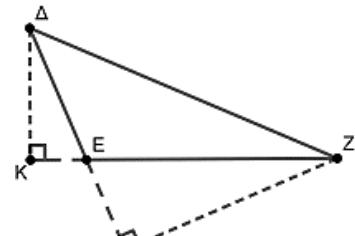


Δίνεται ότι $\sin 120^\circ = -\frac{1}{2}$.

(Μονάδες 15)

17354. Στα παρακάτω τρίγωνο ΔEZ φέρουμε τα όψη του ΔK και ZI .

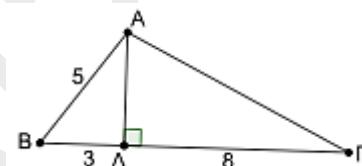
- a) Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:
- i. Η προβολή της πλευράς ΔE στην πλευρά EZ είναι το τμήμα
- ii. Η προβολή της πλευράς ΔZ στην πλευρά EZ είναι το τμήμα
- iii. Το τμήμα ΔI είναι η προβολή της πλευράς στην πλευρά
- iv. Το τμήμα EI είναι η προβολή της πλευράς στην πλευρά
- v. $\Delta Z^2 = \Delta E^2 + ... + 2EZ \cdot ...$
- vi. $EZ^2 = ... + \Delta Z^2 - 2 \cdot ... \cdot \Delta I$ (Μονάδες 15)



- β) Αν $\Delta E = 2$, $EZ = 4$ και $\Delta Z = 5$, να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΔI . (Μονάδες 10)

21302. Δίνεται τρίγωνο ABG με $AB = 5$ και $A\Delta$ το ύψος του από την κορυφή A . Αν $B\Delta = 3$ και $\Gamma\Delta = 8$ να αποδείξετε ότι:

- a) $A\Delta = 4$. (Μονάδες 07)
- β) $AG = \sqrt{80}$. (Μονάδες 08)
- γ) το τρίγωνο ABG είναι αμβλυγώνιο. (Μονάδες 10)

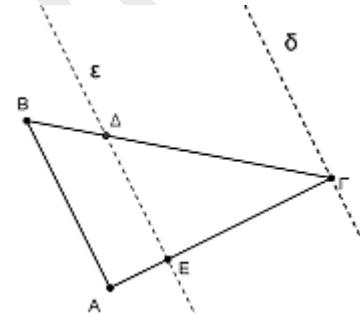


22248. Θεωρούμε τρίγωνο ABG με $AB = 9$, $GA = 12$ και $GB = 15$ και ευθείες ϵ , δ παράλληλες στην AB , όπως αυτές του σχήματος.

- α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ABG είναι ορθογώνιο και να βρείτε ποια πλευρά είναι η υποτείνουσά του.

(Μονάδες 8)

- β) Αν η ευθεία (ϵ) τέμνει τις πλευρές GA , GB σε σημεία E και Δ αντίστοιχα έτσι ώστε $EA = 4$ και η ευθεία (δ) διέρχεται από το σημείο G , τότε να υπολογίσετε
- i. το τμήμα ΔB , (Μονάδες 8)
- ii. τις πλευρές του τριγώνου ΔEG . (Μονάδες 9)



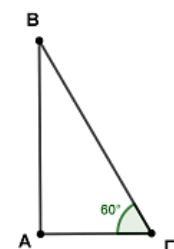
22512. Δίνεται τρίγωνο ABG με $BG = 4$, $AG = 2$ και $\Gamma = 60^\circ$.

- α) Να υπολογίσετε την πλευρά AB .
- β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ABG είναι ορθογώνιο.
- γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ABG .

(Μονάδες 8)

(Μονάδες 9)

(Μονάδες 8)



4ο Θέμα

21185. Τρία ευθύγραμμα τμήματα α , β και γ έχουν μήκη ανάλογα των αριθμών 5, 4 και 3 αντίστοιχα.

- α) Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα αυτά μπορούν να σχηματίσουν ορθογώνιο τρίγωνο. (Μονάδες 8)
- β) Αν τα ευθύγραμμα τμήματα α , β και γ είναι σχεδιασμένα πάνω σε ένα χαρτί και αυτό το φωτοτυπήσουμε με μεγέθυνση $\lambda\%$, να αποδείξετε ότι και με τα νέα ευθύγραμμα τμήματα σχηματίζεται πάλι ορθογώνιο τρίγωνο. (Μονάδες 10)
- γ) Να εξετάστε αν μπορεί να σχηματιστεί τρίγωνο με πλευρές 10α , 8β και 6γ . (Μονάδες 7)

22400. Τα Δ και Ε είναι σημεία των πλευρών AB και AG αντίστοιχα, ενός τριγώνου AΒΓ. Δίνεται ότι $AB=9$, $AG=12$, $AD=4$ και $AE=3$.

α) Έστω ότι στο παραπάνω τρίγωνο AΒΓ είναι $BG = 15$ (*Σχήμα 1*).

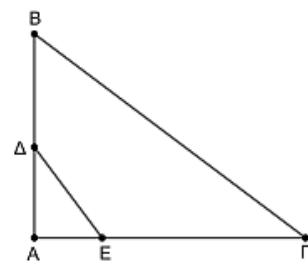
Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο AΒΓ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 7)

ii. $DE = 5$.

(Μονάδες 6)



β) Έστω τώρα ότι στο αρχικό τρίγωνο AΒΓ είναι $BG = 10$, (*Σχήμα 2*).

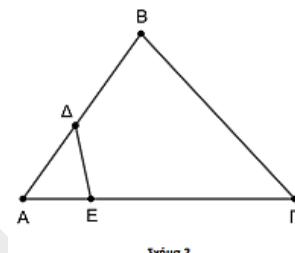
Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο AΒΓ δεν είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 6)

ii. $DE = \frac{10}{3}$.

(Μονάδες 6)



3^ο Θέμα

21102. Δίνεται τετράγωνο AΒΓΔ πλευράς α και έστω Ε το μέσο της ΔΓ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $AG = \alpha\sqrt{2}$.

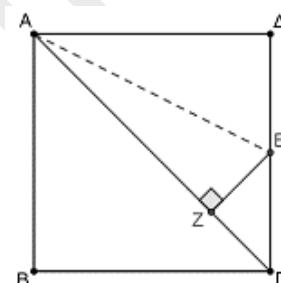
(Μονάδες 09)

ii. $AE = \alpha \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(Μονάδες 09)

β) Να υπολογίσετε την προβολή του τμήματος AE στην AG.

(Μονάδες 07)



Εμβαδό βασικών σχημάτων

2^o Θέμα

16102. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Από το κέντρο O φέρουμε ευθεία η οποία τέμνει τις πλευρές AB και $\Gamma\Delta$ στα σημεία E και Z όπως φαίνεται στο σχήμα.

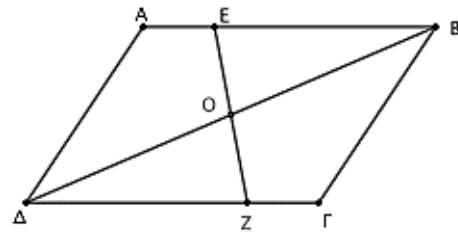
Να αποδείξετε ότι:

α) $(\Delta OZ) = (\Delta OBE)$.

(Μονάδες 10)

β) $(\Delta OEA) = (\Delta BGZO)$.

(Μονάδες 15)



16817. Στο τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς a , θεωρούμε σημείο E της πλευράς

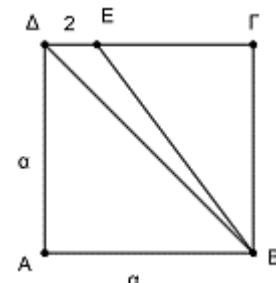
του $\Delta\Gamma$ έτσι ώστε $\Delta E = 2$. Αν γνωρίζουμε ότι: $(BE\Delta) = \frac{(AB\Gamma\Delta)}{8}$ τότε:

α) Να αποδείξετε ότι η πλευρά του τετραγώνου a είναι ίση με 8.

(Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος BE .

(Μονάδες 12)



18550. Η περίμετρος του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος είναι 36 και το E είναι σημείο στην πλευρά AB . Τα μήκη των τμημάτων x , y , z είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 2,4,3 αντίστοιχα.

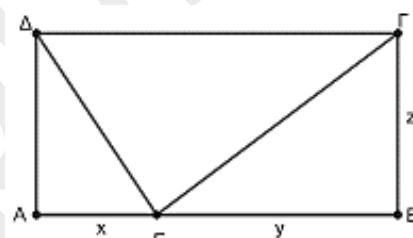
α) Να αποδείξετε ότι $x = 4$, $y = 8$ και $z = 6$.

(Μονάδες 13)

β) i. Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου $GE\Delta$.

ii. Να βρεθεί ο λόγος του εμβαδού του τριγώνου $GE\Delta$ προς το

(Μονάδες 12)



18559. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του διπλανού σχήματος η διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά $B\Gamma$ έχει μήκος 3 και η πλευρά $A\Gamma$ είναι ίση με 4.

Αν $BE=5$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι η διάμεσος AE είναι κάθετη στην πλευρά $A\Gamma$.

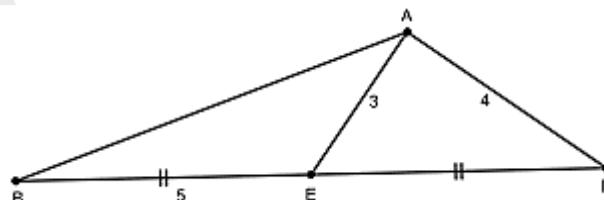
(Μονάδες 10)

β) i. Να δικαιολογήσετε γιατί $(ABE)=(AGE)$.

(Μονάδες 05)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 10)



18560. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $B\Gamma=13$ και $\Gamma\Delta=14$. Αν GE είναι το κάθετο τμήμα από το σημείο G στην πλευρά AB και το τμήμα AE έχει μήκος 9, τότε:

α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος GE .

(Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδό

i. του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.

(Μονάδες 12)

ii. του τραπεζίου $AE\Gamma\Delta$.

(Μονάδες 12)

21101. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές $B\Gamma=\sqrt{3}$, $AB=\sqrt{2}$, $A\Gamma=1$.

α) Να αποδείξετε ότι $A=90^\circ$.

(Μονάδες 09)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 07)

γ) Να υπολογίσετε το ύψος AD .

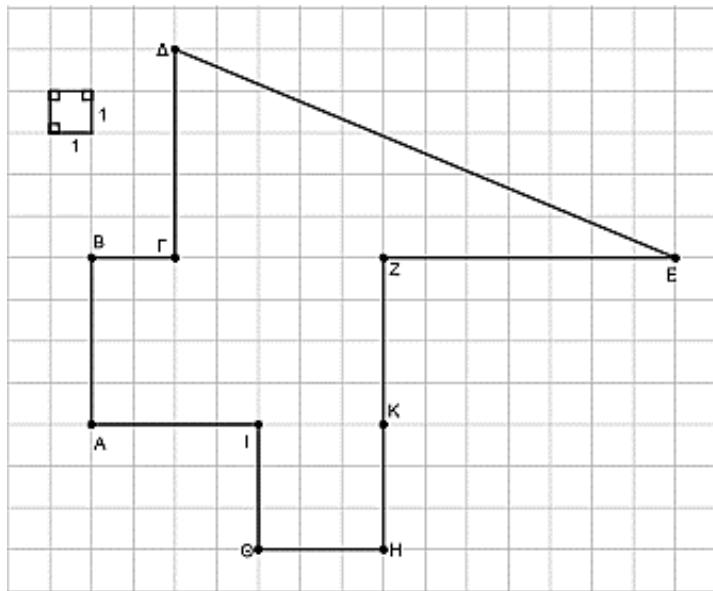
(Μονάδες 09)

18558. Στο παρακάτω σχήμα:

α) Να βρείτε το μήκος της πλευράς AE .

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την τεθλασμένη γραμμή $AB\Gamma\Delta E\Gamma\Theta\Gamma\Delta$.



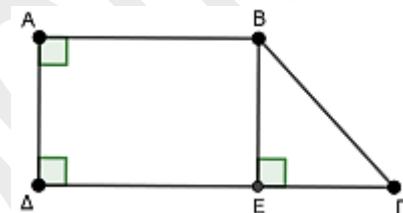
21823. Δίνεται το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ του διπλανού σχήματος, με

$A = \Delta = 90^\circ$ και $\Delta\Delta = 4$, $AB = 5$, $\Delta\Gamma = 8$. Από την κορυφή B του τραπεζίου, φέρνουμε την BE κάθετη στην πλευρά $\Delta\Gamma$.

α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος EG . (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς BG του τραπεζίου. (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το λόγο: $\frac{(B\Delta\Gamma)}{(AB\Delta)}$. (Μονάδες 8)



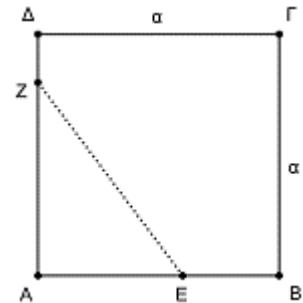
16821. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς a . Στην πλευρά AB θεωρούμε

σημείο E έτσι ώστε $AE = \frac{3}{5}AB$ και στην πλευρά $A\Delta$ θεωρούμε σημείο Z έτσι

ώστε $AZ = \frac{4}{5}A\Delta$.

α) Να υπολογίσετε συναρτήσει του a τα εμβαδά, του τριγώνου AEZ και του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$. (Μονάδες 12)

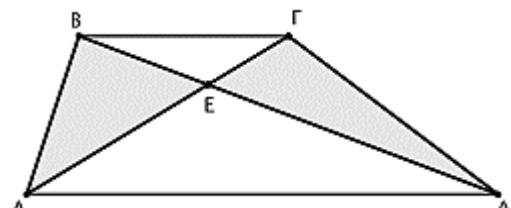
β) Αν γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν του πενταγώνου $EB\Gamma\Delta Z$ είναι ίσο με 76 να υπολογίσετε το μήκος α της πλευράς του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$. (Μονάδες 13)



22032. Θεωρούμε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($B\Gamma//A\Delta$) και έστω E το σημείο τομής των διαγωνίων του $A\Gamma$ και $B\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma\Delta$ είναι ισοδύναμα. (Μονάδες 13)

β) Να συγκρίνετε τα εμβαδά των γραμμοσκιασμένων τριγώνων ABE και $\Delta\Gamma E$. (Μονάδες 12)

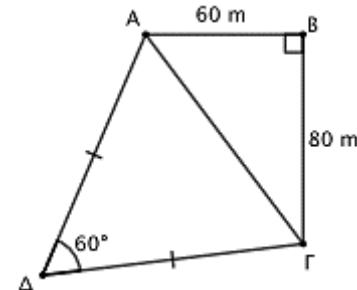


22035.Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος παριστάνει την κάτοψη ενός κτήματος με $AB = 60$ m, $B\Gamma = 80$ m, $\angle \Delta = 60^\circ$ και $\angle A\Delta = \angle \Gamma\Delta$.

- a) Να υπολογίσετε το μήκος της διαγωνίου $A\Gamma$.
 (Μονάδες 09)

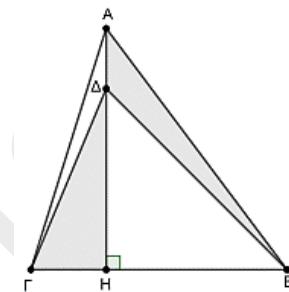
b) Να αιτιολογήσετε γιατί το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισόπλευρο.
 (Μονάδες 04)

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν των τριγώνων $AB\Gamma$ και $A\Delta\Gamma$. Πόσο είναι το συνολικό εμβαδόν του κτήματος;
 (Μονάδες 12)



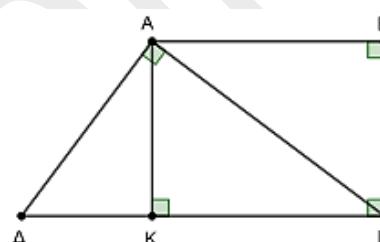
22331.Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του σχήματος το AH είναι ύψος και το Δ σημείο του AH . Δίνονται $AB = 20$, $BH = 12$, $\Gamma H = 5$, και ότι το εμβαδόν του $AB\Delta$ είναι $(AB\Delta) = 24$.

- a) Να αποδείξετε ότι $AH = 16$.
 (Μονάδες 13)
 b) Να αποδείξετε ότι $A\Delta = 4$.
 (Μονάδες 6)
 γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $\Gamma\Delta H$.
 (Μονάδες 6)



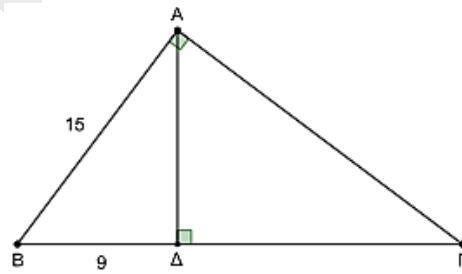
22338.Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $B = \Gamma = 90^\circ$ και στο οποίο η πλευρά $A\Delta$ και η διαγώνιος $A\Gamma$ είναι κάθετες. Έστω K η προβολή της κορυφής A στην πλευρά $\Gamma\Delta$, $KA = 9$ και $KG = 16$..
 a) Να αποδείξετε ότι $AK = 12$.

- b) Να βρείτε το εμβαδόν του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$.
 (Μονάδες 13)



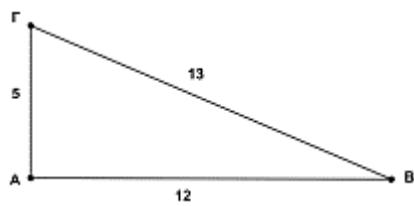
22339.Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A = 90^\circ$ και έστω Δ η προβολή της κορυφής A στην υποτείνουσα $B\Gamma$. Έστω επίσης $AB = 15$ και $\Delta B = 9$.

- a) Να αποδείξετε ότι:
 i. $B\Gamma = 25$,
 ii. $A\Gamma = 20$.
 b) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.
 (Μονάδες 7)



22513.Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 12$, $A\Gamma = 5$ και $B\Gamma = 13$.

- a) Να αποδείξετε ότι $A = 90^\circ$.
 (Μονάδες 8)
 b) Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$.
 (Μονάδες 8)
 γ) Να υπολογίσετε το ύψος u_α .
 (Μονάδες 9)



4^o Θέμα

16807.Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με διαστάσεις $AB = 24$, $B\Gamma = 12$ και σημείο E στην ευθεία AB .

- a) Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδό του τριγώνου $\Gamma\Delta E$ όταν:
 i. Το σημείο E είναι το μέσο της πλευράς AB .
 ii. Το σημείο E ταυτίστει με την κορυφή A του ορθογωνίου.
 (Μονάδες 16)
 β) Αφήνουμε το σημείο E να κινηθεί στην προέκταση του τμήματος AB προς το B , απομακρυνόμενο από το σημείο B .
 i. Να εξετάσετε αν η περίμετρος του τριγώνου $\Gamma\Delta E$ αυξάνεται ή μειώνεται.
 (Μονάδες 05)
 ii. Για το εμβαδό του τριγώνου $\Gamma\Delta E$ συμβαίνει η ίδια μεταβολή με αυτή που απαντήσατε για την περίμετρο του τριγώνου $\Gamma\Delta E$ στο ερώτημα β).; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
 (Μονάδες 04)

16135.Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με υποτείνουσα $B\Gamma = 10$ και έστω ότι Δ είναι η προβολή της κορυφής A στην $B\Gamma$.

a) Αν $\Delta B = 2$ να υπολογίσετε:

- i. το ύψος $A\Delta$ του τριγώνου ABG ,
- ii. το εμβαδόν του τριγώνου ABG .

β) Υποθέστε ότι το σημείο A κινείται πάνω στο ημικύκλιο με διάμετρο την BG .

- i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ABG είναι $(ABG) = 5A\Delta$.
(Μονάδες 7)

ii. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

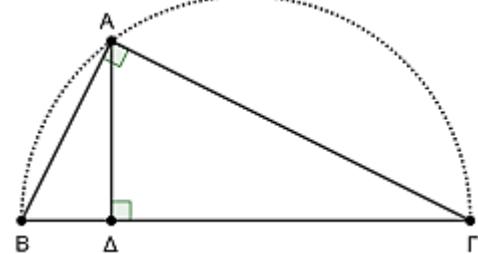
«Για όλες τις θέσεις του A πάνω στο ημικύκλιο με διάμετρο την BG , το εμβαδόν του τριγώνου ABG δεν υπερβαίνει το 25».

Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
(Μονάδες 6)

(Μονάδες 7)

(Μονάδες 5)



17349. Δίνεται τετράγωνο $ABGD$ πλευράς 3 και σημείο E της πλευράς $A\Delta$, ώστε $AE = 4 - \sqrt{3}$. το ημιεπίπεδο που ορίζουν η ευθεία BE και το σημείο G κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο BEZ . Οι $\Gamma\Delta$ και EZ τέμνονται στο σημείο H και $\Delta H = \sqrt{3}$.

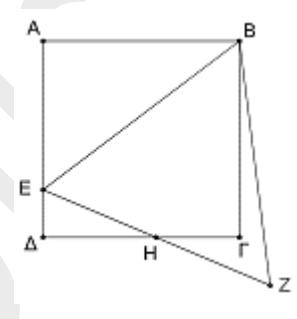
- a)** Να αποδείξετε ότι $BE = 2\sqrt{7 - 2\sqrt{3}}$.

(Μονάδες 8)

- β)** Να αποδείξετε το H είναι το μέσο της EZ .

(Μονάδες 8)

- γ)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται στο εσωτερικό του ισόπλευρου τριγώνου BEZ και εξωτερικά του τετραγώνου $ABGD$.



(Μονάδες 9)

18173. Δίνεται τραπέζιο $ABGD$ με $AB // \Gamma\Delta$ και $\Gamma\Delta = 2AB$. Δίνεται επίσης ότι το σημείο K είναι μέσο της $\Gamma\Delta$ και M τυχαίο σημείο στην $A\Delta$.

a) Να αποδείξετε ότι:

- i. $(BKG) = \frac{1}{2}(ABK\Delta)$.

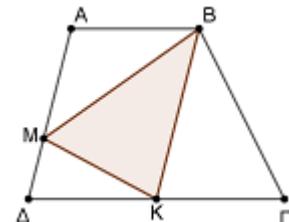
(Μονάδες 09)

- ii. $(BMK) = (BKG)$

(Μονάδες 09)

- β)** Δίνεται η πρόταση: «Αν το σημείο M κινείται πάνω στο εσωτερικό της $A\Delta$, τότε ο λόγος των εμβαδών $(ABG\Delta)$ και (MBK) παραμένει σταθερός και ίσος με 3». Να διερευνήσετε την ορθότητα της πρότασης αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 07)



18553. Δίνεται τετράγωνο με πλευρά α και σημείο S στην προέκταση της πλευράς AB προς το B τέτοιο ώστε $B\Sigma = AB$.

a) Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του α :

- i. Το εμβαδό του τριγώνου $\Sigma\Delta\Gamma$.

- ii. Το μήκος της πλευράς $\Sigma\Gamma$ του τριγώνου $\Sigma\Delta\Gamma$.
(Μονάδες 10)

- β)** Θεωρούμε τυχαίο σημείο S' στην προέκταση της πλευράς AB προς το B τέτοιο ώστε $B\Sigma' > B\Sigma$.

Να συγκρίνετε αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας:

- i. Το εμβαδό του τριγώνου $\Sigma'\Delta\Gamma$ με το εμβαδό του τριγώνου $\Sigma\Delta\Gamma$.

- ii. Το μήκος της πλευράς $\Sigma'\Gamma$ με το μήκος της πλευράς $\Sigma\Gamma$ των τριγώνων $\Sigma'\Delta\Gamma$ και $\Sigma\Delta\Gamma$ αντίστοιχα.

- iii. Τις αποστάσεις του σημείου Δ από τις ευθείες $\Sigma\Gamma$ και $\Sigma'\Gamma$.
(Μονάδες 15)

18557. Δίνεται τραπέζιο $ABGD$ με βάσεις AB και $\Gamma\Delta$, ώστε $AB > \Gamma\Delta$. Από τις κορυφές Γ και Δ φέρουμε $\Gamma E // A\Delta$ και $\Delta Z // \Gamma B$, με E και Z σημεία στην πλευρά AB του τραπεζίου.

- α)** Να συγκρίνετε τα εμβαδά των τετραπλεύρων $A\Delta\Gamma E$ και $B\Gamma\Delta Z$.
(Μονάδες 9)

- β)** Να εκφράσετε τις περιμέτρους των τετραπλεύρων $A\Delta\Gamma E$ και $B\Gamma\Delta Z$ ως συνάρτηση των πλευρών του τραπεζίου $ABGD$.
(Μονάδες 8)

- γ)** Πώς θα πρέπει να κατασκευάσουμε το τραπέζιο $ABGD$ ώστε τα τετράπλευρα $A\Delta\Gamma E$ και $B\Gamma\Delta Z$ να έχουν ίσες περιμέτρους και ίσα εμβαδά;
(Μονάδες 8)

18562. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς α.

- a) Να αποδείξετε ότι το μήκος της διαγωνίου $B\Delta$ ισούται με $\alpha\sqrt{2}$ και να βρείτε το εμβαδό του.
(Μονάδες 05)

β) i. Να σχεδιάσετε το τετράγωνο $B\Delta ZH$ έτσι ώστε το σημείο A να είναι εσωτερικό σημείο του και να αποδείξετε ότι το σημείο A είναι το κέντρο του τετραγώνου $B\Delta ZH$. (Μονάδες 07)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του $B\Delta ZH$ και να το συγκρίνετε με το εμβαδό του αρχικού τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.
(Μονάδες 08)

γ) Επαναλαμβάνουμε το σχεδιασμό όπως περιεγράφηκε παραπάνω και σχηματίζουμε νέο τετράγωνο, με πλευρά κάθε φορά, τη διαγώνιο του προηγούμενου τετραγώνου. Δηλαδή με πλευρά τη διαγώνιο ΔH του τετραγώνου $B\Delta ZH$ σχεδιάζουμε νέο τετράγωνο, το $\Delta H\Theta K$. Με πλευρά τη διαγώνιο HK του $\Delta H\Theta K$ σχεδιάζουμε νέο τετράγωνο κ.ο.κ. Αν θέλουμε να σχεδιάσουμε τετράγωνο του οποίου το εμβαδό του κα είναι 16 φορές το εμβαδό του αρχικού τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$, πόσες φορές ακόμα πρέπει να επαναλάβουμε το σχεδιασμό αυτό; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
(Μονάδες 05)

18564. Ο παππούς του Πέτρου έχει έναν κήπο σχήματος ορθογωνίου και θέλει να φυτέψει στον μισό διάφορα λουλούδια και στο υπόλοιπο γκαζόν. Λέει λοιπόν στον Πέτρο ότι έχει σκεφτεί κάποιους απλούς τρόπους να τον χωρίσει σε δύο κομμάτια που να έχουν το ίδιο εμβαδό.

- a) Να σχεδιάσετε δύο (2) τρόπους με τους οποίους χωρίζεται ο κήπος σε δύο κομμάτια ίδιου εμβαδού και να αιτιολογήσετε τις επιλογές σας.
(Μονάδες 10)

β) Ο Πέτρος προτείνει στον παππού του έναν δικό του τρόπο για το χωρισμό. Για να ορίσει το κομμάτι που κα φυτευτεί με λουλούδια χρησιμοποιεί τρεις πέτρες. Τοποθετεί την πρώτη πέτρα σε ένα εσωτερικό σημείο της μιας πλευράς του κήπου και τις άλλες δύο στις απέναντι κορυφές του ορθογωνίου. Δείχνει στον παππού του το τρίγωνο που σχηματίζεται εξηγώντας του πως είναι το μισό του κήπου. Προτείνει δε στον παππού του, το τριγωνικό χωρίο που σχηματίζεται, να το μετακινηθεί εκείνος σε όποια θέση νομίζει καλύτερα μετακινώντας μόνο την πρώτη πέτρα, χωρίς παρ' όλα αυτά να αλλάξει το εμβαδό του.

- i. Να σχεδιάσετε τον τρόπο που προτείνει ο Πέτρος και να αποδείξετε ότι, το εμβαδό του σχηματιζόμενου τριγωνικού χωρίου είναι το μισό του κήπου.
(Μονάδες 08)

ii. Τι εννοεί ο Πέτρος λέγοντας ότι «το τριγωνικό χωρίο μπορεί να μετακινηθεί όταν αλλάζει η θέση της πρώτης πέτρας σε εσωτερικό σημείο της πλευράς του κήπου και παρ' όλα αυτά δεν αλλάζει το εμβαδό του»; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
(Μονάδες 07)

18565. Δίνονται δύο κύκλοι με κέντρα O και K .

Ο κύκλος με κέντρο O έχει ακτίνα $R=7$ ενώ ο κύκλος με κέντρο K έχει ακτίνα $r=2$.

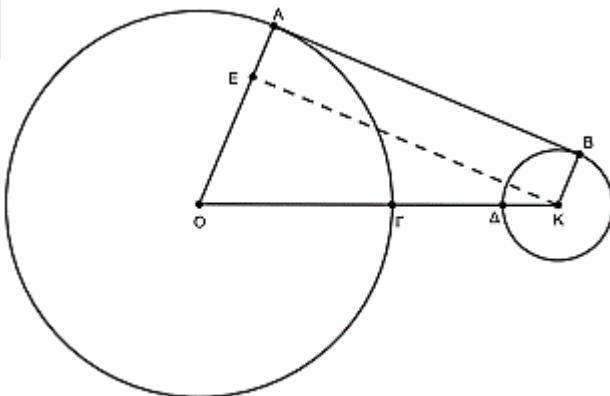
Το τμήμα AB είναι το κοινό εξωτερικό εφαπτόμενο τμήμα των δύο κύκλων και το τμήμα KE είναι παράλληλο στο τμήμα AB με E σημείο του τμήματος OA . Η διάκεντρος OK τέμνει τον κύκλο (O,R) στο σημείο Γ και τον κύκλο (K,r) στο σημείο Δ .

- a) Αν η θέση των δύο κύκλων είναι τέτοια ώστε, η απόσταση των σημείων Γ και Δ είναι $\Gamma\Delta=4$, τότε:

- i. Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος AB .
(Μονάδες 10)

- ii. Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου $ABKO$.
(Μονάδες 07)

- β) Ποια πρέπει να είναι η σχετική θέση των 2 κύκλων, ώστε το εμβαδόν του $ABKE$ να ισούται με $4\sqrt{14}$ τ.μ. ;
(Μονάδες 08)



18566. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A = 90^\circ$.

Με πλευρά την υποτείνουσα $B\Gamma$ και έξω από το τρίγωνο, γράφουμε το τετράγωνο $B\Gamma\Delta E$. Προεκτείνουμε την πλευρά BA προς το A και παίρνουμε σημείο Z τέτοιο ώστε $BZ = B\Gamma$. Από τα σημεία Γ και Z φέρουμε παράλληλες προς τα τμήματα BZ και $B\Gamma$ αντίστοιχα, που τέμνονται στο σημείο H .

- a) Να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο $B\Gamma\Delta Z$ είναι ρόμβος και να βρείτε τις περιμέτρους του ρόμβου και του τετραγώνου.
(Μονάδες 10)

- β) Δίνονται οι ισχυρισμοί:

Ισχυρισμός 1: «Ο ρόμβος και το τετράγωνο αφού έχουν ίσες περιμέτρους, θα έχουν και ίσα εμβαδά».

Ισχυρισμός 2: «Ο ρόμβος έχει μικρότερο εμβαδό από το τετράγωνο και μάλιστα, όπως έχουν κατασκευαστεί τα δύο τετράπλευρα δεν γίνεται να είναι ποτέ ισεμβαδικά». Εξετάστε ποιος από τους 2 παραπάνω ισχυρισμούς είναι σωστός και να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 15)

21124.a) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABG με πλευρές $\alpha = 40$, $\beta = 25$, $\gamma = 25$ και αντίστοιχα ύψη $v_\alpha, v_\beta, v_\gamma$. Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο ABG είναι αμβλυγώνιο. (Μονάδες 6)

ii. Το εμβαδόν του τριγώνου ABG είναι $E = 300$ και τα ύψη του είναι $v_\alpha = 15$ και $v_\beta = v_\gamma = 24$. (Μονάδες 7)

iii. Το τρίγωνο που κατασκευάζεται με πλευρές ίσες με τα ύψη $v_\alpha, v_\beta, v_\gamma$ είναι οξυγώνιο. (Μονάδες 7)

β) Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Το τρίγωνο που κατασκευάζεται με πλευρές ίσες με τα ύψη οποιουδήποτε ισοσκελούς και αμβλυγωνίου τριγώνου, είναι ισοσκελές και οξυγώνιο.»

Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

21183.Στο διπλανό σχήμα το τετράγωνο $ABGD$ έχει πλευρά $\sqrt{2}$ και το τετράγωνο ΔEZH έχει πλευρά 1.

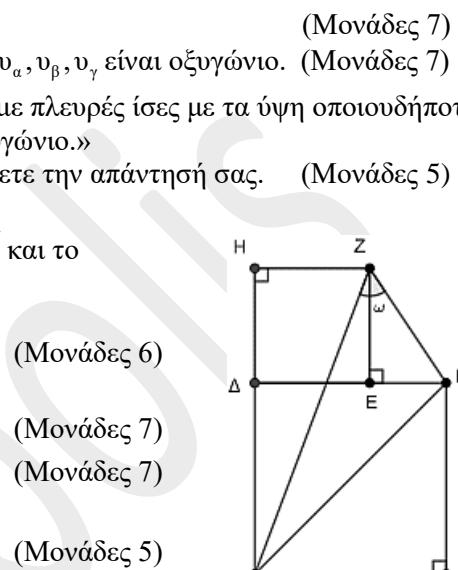
a) Να αποδείξετε ότι $AG = 2$.

b) Να αποδείξετε ότι

i. $AZ^2 = 4 + 2\sqrt{2}$.

ii. $\Gamma Z^2 = 4 - 2\sqrt{2}$.

γ) Να υπολογίστε σε μοίρες το μέτρο της γωνίας $AZ\Gamma = \hat{\omega}$.



(Μονάδες 6)

(Μονάδες 7)

(Μονάδες 7)

(Μονάδες 5)

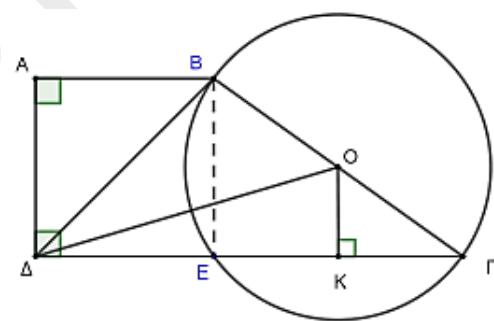
21840.Έστω $ABGD$ τραπέζιο με $A = \Delta = 90^\circ$, $AB = 5$, $\Gamma\Delta = 13$ και εμβαδόν $(ABGD) = 54$. Ο κύκλος με διάμετρο τη BG τέμνει τη $\Gamma\Delta$ στο σημείο E .

a) Να αποδείξετε ότι $AD = 6$. (Μονάδες 6)

β) Να υπολογίσετε το μήκος των BE και BG . (Μονάδες 6)

γ) Αν OK είναι η κάθετη από το σημείο O στην EG , να αποδείξετε ότι $OK = 3$, και να υπολογίσετε το μήκος της OD . (Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου BDO . (Μονάδες 7)



22100. Δίνεται τρίγωνο ABG με γωνίες

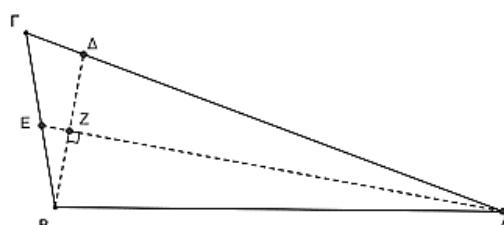
$A = 20^\circ$, $B = 100^\circ$, και η διχοτόμος AE της γωνίας του A . Από το B φέρνουμε την κάθετη προς την AE και έστω Z , Δ τα σημεία τομής της καθέτου με τις AE , AG αντίστοιχα.

a) Να αποδείξετε ότι:

i. $\Gamma B\Delta = A = 20^\circ$. (Μονάδες 10)

ii. Το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ομοιο με το τρίγωνο ABG , να γράψετε τα ζεύγη των ομόλογων πλευρών τους και να αιτιολογήσετε γιατί είναι αυτές οι πλευρές ομόλογες. (Μονάδες 10)

β) Να σχεδιάστε εξωτερικά του τριγώνου ABG δύο τετράπλευρα: ένα τετράγωνο με πλευρά ΓB και ένα ορθογώνιο που η μία του πλευρά είναι η πλευρά AG του τριγώνου ABG και η άλλη του πλευρά είναι ευθύγραμμο τμήμα ίσο με το ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma\Delta$. Να εξετάστε αν τα δύο τετράπλευρα, που σχεδιάσατε, έχουν ίσα εμβαδά.



(Μονάδες 5)

22104.Σε τρίγωνο ABG θεωρούμε σημείο Δ εσωτερικό της πλευράς του BG . Έστω M το μέσο M του τμήματος $A\Delta$.

a) Να αποδείξετε ότι:

i. $(ABM) = \frac{1}{2}(AB\Delta)$. (Μονάδες 8)

ii. $(ABM) + (M\Delta\Gamma) = \frac{1}{2}(AB\Gamma)$. (Μονάδες 9)

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει θέση του σημείου Δ τέτοια ώστε τα τρίγωνα ABM και MΔΓ να έχουν ίσα εμβαδά. Στην περίπτωση που υπάρχει θέση του σημείου Δ για την οποία τα εμβαδά των τριγώνων ABM και MΔΓ είναι ίσα, να βρείτε τι μέρος του εμβαδού του τριγώνου ABΓ είναι το εμβαδόν του κάθε τριγώνου ABM και MΔΓ. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

22396.Στο διπλανό σχήμα, δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ με $AB = AG$ και έστω Δ η προβολή του σημείου B πάνω στην ευθεία AG.

Έστω $A\Delta = 3$ και $\Delta\Gamma = 2$.

α) Να αποδείξετε ότι:

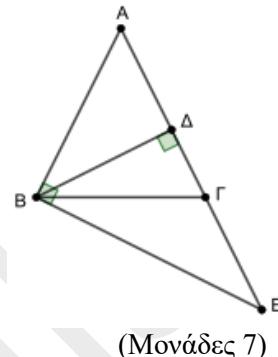
i. $B\Delta = 4$. (Μονάδες 6)

ii. $(AB\Gamma) = 10$. (Μονάδες 6)

β) Έστω ότι η κάθετη της AB στο σημείο B, τέμνει την προέκταση της AG στο σημείο E. Να βρείτε:

i. Το μήκος του ΔE . (Μονάδες 6)

ii. Το εμβαδόν του τριγώνου BGE. (Μονάδες 7)



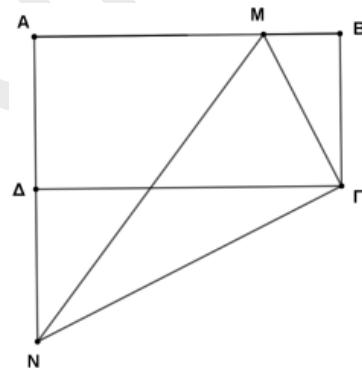
22509.Θεωροφμε ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 2a$ και $A\Delta = a$. Στην πλευρά AB θεωρούμε σημείο M με $MB = x$ και στην προέκταση της $A\Delta$ σημείο N με $\Delta N = 2x$.

α) Να υπολογίσετε ως συνάρτηση των a , x τα $M\Gamma^2$, $N\Gamma^2$ και MN^2 . (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο MNΓ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 6)

γ) Να υπολογίσετε συναρτήσει των a , x τα εμβαδά των τριγώνων AMN και GMN . (Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε τη θέση του σημείου M, πάνω στην AB ώστε τα τρίγωνα AMN και GMN να είναι ισεμβαδικά. (Μονάδες 5)



22510.Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου O. Θεωρούμε τις διαμέτρους $A\Delta$, BE και $ΓZ$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $(AOB) = (BO\Delta)$ και $(AO\Gamma) = (\Delta O\Gamma)$

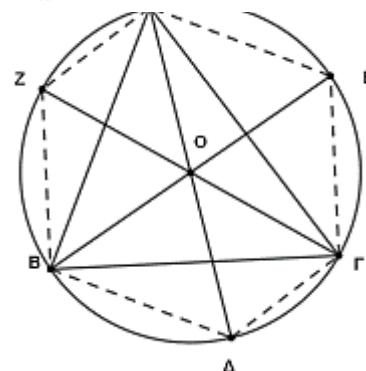
(Μονάδες 8)

β) $(B\Delta\Gamma) = (AOB) + (AO\Gamma) - (BO\Gamma)$

(Μονάδες 8)

γ) $(AZB\Delta\Gamma E) = 2(AB\Gamma)$

(Μονάδες 9)



3^o Θέμα

17908.Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ τα μήκη των πλευρών του είναι $a = 4$, $b = \sqrt{17}$ και $c = 5$.

α) Να βρείτε το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$, ως προς τις γωνίες του. (Μονάδες 9)

β) Αν $A\Delta$ είναι το ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$ από την κορυφή A, τότε:

i. να υπολογίσετε το ΔB . (Μονάδες 9)

ii. να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 7)

Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου

2^o Θέμα

15979. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=AG=5$ και $A=120^\circ$. Να αποδείξετε ότι:

a) $BG = 5\sqrt{3}$ (Μονάδες 13)

b) $(AB\Gamma) = \frac{25\sqrt{3}}{4}$ (Μονάδες 12)

17346. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 6$, $BG = 4$ και $B = 60^\circ$.

a) Να αποδείξετε ότι $AG = 2\sqrt{7}$. (Μονάδες 8)

b) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του. (Μονάδες 9)

c) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 8)

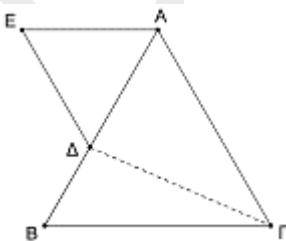
Δίνεται ότι $\eta\mu60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\sin60^\circ = \frac{1}{2}$.

17347. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο πλευράς 10 και το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισόπλευρο πλευράς 6.

a) Να αποδείξετε ότι $(A\Gamma\Delta) = 15\sqrt{3}$. (Μονάδες 12)

b) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου $A\Gamma\Delta E$. (Μονάδες 13)

Δίνεται ότι $\eta\mu60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



21196. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με κάθετες πλευρές $\beta = 8$ και $\gamma = 6$.

a) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι $E = 24$. (Μονάδες 5)

b) Να υπολογίσετε:

i. Να υπολογιστεί το μήκος της πλευράς α του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 6)

ii. Το ύψος του ν_a που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα α του τριγώνου. (Μονάδες 7)

iii. Την ακτίνα ρ του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου. (Μονάδες 7)

21838. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές $AB=8$, $AG=12$ και γωνία

$A = 60^\circ$.

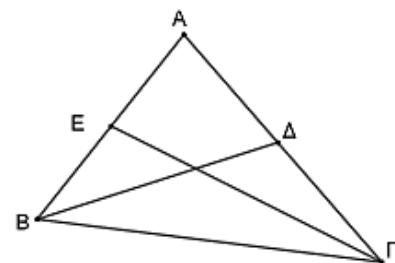
a) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι $(AB\Gamma) = 24\sqrt{3}$. (Μονάδες 13)

b) Αν $B\Delta$ και ΓE διάμεσοι του τριγώνου $AB\Gamma$, να αποδείξετε ότι :

i. Τα τρίγωνα $BE\Gamma$ και $AE\Gamma$ είναι ισοδύναμα. (Μονάδες 4)

ii. Τα τρίγωνα $EB\Gamma$ και ΔGB είναι ισοδύναμα με

$(EB\Gamma) = (\Delta GB) = 12\sqrt{3}$. (Μονάδες 8)

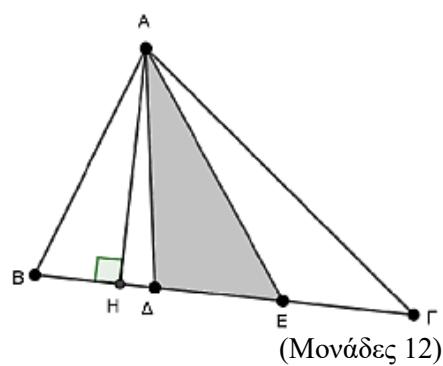


22259. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και στην πλευρά του $B\Gamma$, τα σημεία Δ, E ώστε $B\Delta = \Delta E = E\Gamma$. Από την κορυφή A , φέρνουμε το ύψος AH του τριγώνου $AB\Gamma$.

a) Να αποδείξετε ότι $(A\Delta E) = \frac{1}{3}(AB\Gamma)$. (Μονάδες 13)

b) Αν M είναι το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι

$(AME) = \frac{1}{6}(AB\Gamma)$. (Μονάδες 12)



22511. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 2$, $AG = 3$ και $A = 60^\circ$. Να υπολογίσετε:

a) το μήκος της πλευράς $B\Gamma$. (Μονάδες 9)

b) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 8)

γ) το ύψος v_a .

(Μονάδες 8)

4ο Θέμα

22101. Δίνεται τρίγωνο ABG του οποίου οι πλευρές AB και AG έχουν σταθερά μήκη 3 και 4 αντίστοιχα.

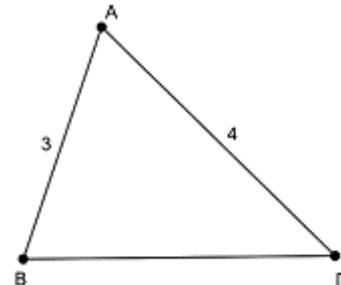
α) Αν η γωνία A έχει μέτρο 60° , τότε να υπολογίσετε:

i. Το εμβαδόν του τριγώνου ABG . (Μονάδες 08)

ii. Το μήκος της πλευράς BG . (Μονάδες 09)

β) Πόσο πρέπει να είναι το μέτρο της γωνίας A ώστε το εμβαδόν του τριγώνου ABG να γίνεται μέγιστο;

Να υπολογίσετε το μέγιστο εμβαδόν και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 08)



22369. Δίνεται τρίγωνο ABG με $AB = 8$, $BG = 7$ και

$A = 60^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι $AG = 3$ ή $AG = 5$. (Μονάδες 6)

β) Έστω ότι το τρίγωνο ABG είναι οξυγώνιο όπως στο διπλανό σχήμα.

i. Να αποδείξετε ότι $AG = 5$. (Μονάδες 6)

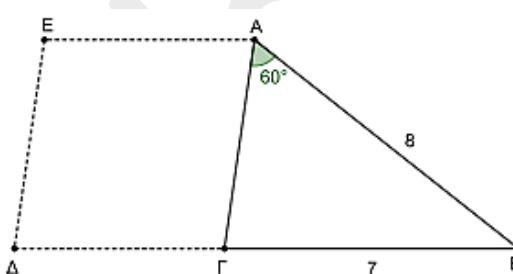
ii. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου είναι

$(ABG) = 10\sqrt{3}$. (Μονάδες 6)

iii. Προεκτείνουμε τη BG κατά τμήμα $\Delta = AG$ και σχηματίζουμε τον ρόμβο $AG\Delta E$.

Να βρείτε το εμβαδόν του ρόμβου $AG\Delta E$.

(Μονάδες 7)



22568. Δίνεται κύκλος με κέντρο το σημείο Λ και ακτίνα $R=10$, ο οποίος διέρχεται από το κέντρο ενός άλλου κύκλου με κέντρο το σημείο K και ακτίνα $r=6$. Η εφαπτομένη του κύκλου (K,r) στο σημείο του G τέμνει τον κύκλο (Λ,R) στα σημεία A και B .

Η προέκταση της KL προς το Λ τέμνει τον κύκλο (Λ,R) στο σημείο Δ .

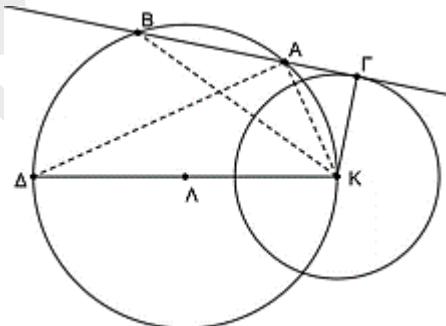
α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα KBG και $KA\Delta$ είναι όμοια. (Μονάδες 8)

ii. $KA \cdot KB = 120$ (Μονάδες 9)

β) Αν είναι $KB=15$, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου AGK .

(Μονάδες 8)



3^ο Θέμα

21783. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABG , με $\Gamma = 90^\circ$, $A = 30^\circ$ και

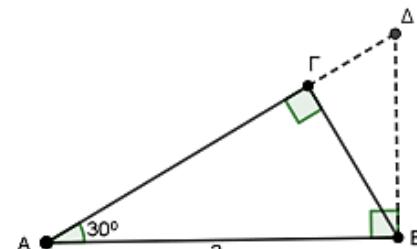
$AB = 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $AG = \sqrt{3}$. (Μονάδες 7)

β) Φέρνουμε κάθετη στην AB , στο σημείο B , που τέμνει την προέκταση της AG στο Δ .

Να αποδείξετε ότι $AD = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. (Μονάδες 10)

γ) Αν K είναι το μέσο της AD , να αποδείξετε ότι $(KAB) = \frac{\sqrt{3}}{3}$. (Μονάδες 8)



Λόγος Εμβαδών

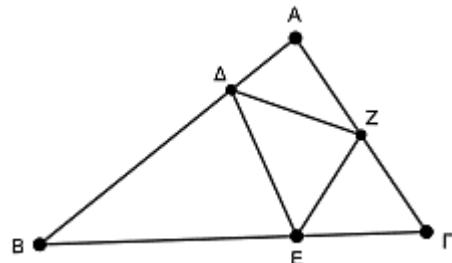
2º Θέμα

15978.Στο τρίγωνο ABG του παρακάτω σχήματος, τα Δ , E , Z , είναι σημεία των πλευρών AB , BG , AG αντίστοιχα, ώστε:

$$\Delta A = \frac{1}{4} AB, BE = \frac{2}{3} BG \text{ και } GZ = \frac{1}{2} AG. \text{ Να αποδείξετε ότι:}$$

a) $(\Delta \Delta Z) = \frac{1}{8} (ABG), (\Delta BE \Delta) = \frac{1}{2} (ABG), (\Delta GEZ) = \frac{1}{6} (ABG).$
(Μονάδες 15)

b) $(\Delta EZ) = \frac{5}{24} (ABG)$
(Μονάδες 10)



16127.Ένα τρίγωνο έχει πλευρά $BG = 9$ και αντίστοιχο ύψος $A\Delta = 8$.

a) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ABG .
(Μονάδες 9)

b) Ένα άλλο τρίγωνο $A'B'G'$ είναι όμοιο με το τρίγωνο ABG και η ομόλογη πλευρά της BG είναι η $B'G' = 6$. Να υπολογίσετε:

- i. τον λόγο ομοιότητας των τριγώνων ABG και $A'B'G'$,
ii. το εμβαδόν του τριγώνου $A'B'G'$.

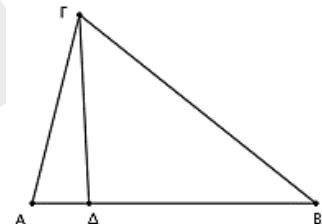
(Μονάδες 7)
(Μονάδες 9)

16756.Θεωρούμε τρίγωνο ABG και τυχαίο σημείο Δ της πλευράς AB .

a) Να αποδείξετε ότι $\frac{(\Delta BG)}{(\Delta ABG)} = \frac{AB}{\Delta B}$.

(Μονάδες 15)

b) Αν $(ABG) = 25$ και $AB = 5A\Delta$, τότε να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΔBG .
(Μονάδες 10)

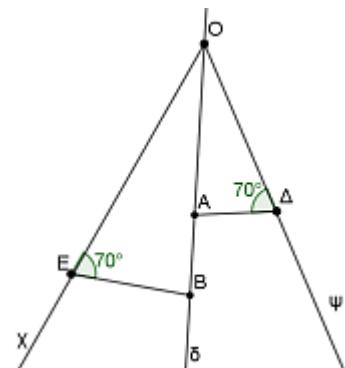


16770.Δίνεται γωνία χ οψ και η διχοτόμος της Οδ. Πάνω στην Οδ παίρνουμε τυχαία σημεία A και B . Θεωρούμε σημείο E στην πλευρά Οχ τέτοιο ώστε $OEB = 70^\circ$ και σημείο Δ στην Οψ τέτοιο ώστε $O\Delta A = 70^\circ$.

a) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα OEB και $O\Delta A$ είναι όμοια.
(Μονάδες 10)

b) Αν $\frac{OA}{OB} = \frac{2}{3}$ να υπολογίσετε τους λόγους των ανάλογων πλευρών των τριγώνων.
(Μονάδες 06)

γ) Αν το εμβαδόν του τριγώνου $O\Delta A$ είναι 28 τ.μ. να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου OEB .

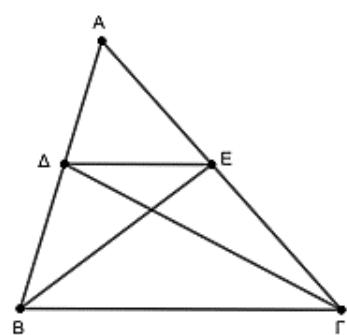


(Μονάδες 09)

16806.Δίνεται τρίγωνο ABG και από τυχαίο σημείο Δ της πλευράς AB φέρουμε παράλληλη στην πλευρά BG που τέμνει την AG στο σημείο E .

a) Να δικαιολογήσετε γιατί $\frac{(\Delta \Delta E)}{(\Delta EBG)} = \frac{A\Delta}{\Delta B}$ και $\frac{(\Delta \Delta E)}{(\Delta E\Gamma)} = \frac{AE}{EG}$.
(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι $(\Delta EBG) = (\Delta E\Gamma)$.
(Μονάδες 12)



18561. Δίνεται τρίγωνο ABG . Προεκτείνουμε την πλευρά BG κατά τμήμα $\Gamma\Delta=BG$ και την πλευρά AB κατά τμήμα $\Gamma E=AB$.

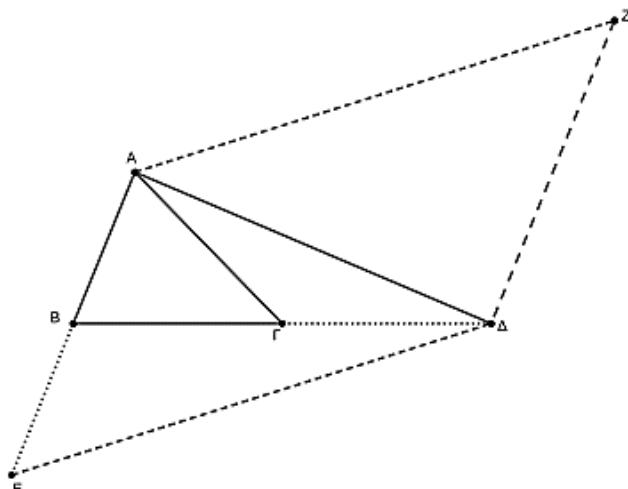
- a) Αν $(ABG)=25 \text{ m}^2$, να αποδείξετε ότι $(B\Delta E)=50 \text{ m}^2$.

(Μονάδες 10)

β) Από την κορυφή A φέρουμε ευθεία παράλληλη στην $E\Delta$ και από την κορυφή Δ ευθεία παράλληλη στην EA που τέμνονται στο σημείο Z .

Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AZ\Delta$ είναι 4-πλάσιο του εμβαδό του τριγώνου ABG .

(Μονάδες 15)



20667. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τρίγωνο ABG με $BG = 8$. Στην προέκταση της GB προς το B παίρνουμε σημείο Δ , ώστε $\Delta B = 4$ και E είναι το μέσο της AG .

- a) Να αποδείξετε ότι $(ABG) = 4AG \cdot \eta\mu\Gamma$.

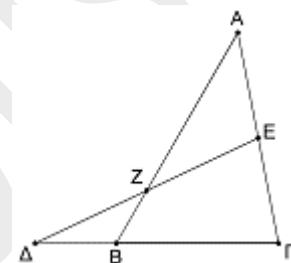
(Μονάδες 8)

- β) Να αποδείξετε ότι $(\Gamma\Delta E) = 3AG \cdot \eta\mu\Gamma$.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών των τριγώνων ABG και $\Gamma\Delta E$ και να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ABG , αν το εμβαδόν του τριγώνου $\Gamma\Delta E$ είναι 12 τ.μ.

(Μονάδες 8)



21120. Εστω τρίγωνο ABG με $AB = \sqrt{2}$. Από σημείο Δ της πλευράς AB ώστε $\Delta A = 1$, φέρνουμε παράλληλη στη BG η οποία τέμνει την AG στο σημείο E .

- a) Να αποδείξετε ότι:

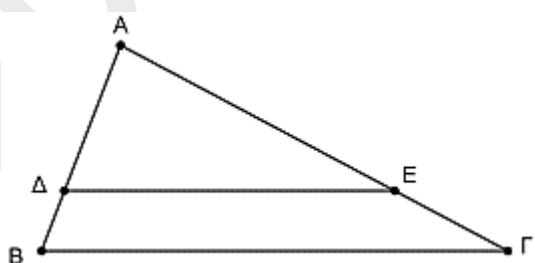
i. τα τρίγωνα $A\Delta E$ και ABG είναι όμοια και να γράψετε τον λόγο ομοιότητας,

ii. το εμβαδόν του τριγώνου $A\Delta E$ είναι το μισό του εμβαδού του τριγώνου ABG .

(Μονάδες 18)

- β) Αν το εμβαδόν του τριγώνου ABG είναι 2, να βρείτε τα εμβαδά του τριγώνου $A\Delta E$ και του τραπεζίου $BGE\Delta$.

(Μονάδες 7)



21304. Δίνεται το τρίγωνο ABG με $AB = 1$.

Στις προεκτάσεις των πλευρών AB και AG παίρνουμε σημεία Δ και E , αντίστοιχα, ώστε $\eta\Delta E$ να είναι παράλληλη στη BG και $\Delta B = 2$.

- a) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABG και $A\Delta E$ είναι όμοια με λόγο ομοιότητα $1/3$.

(Μονάδες 10)

- β) Αν η περίμετρος του τριγώνου ABG είναι ίση με 8,5, να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου $A\Delta E$.

(Μονάδες 08)

- γ) Αν το εμβαδόν του τριγώνου $A\Delta E$ είναι 15, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ABG .

(Μονάδες 07)

21636. Δίνεται τρίγωνο ABG , με μήκη πλευρών $AB=6$, $AG=8$, και $BG=10$.

- a) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ABG είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 10)

- β) Αν ΔA είναι ύψος του τριγώνου ABG τότε:

i. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma\Delta$ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\lambda = \frac{3}{4}$.

(Μονάδες 10)

ii. Να υπολογίσετε το λόγο: $\frac{(AB\Delta)}{(A\Gamma\Delta)}$.

(Μονάδες 5)

22070. Ένα τρίγωνο ABG έχει μήκη πλευρών $\alpha = 17$, $\beta = 8$, $\gamma = 15$.

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ABG είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 13)

β) Αν $A\Delta$ είναι το ύψος του τριγώνου ABG :

i. Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma\Delta$ είναι όμοια και να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους λ .

ii. Να υπολογίσετε το λόγο των εμβαδών $\frac{(\Delta B\Delta)}{(\Delta A\Gamma)}$. (Μονάδες 12)

4^o Θέμα

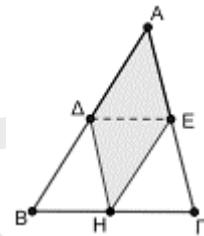
16582. Στο διπλανό τρίγωνο ABG τα Δ και E είναι σημεία των πλευρών AB και AG αντίστοιχα.

α) Έστω ότι $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{AG} = \frac{1}{2}$.

i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $A\Delta E$ είναι ίσο με το $\frac{1}{4}$ του εμβαδού του τριγώνου ABG . (Μονάδες 07)

ii. Αν H είναι σημείο του ευθύγραμμου τμήματος BG να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραπλεύρου $A\Delta H E$ είναι ίσο με το μισό του εμβαδού του τριγώνου ABG . (Μονάδες 12)

β) Αν γνωρίζετε ότι $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{AG} = \lambda$, τότε ποια είναι η σχέση των εμβαδών του τετραπλεύρου $A\Delta H E$ και του τριγώνου ABG ; (Μονάδες 06)



16732. Έστω τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και M το μέσο της AB . Οι ευθείες ΔM και ΓB τέμνονται στο K . Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα MKB και $\Delta K\Gamma$ είναι όμοια.

(5 μονάδες)

β) $(MKB) = \frac{1}{4}(\Delta K\Gamma)$.

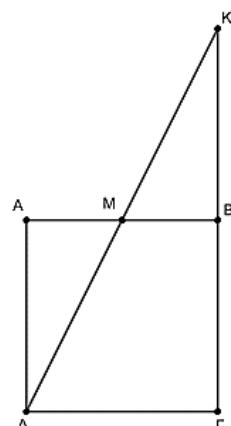
(5 μονάδες)

γ) $(MB\Gamma\Delta) = \frac{3}{4}(AB\Gamma\Delta)$.

(10 μονάδες)

δ) Αν $(MB\Gamma\Delta) = 75 \text{ m}^2$ να υπολογίσετε την πλευρά του τετραγώνου.

(5 μονάδες)



17956. Δίνεται τρίγωνο ABG και σημείο Δ στο εσωτερικό του τμήματος BG . Από το Δ φέρουμε παράλληλες στις πλευρές AB και AG . Η παράλληλη στην AB τέμνει την AG στο Z και η παράλληλη στην AG τέμνει την AB στο E . Θεωρούμε K και Λ τα μέσα των $B\Delta$ και ΔG αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

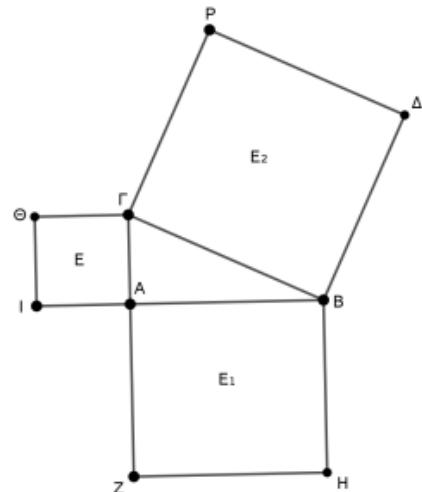
α) $(EK\Delta) = \frac{(B\Delta E)}{2}$. (Μονάδες 09)

β) $(EZ\Delta) = \frac{(A\Delta E\Delta Z)}{2}$. (Μονάδες 09)

γ) Το εμβαδόν του $KEZ\Lambda$ είναι ανεξάρτητο της επιλογής του σημείου Δ . (Μονάδες 07)

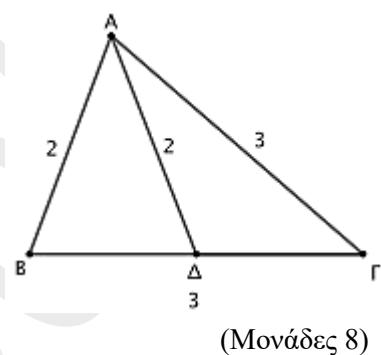
17907. Δίνεται τρίγωνο ABG . Με πλευρές τις AB , AG , BG κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου ABG , τα τετράγωνα $ABHZ$, $AGΘI$, $BΓΡΔ$. Έστω E , E_1 , E_2 , τα εμβαδά των τετραγώνων $AGΘI$, $ABHZ$, $BΓΡΔ$ αντίστοιχα. Αν ισχύουν οι ισότητες $E_1 = 4E$, $E_2 = 5E$ τότε:

- a)** να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ABG είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία A . (Μονάδες 9)
- β)** να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των τριγώνων ABG , AIZ , $BHΔ$, $ΓΡΘ$ είναι ίσα. (Μονάδες 9)
- γ)** αν $AG=1$ να υπολογίσετε το εμβαδόν του πολυγώνου $ZΗΔΡΘΙ$. (Μονάδες 7)



18101. Στο σχήμα, τα τρίγωνα ABG και $ABΔ$ είναι ισοσκελή με $AG = BG = 3$ και $AB = AΔ = 2$.

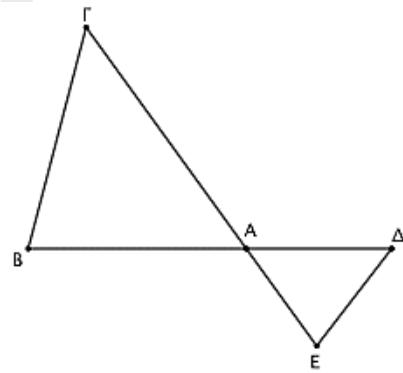
- α)** Να αποδείξετε ότι οι γωνίες B και $BAΓ$ είναι ίσες. (Μονάδες 8)
- β)** Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABG και $BΔA$ είναι όμοια. (Μονάδες 9)
- γ)** Να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{(ABG)}{(BΔA)}$ των εμβαδών των δύο τριγώνων.



(Μονάδες 8)

18301. Σε τρίγωνο ABG προεκτείνουμε τις πλευρές BA και GA κατά τμήματα $AΔ$ και AE αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα.

- α)** Αν είναι $AΔ = \frac{1}{2}AB$ και $AE = \frac{2}{5}AG$, να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{(AΔE)}{(ABG)}$. (Μονάδες 10)
- β)** Αν είναι $AΔ = \frac{1}{\lambda}AB$ και $AE = \frac{\lambda}{\mu}AG$ όπου λ, μ είναι θετικοί ακέραιοι, να αποδείξετε ότι ο λόγος $\frac{(AΔE)}{(ABG)}$ είναι ανεξάρτητος από την τιμή του λ . (Μονάδες 10)
- γ)** Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι «υπάρχουν άπειρα ζεύγη τιμών των ακεραίων λ και μ για τα οποία είναι $(AΔE) = (ABG)$ ». Να εξετάσετε αν ο ισχυρισμός του είναι αληθής και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

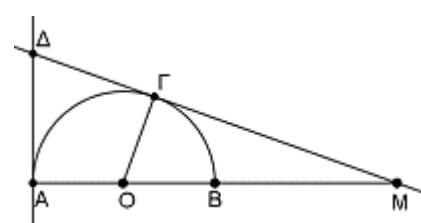


(Μονάδες 10)

γ) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι «υπάρχουν άπειρα ζεύγη τιμών των ακεραίων λ και μ για τα οποία είναι $(AΔE) = (ABG)$ ». Να εξετάσετε αν ο ισχυρισμός του είναι αληθής και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

18370. Δίνεται ημικύκλιο κέντρου O και διαμέτρου $AB = 2\rho$. Στην προέκταση του AB προς το B , θεωρούμε σημείο M . Από το M φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα MG στο ημικύκλιο. Αν η εφαπτόμενη του ημικυκλίου στο σημείο A τέμνει την προέκταση της MG στο Δ τότε:

- α)** Αν $BM = 2\rho$ να αποδείξετε ότι $MG = 2\sqrt{2}\rho$. (Μονάδες 09)
- β)** i. Να αποδείξετε ότι $\frac{MO}{MG} = \frac{MA}{MA}$. (Μονάδες 09)
- ii. Αν για το M ισχύει ότι $BM = \lambda \cdot \rho$, όπου λ θετικός αριθμός, να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ , τέτοια ώστε $(AΔM) = 9(MOΓ)$.



(Μονάδες 07)

18371. Δίνεται τρίγωνο ABG και Δ μέσο της AG . Από το Δ φέρουμε ΔE παράλληλη στην BG και ίση με το μισό της AB όπως στο σχήμα.

a) i. Να αποδείξετε ότι $\frac{(\Delta EG)}{(ABG)} = \frac{\Delta E}{2BG}$. (Μονάδες 10)

ii. Αν το ΔEGB είναι παραλληλόγραμμο, τότε να αποδείξετε ότι $(\Delta EG) = (AB\Delta)$. (Μονάδες 10)

β) Σε ένα τεστ που χρειάστηκε από τους μαθητές να βρεθεί ο λόγος

$\frac{(\Delta EG)}{(ABG)}$ ένας μαθητής έγραψε: «Παρατηρώ ότι τα τρίγωνα ABG και ΔEG έχουν $\Delta = \Gamma$, ως εντός εναλλάξ

των παραλλήλων ΔE και BG που τέμνονται από την ΔG και δύο πλευρές τους ανάλογες, αφού

$\frac{\Delta G}{AG} = \frac{\Delta E}{AB} = \frac{1}{2}$. Επειδή έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις γωνίες τους Δ, Γ ίσες, τα τρίγωνα θα είναι όμοια. Επομένως, ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους $\frac{(\Delta EG)}{(ABG)} = \left(\frac{\Delta E}{AB}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. Ο καθηγητής του του είπε ότι έχει κάνει ένα σημαντικό λάθος.

Μπορείτε να εντοπίσετε σε ποιο σημείο ο συλλογισμός του μαθητή είναι λανθασμένος;

(Μονάδες 05)

21189. Δίνεται παραλληλόγραμμο $ABG\Delta$ και M, N τα μέσα των πλευρών του AB και BG αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

a) $(ABG) = (AG\Delta) = \frac{1}{2}(ABG\Delta)$. (Μονάδες 8)

β) $\frac{(BMN)}{(ABG)} = \frac{1}{4}$. (Μονάδες 12)

γ) $(BMN) = \frac{1}{8}(ABG\Delta)$. (Μονάδες 5)

21194. Δίνεται τρίγωνο ABG , AM η διάμεσός του και E το μέσο της AM . Από το σημείο E φέρουμε παράλληλες στις AB και AG οι οποίες τέμνουν την BG στα σημεία Δ και E αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $(AMB) = (AMG)$ (Μονάδες 5)

β) $(ME\Delta) = \frac{1}{8}(ABG)$. (Μονάδες 12)

γ) $(AB\Delta E) = (AGZE)$ (Μονάδες 8)

18302. Σε τρίγωνο ABG προεκτείνουμε τις πλευρές BA και GA κατά τμήματα $A\Delta$ και AE αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα.

a) Αν είναι $A\Delta = 2AB$ και $AE = \frac{1}{2}AG$, να αποδείξετε ότι τα

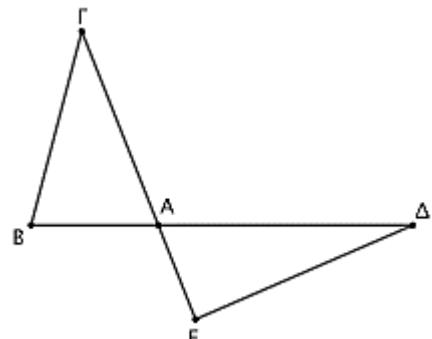
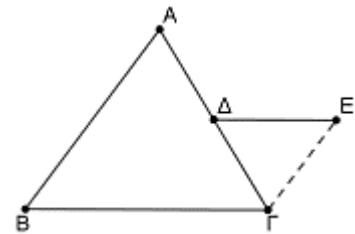
τρίγωνα $A\Delta E$ και ABG είναι ισοδύναμα. (Μονάδες 09)

β) Αν προεκτείνουμε τις πλευρές BA και GA κατά τμήματα είναι $A\Delta = \mu \cdot AB$ και $AE = v \cdot AG$ αντίστοιχα, όπου μ, v είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, ποια πρέπει να είναι η σχέση των αριθμών μ και v ώστε τα τρίγωνα $A\Delta E$ και ABG να είναι ισοδύναμα;

(Μονάδες 10)

γ) Αν είναι $AG = \frac{3}{2}AB$ και $A\Delta = 2AB$, να βρείτε τις δυνατές

θέσεις του E ώστε τα ABG και $A\Delta E$ να είναι όμοια. (Μονάδες 06)



18369. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$, $A = 36^\circ$.

α) Αν η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας B , να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια.

ii. Να γράψετε τους λόγους των ανάλογων πλευρών.

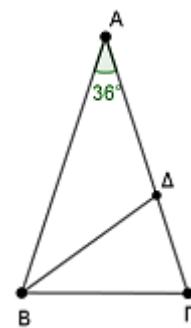
(Μονάδες 10)

β) Μετακινούμε το σημείο Δ στο εσωτερικό της $A\Gamma$.

Για ποια θέση του σημείου Δ θα ισχύει $\frac{(AB\Delta)}{(AB\Gamma)} = 3$.

(Μονάδες 06)

(Μονάδες 09)



20678. Η κορνίζα του παρακάτω σχήματος αποτελείται από δύο όμοια ορθογώνια με παράλληλες πλευρές και κοινό κέντρο O . Το ορθογώνιο $A'B'\Gamma'\Delta'$ έχει το μισό εμβαδόν από το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$.

α) Να βρείτε τον λόγο ομοιότητας του ορθογώνιου $AB\Gamma\Delta$ προς το ορθογώνιο $A'B'\Gamma'\Delta'$. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι όμοια.

(Μονάδες 6)

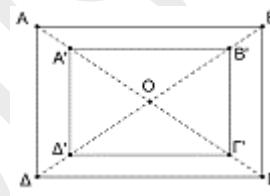
γ) Στην κορνίζα τοποθετούμε μια φωτογραφία που χωράει ακριβώς στο κάδρο, χωρίς να ξανεται κανένα μέρος της.

Η διαγώνιος AB της κορνίζας έχει μήκος 40 cm και $AOB = 120^\circ$.

ι. Πόσο μήκος έχει η διαγώνιος της φωτογραφίας;

(Μονάδες 6)

ii. Πόσο είναι το εμβαδόν της φωτογραφίας;



(Μονάδες 8)

21839. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 6 \text{ cm}$ και $A\Gamma = 3 \text{ cm}$ και

Α οξεία. Εξωτερικά του τριγώνου με πλευρές τις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα του τριγώνου $AB\Gamma$ σχηματίζουμε τα τετράγωνα $AB\Delta E$ και $A\Gamma HZ$ και φέρνουμε την EZ , όπως στο παρακάτω σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AEZ και $AB\Gamma$ είναι ισοδύναμα. (Μονάδες 10)

β) Αν το εμβαδόν του πολυγωνικού χωρίου $EZH\Gamma B\Delta$ είναι $(EZ\Gamma B\Delta) = 54 \text{ cm}^2$:

i. Να αποδείξετε ότι η γωνία A του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι

$A = 30^\circ$.

(Μονάδες 10)

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του τετραγώνου που έχει για πλευρά την πλευρά $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 5)

22023. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Από τυχαίο σημείο Δ της πλευράς AB φέρουμε παράλληλη προς την πλευρά $B\Gamma$ η οποία τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο E .

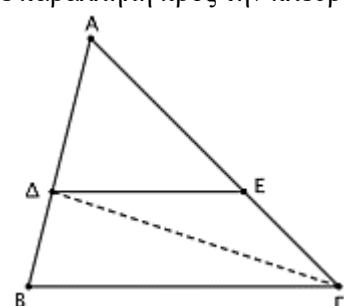
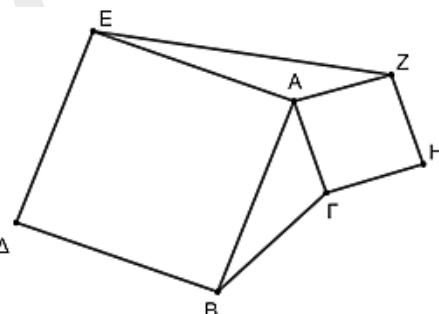
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια.

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών $\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)}$ όταν το σημείο Δ είναι μέσο της AB .

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τη θέση του σημείου Δ ώστε $\frac{(\Delta E\Gamma)}{(AB\Gamma)} = \frac{2}{9}$. (Μονάδες 05)



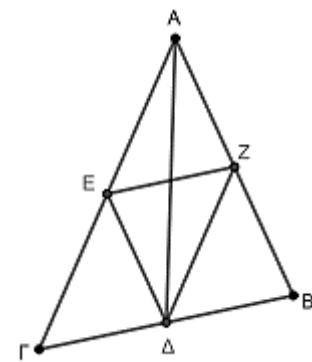
22150. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με E και Z τα μέσα των πλευρών του $A\Gamma$ και AB , αντίστοιχα.

α) Αν επιπλέον το ευθύγραμμό τμήμα $A\Delta$ ενώνει την κορυφή A του τριγώνου $AB\Gamma$ και το μέσο Δ της απέναντι πλευράς $B\Gamma$, όπως στο σχήμα, να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα $E\Delta\Gamma$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{1}{2}$.

ii. Για το εμβαδόν $(AE\Delta Z)$ του τετραπλεύρου $AE\Delta Z$ ισχύει ότι $(AE\Delta Z) = (AB\Gamma) - 2(E\Delta\Gamma)$.

iii. Το εμβαδόν του τετραπλεύρου $AE\Delta Z$ είναι ίσο με το $\frac{1}{2}$ του εμβαδού του τριγώνου $AB\Gamma$.



(Μονάδες 18)

β) Αν το σημείο Δ είναι τυχαίο εσωτερικό σημείο της πλευράς $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$, τότε ισχύει ότι το εμβαδόν του τετραπλεύρου $AE\Delta Z$ είναι ίσο με το $\frac{1}{2}$ του εμβαδού του τριγώνου $AB\Gamma$;

22141. Το ευθύγραμμό τμήμα $B\Gamma$ έχει τα άκρα του B και Γ στις προεκτάσεις των πλευρών ΔA και $E A$, αντίστοιχα, του τριγώνου $A\Delta E$, έτσι ώστε να είναι παράλληλο στην πλευρά ΔE . Επίσης δίνονται τα μήκη των πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$, $AB = 4$ και $A\Gamma = 5$. Έστω ότι ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ είναι $\frac{(AB\Gamma)}{(A\Delta E)} = \frac{1}{4}$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ είναι όμοια με λόγο $\frac{1}{2}$.

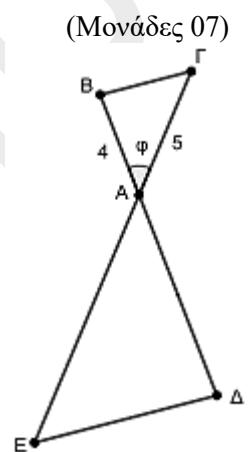
(Μονάδες 10)

β) Αν $BA\Gamma = \varphi$ να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $(A\Delta E)$ του τριγώνου $A\Delta E$ είναι ίσο με $40\eta\mu\varphi$.

(Μονάδες 07)

γ) Να βρείτε σημείο Z εσωτερικό της πλευράς $A\Delta$, ώστε το εμβαδόν του τριγώνου $A\Gamma Z$ που σχηματίζεται να είναι ίσο με το $\frac{1}{4}$ του εμβαδού του τριγώνου $A\Delta E$.

(Μονάδες 08)



22148. Έστω E σημείο στην πλευρά ΓA του τριγώνου $AB\Gamma$. Από το E φέρνουμε παράλληλη στην πλευρά $B\Gamma$ του $AB\Gamma$ η οποία τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Δ και παίρνουμε σημείο Z στην προέκταση $A\chi$ της πλευράς ΓA του τριγώνου $AB\Gamma$ ώστε να είναι $AZ = AE$, όπως στο σχήμα.

α) Έστω $AG=3AE$. Να αποδείξετε ότι:

i. Το εμβαδόν του τριγώνου $A\Delta E$ είναι ίσο με το $\frac{1}{9}$ του εμβαδού του τριγώνου $AB\Gamma$.

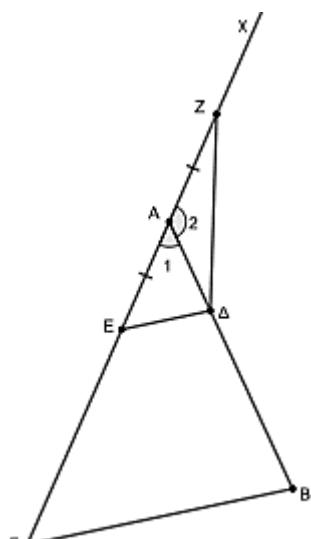
(Μονάδες 07)

ii. Το εμβαδόν του τριγώνου ΔEZ είναι ίσο με τα $\frac{2}{9}$ του εμβαδού του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 10)

β) Αν το εμβαδόν του ΔEZ είναι ίσο με το $\frac{1}{2}$ του εμβαδού του $AB\Gamma$, να υπολογίσετε το λόγο $\frac{AE}{AG}$.

(Μονάδες 08)



22243. Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ και σημείο Z στην πλευρά $\Delta\Gamma$, ώστε

$$AZ = \frac{3}{4}AB.$$

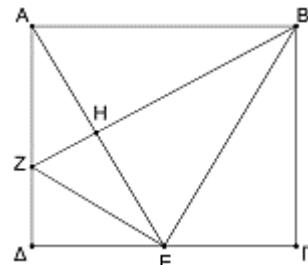
a) Να αποδείξετε ότι $BZ = \frac{5}{4}AB$. (Μονάδες 6)

β) Αν το $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο, E το μέσο της $\Gamma\Delta$ και H είναι το σημείο τομής των AE , BZ , να αποδείξετε ότι:

i. $BE^2 = \frac{5}{4}AB^2$ και $ZE^2 = \frac{5}{16}AB^2$. (Μονάδες 6)

ii. το τρίγωνο BEZ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα BEZ και BGE είναι όμοια και να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών τους. (Μονάδες 8)



22260. Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ του παρακάτω

σχήματος, με $AB=4$, $AG=6$ και $A=150^\circ$.

Αν το σημείο Δ είναι το μέσον της AG και το E

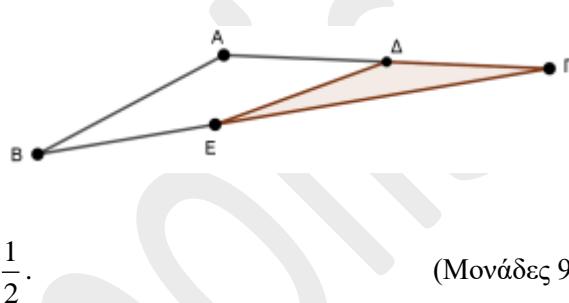
είναι σημείο της BG ώστε $GE = \frac{2}{3}GB$, τότε να

υπολογίσετε:

a) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$. Δίνεται $\eta\mu 150^\circ = \frac{1}{2}$. (Μονάδες 9)

b) το λόγο $\frac{(\Gamma\Delta E)}{(AB\Gamma)}$. (Μονάδες 9)

c) το εμβαδόν του τριγώνου $\Gamma\Delta E$. (Μονάδες 7)



22340. Εστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και το εσωτερικό σημείο K της πλευράς $B\Gamma$.

Θεωρούμε σημείο O του ευθύγραμμου τμήματος AK , ώστε

$$AO = \frac{3}{4}AK. \text{ Από το } O \text{ φέρνουμε ευθεία } \varepsilon \text{ η οποία τέμνει τις πλευρές }$$

AB και AG στα σημεία Δ και E αντίστοιχα.

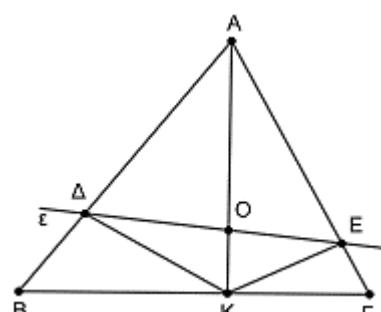
a) Να αποδείξετε ότι:

i. $(AO\Delta) = \frac{3}{4}(AK\Delta)$. (Μονάδες 7)

ii. $(AOE) = \frac{3}{4}(AKE)$. (Μονάδες 7)

iii. $(A\Delta E) = \frac{3}{4}(A\Delta KE)$. (Μονάδες 7)

b) Είναι δυνατόν να ισχύει $(A\Delta E) = \frac{3}{4}(AB\Gamma)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)



22375. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Στην πλευρά $B\Gamma$ παίρνουμε σημείο K ώστε $KB = 2KG$ και στο ευθύγραμμο τμήμα AK παίρνουμε σημείο Λ ώστε

$\Lambda A = 2\Lambda K$. Εστω E_1, E_2, E_3 και E_4 τα εμβαδά των τριγώνων $\Lambda\Gamma K$, $\Gamma\Lambda K$, $B\Lambda K$

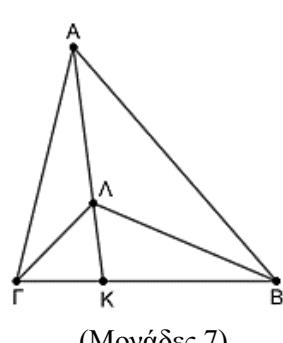
και $\Lambda\Gamma B$ αντίστοιχα.

a) Να αποδείξετε ότι:

i. $\frac{E_1}{E_2} = 2$ και $\frac{E_4}{E_3} = 2$. (Μονάδες 10)

ii. $E_1 = E_3$. (Μονάδες 8)

b) Άν $E_1 = 10$, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 7)



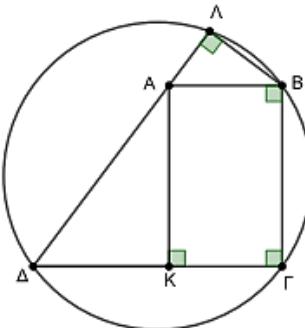
22380. Στο διπλανό σχήμα δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $B = \Gamma = 90^\circ$ και $B\Gamma = 16$, $\Gamma\Delta = 22$ και $A\Delta = 20$. Έστω K η προβολή του σημείου A πάνω στην ευθεία $\Gamma\Delta$ και Λ η προβολή του σημείου B πάνω στην ευθεία $A\Delta$.

a) Να αποδείξετε ότι:

- i. $KA = 12$, (Μονάδες 6)
- ii. το εμβαδόν του τριγώνου $AK\Delta$ είναι 96. (Μονάδες 6)

b) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AK\Delta$ και $B\Lambda A$ είναι όμοια και να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $B\Lambda A$. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το μήκος της διαμέτρου του περιγεγραμμένου κύκλου του τετραπλεύρου $B\Gamma\Delta\Lambda$. (Μονάδες 5)



22404. Το σημείο M διαιρεί εσωτερικά την πλευρά $B\Gamma$ ενός τριγώνου $AB\Gamma$

σε λόγο $\frac{MB}{MG} = \frac{NA}{NM}$ και το σημείο N διαιρεί εξωτερικά το ευθύγραμμο

τμήμα AM σε λόγο $\frac{NA}{NM}$.

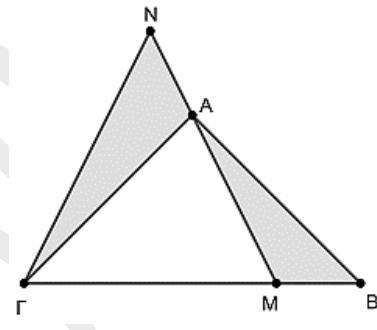
a) Έστω $\frac{MB}{MG} = \frac{1}{3}$ και $\frac{NA}{NM} = \frac{1}{4}$. Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i. } \frac{(AMB)}{(AMG)} = \frac{1}{3}. \quad (\text{Μονάδες 7})$$

$$\text{ii. } \frac{NA}{AM} = \frac{1}{3}. \quad (\text{Μονάδες 6})$$

$$\text{iii. } (AMB) = (AN\Gamma). \quad (\text{Μονάδες 6})$$

β) Έστω $\frac{MB}{MG} = 1$ και $(AMB) = (AN\Gamma)$. Να βρείτε τον λόγο $\frac{NA}{NM}$ στον οποίο το σημείο N διαιρεί εξωτερικά το ευθύγραμμο τμήμα AM . (Μονάδες 6)



22406. Στο διπλανό σχήμα η $B\Delta$ είναι διχοτόμος του τριγώνου $AB\Gamma$ και επίσης είναι $B\Gamma = 2AB$.

a) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $\Delta B\Gamma$ είναι διπλάσιο του εμβαδού του τριγώνου $AB\Delta$.

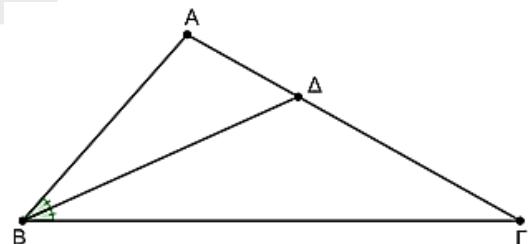
(Μονάδες 6)

β) Να χωρίσετε το τρίγωνο $AB\Gamma$ σε τρία ισοδύναμα τρίγωνα. (Μονάδες 6)

γ) Έστω ότι $AB = 12$ και $\eta_{B\Delta} = \frac{3}{4}$.

i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι 108. (Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε τα εμβαδά των τριγώνων $\Delta B\Gamma$ και $AB\Delta$.



(Μονάδες 7)

(Μονάδες 6)

22407. Στο διπλανό σχήμα η $A\Delta$ είναι διχοτόμος του τριγώνου $AB\Gamma$ και η AK είναι η προβολή της πλευράς $A\Gamma$ πάνω στην ευθεία AB . Δίνονται $AB = 10$, $A\Gamma = 15$ και $AK = 9$.

a) Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i. } GK = 12 \text{ και } (AB\Gamma) = 60. \quad (\text{Μονάδες 8})$$

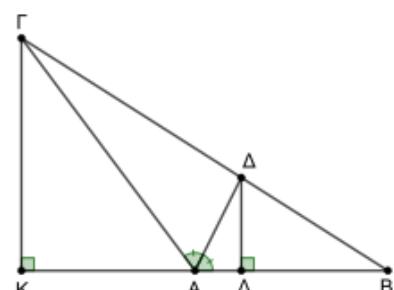
$$\text{ii. } (\Delta\Lambda B) = 24 \text{ και } (\Delta\Gamma\Lambda) = 36. \quad (\text{Μονάδες 10})$$

β) Έστω Λ η προβολή του σημείου Δ πάνω στην ευθεία AB .

$$\text{i. } \text{Να αποδείξετε ότι } \frac{\Delta\Lambda}{\Gamma K} = \frac{2}{5}. \quad (\text{Μονάδες 3})$$

$$\text{ii. } \text{Να βρείτε τον λόγο } \frac{\Delta B}{\Delta K} \text{ στον οποίο το } \Lambda \text{ σημείο διαιρεί εσωτερικά το ευθύγραμμο τμήμα.}$$

(Μονάδες 4)



3^ο Θέμα

19037. Θεωρούμε τρίγωνο ABC και τα σημεία D, E, Z των πλευρών AB, BC, AC αντίστοιχα τέτοια ώστε

$$\Delta B = \frac{1}{5} AB, \quad EG = \frac{1}{4} BG, \quad ZG = \frac{1}{2} AG.$$

- a) Να υπολογίσετε τους λόγους $\frac{(\Delta BE)}{(ABG)}, \frac{(\Delta GZ)}{(ABG)}, \frac{(\Delta AZD)}{(ABG)}$. (Μονάδες 15)
- b) Αν είναι $(ABG) = 120$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΔEZ . (Μονάδες 10)

Κανονικά πολύγωνα

Ιδιότητες και στοιχεία κανονικών πολυγώνων

2^o Θέμα

20638. Δύο κανονικά πολύγωνα έχουν πλήθος πλευρών n_1 και n_2 , κεντρικές γωνίες ω_1 και ω_2 και γωνίες φ_1 και φ_2 , αντίστοιχα. Αν ο λόγος του n_1 προς το n_2 είναι ίσος με $\frac{1}{2}$, τότε:

α) Να υπολογίσετε τον λόγο των αντίστοιχων κεντρικών γωνιών ω_1 και ω_2 αυτών των πολυγώνων. (Μονάδες 10)

β) Αν το πλήθος των πλευρών ενός από τα δύο κανονικά πολύγωνα είναι $n_1 = 5$, να υπολογίσετε τον λόγο των γωνιών των τους $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$. (Μονάδες 15)

21841. Έστω ΑΒΓΔΕΖ κανονικό εξάγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R).

α) Να αποδείξετε ότι:

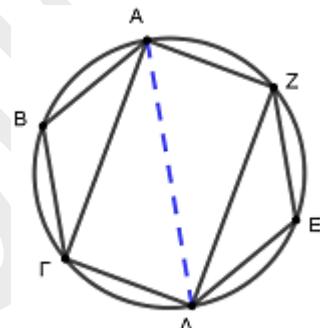
i. Η διαγώνιος ΑΔ του εξαγώνου είναι διάμετρος του κύκλου. (Μονάδες 6)

ii. Οι γωνίες ΓΑΔ και ΑΔΖ είναι ίσες. (Μονάδες 3)

iii. Οι διαγώνιοι ΑΓ και ΖΔ του εξαγώνου είναι παράλληλες. (Μονάδες 3)

iv. Το τετράπλευρο ΑΓΔΖ είναι ορθογώνιο και να βρείτε το εμβαδόν του συναρτήσει της ακτίνας R του κύκλου. (Μονάδες 7)

β) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι σε κάθε κανονικό πολύγωνο με περισσότερες από πέντε πλευρές υπάρχουν τουλάχιστον δύο διαγώνιοι που να είναι παράλληλες. Συμφωνείτε με την άποψη αυτού του μαθητή; Να αιτιολογήστε τον ισχυρισμό σας. (Μονάδες 6)



4^o Θέμα

22099. Δίνεται κανονικό πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ και σημείο M στο εσωτερικό του. Έστω

M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 οι προβολές του σημείου M στις πλευρές AB, BG, GD, DE, EA αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $(ABM) = \frac{1}{2} \lambda_5 \cdot MM_1$, όπου λ_5 είναι η πλευρά του κανονικού πενταγώνου. (Μονάδες 6)

ii. $(ABΓΔΕ) = \frac{1}{2} \lambda_5 \cdot (MM_1 + MM_2 + MM_3 + MM_4 + MM_5)$. (Μονάδες 7)

iii. $MM_1 + MM_2 + MM_3 + MM_4 + MM_5 = 5\alpha_5$, όπου α_5 είναι το απόστημα του κανονικού πενταγώνου. (Μονάδες 7)

β) Ένας μαθητής διατύπωσε τον ισχυρισμό: «Αν M είναι ένα εσωτερικό σημείο ενός κανονικού n-γώνου $A_1A_2...A_n$ και M_1, M_2, \dots, M_n είναι οι προβολές του σημείου M στις πλευρές $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$ αντίστοιχα, τότε $MM_1 + MM_2 + \dots + MM_n = n\alpha_n$. όπου α_n είναι το απόστημα του κανονικού n-γώνου». Να αποδείξετε ότι ο ισχυρισμός του μαθητή είναι σωστός. (Μονάδες 5)

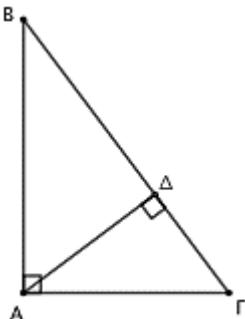
1^o Θέμα

16097.α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ), γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Κάθε ευθεία που είναι παράλληλη με μία από τις πλευρές ενός τριγώνου χωρίζει τις δύο άλλες πλευρές σε μέρη ανάλογα.

ii. Δύο ισοσκελή τρίγωνα είναι πάντοτε όμοια.

iii. Στο σχήμα, η προβολή της πλευράς AB στην υποτείνουσα BG είναι το τμήμα $\Gamma\Delta$.



iv. Το εμβαδόν ενός τριγώνου ισούται με το γινόμενο μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος.

v. Ο εγγεγραμμένος και ο περιγεγραμμένος κύκλος ενός κανονικού πολυγώνου είναι ομόκεντροι.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο των πλευρών του.

(Μονάδες 15)

21975.α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη ΣΩΣΤΟ, αν η πρόταση είναι σωστή ή ΛΑΘΟΣ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Το τρίγωνο που ορίζεται από τις ευθείες δύο πλευρών τριγώνου και μία παράλληλη προς την τρίτη πλευρά του, έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του αρχικού τριγώνου.

ii. Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι πάντοτε όμοια.

iii. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, ο λόγος των τετραγώνων των καθέτων πλευρών του είναι ίσος με το λόγο των προβολών τους πάνω στην υποτείνουσα.

iv. Αν σε τρίγωνο ABG ισχύει $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$, τότε το τρίγωνο είναι πάντοτε οξυγώνιο.

v. Δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια.

(Μονάδες 10)

β) Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε να αποδείξετε ότι ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές.

(Μονάδες 15)

Εγγραφή βασικών κανονικών πολυγώνων σε κύκλο και στοιχεία τους

2^o Θέμα

16818. Δίνεται κανονικό εξάγωνο $ABΓΔΕΖ$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R). Φέρουμε τα τμήματα $ΑΓ$ και $ΑΜ$, όπου το σημείο M είναι το μέσο του $ΓΔ$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $ΑΓΔ$ είναι ορθογώνιο.

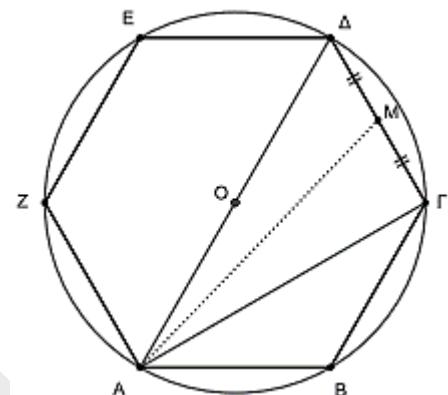
(Μονάδες 7)

β) $ΑΓ = R\sqrt{3}$.

(Μονάδες 9)

γ) $(AMΓ) = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$.

(Μονάδες 9)



16820. Δίνεται κανονικό εξάγωνο $ABΓΔΕΖ$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R). Φέρουμε το τμήμα $ΑΓ$. Να αποδείξετε ότι:

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $ΑΓΔ$ είναι ορθογώνιο.

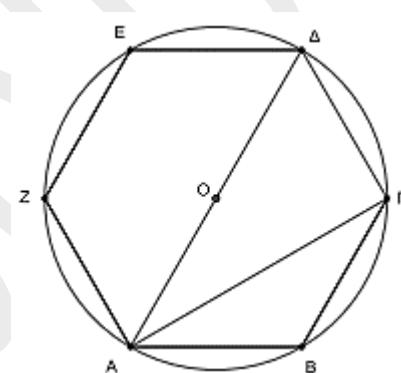
(Μονάδες 7)

β) $ΑΓ = R\sqrt{3}$.

(Μονάδες 9)

γ) $(ABΓΔΕΖ) = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$.

(Μονάδες 9)



4^o Θέμα

17600. Δίνεται κανονικό εξάγωνο $ABΓΔΕΖ$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R). Φέρουμε τα τμήματα $ΑΓ$, $ΑΔ$ και $ΑΜ$, όπου το σημείο M είναι το μέσο του $ΓΔ$. Να αποδείξετε ότι:

α) $(ABΓΔΕΖ) = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$.

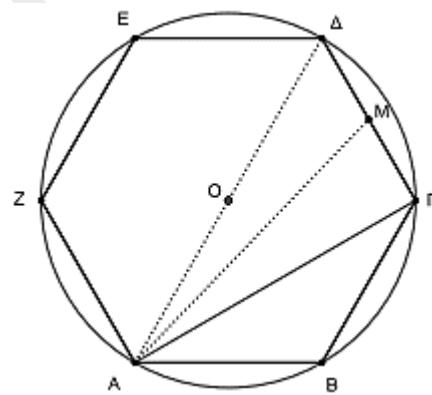
(Μονάδες 7)

β) $(AMΓ) = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$.

(Μονάδες 6)

γ) $(AMΔEZ) = R^2\sqrt{3}$.

(Μονάδες 12)



Μήκος κύκλου - τόξου

2^o Θέμα

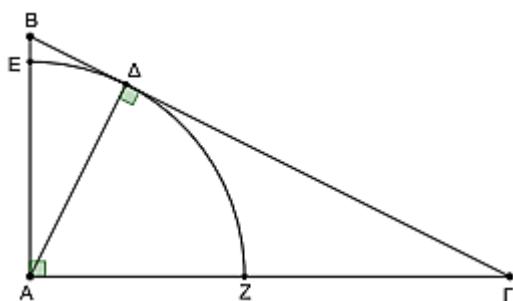
21122. Το ορθογώνιο τρίγωνο $ABΓ$ των σχήματος, το $Δ$ είναι η προβολή της κορυφής A στην υποτείνουσα $BΓ$ και είναι $ΒΔ = 1$ και $ΔΓ = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι $ΑΔ = 2$. (Μονάδες 12)

β) Με κέντρο το A και ακτίνα $ΑΔ$ γράφουμε κύκλο, ο οποίος τέμνει τις πλευρές AB και $ΑΓ$, στα σημεία E και Z αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Να υπολογίσετε το μήκος του τόξου EDZ .

(Μονάδες 13)



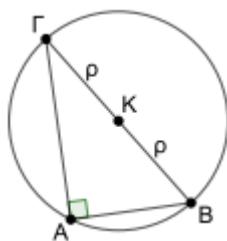
21298. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, με A ορθή γωνία και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου, που έχει κέντρο το K και ακτίνα ρ . Επίσης δίνεται ότι το μήκος του κύκλου ισούται με 10π .

- a)** Να αποδείξετε ότι η ακτίνα ρ του κύκλου έχει μήκος 5.
- b)** Αν η χορδή AB έχει μήκος 6 να υπολογίσετε:
 - i. το μήκος της χορδής $A\Gamma$ του κύκλου,
 - ii. το εμβαδόν τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 08)

(Μονάδες 10)

(Μονάδες 07)



22046. Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα $R = 1$. Θεωρούμε ακτίνα $O\Gamma$ την οποία προεκτείνουμε κατά τμήμα $\Gamma B = O\Gamma = R$ και το εφαπτόμενο τμήμα BA , όπως φαίνεται στο σχήμα.

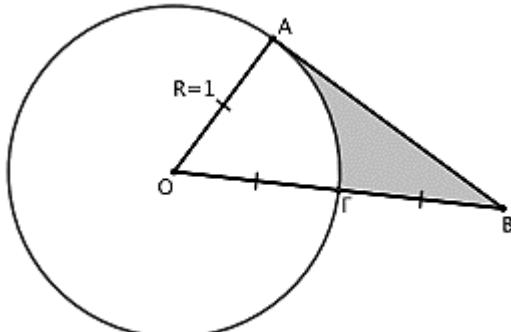
- a)** Να αποδείξετε ότι $OBA = 30^\circ$.
- b)** Να αποδείξετε ότι $AB = \sqrt{3}$.

(Μονάδες 05)

(Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του γραμμοσκιασμένου μεικτόγραμμου τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 10)



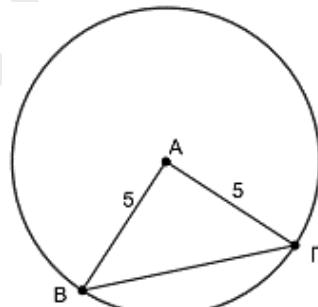
22133. Η $B\Gamma\Gamma$ είναι επίκεντρη γωνία σε κύκλο $(A, 5)$, όπως στο σχήμα. Δίνεται ότι $B\Gamma = 5\sqrt{2}$.

- a)** Να αποδείξετε ότι η χορδή $B\Gamma$ είναι ίση με την πλευρά τετραγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας $R = 5$.
- b)** Να αποδείξετε ότι $B\Gamma\Gamma = 90^\circ$.
- γ)** Αν ℓ είναι το μήκος του κυρτού τόξου $B\Gamma$ να αποδείξετε ότι $\ell = 2,5\pi$.

(Μονάδες 10)

(Μονάδες 08)

(Μονάδες 07)



22242. Δύο κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) τέμνονται στα σημεία A, B ,

ώστε $AKB = 60^\circ$ και $\Lambda LB = 120^\circ$.

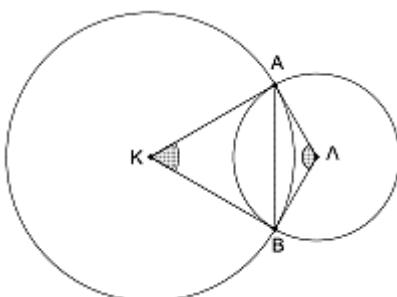
- α)** Να αποδείξετε ότι:
 - i. $AB = R$.
 - ii. Η κοινή χορδή AB είναι πλευρά ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (Λ, ρ) και ισχύει $R = \rho\sqrt{3}$.

(Μονάδες 5)

(Μονάδες 7)

- β)** Αν ℓ_1 είναι το μήκος του τόξου AB του κύκλου (K, R) που είναι μικρότερο του ημικυκλίου και ℓ_2 είναι το μήκος του τόξου AB του κύκλου (Λ, ρ) που είναι μικρότερο του ημικυκλίου, να αποδείξετε ότι $\frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(Μονάδες 13)



4^o Θέμα

16928. Δίνεται κύκλος με μήκος 10.

- α)** Να αποδείξετε ότι η περίμετρος P_3 ενός ισοπλεύρου τριγώνου που είναι εγγεγραμμένο στον παραπάνω κύκλο είναι ίση με $\frac{15\sqrt{3}}{\pi}$. (Μονάδες 10)

- β)** Να υπολογίσετε την περίμετρο P_6 κανονικού εξαγώνου που είναι εγγεγραμμένο στον ίδιο κύκλο. (Μονάδες 08)

- γ)** Έστω ένα κανονικό δωδεκάγωνο με περίμετρο P_{12} και ένα κανονικό εικοσιτετράγωνο με περίμετρο P_{24} που είναι εγγεγραμμένα στον παραπάνω κύκλο.

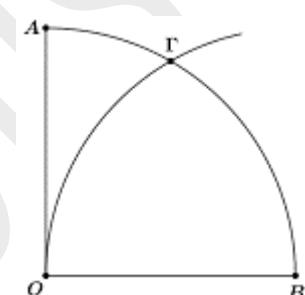
Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\frac{30}{\pi}, \frac{15\sqrt{3}}{\pi}, P_{12}, P_{24}$ και 10. (Μονάδες 07)

21192. Δίνεται τεταρτοκύκλιο ΟΑΒ κέντρου Ο και ακτίνας R. Αν ο κύκλος κέντρου Β και ακτίνας R τέμνει το τόξο ΑΒ στο σημείο Γ όπως στο σχήμα, τότε:

- α)** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισόπλευρο και το μήκος ℓ_{BG} του τόξου ΒΓ είναι $\ell_{BG} = \frac{\pi R}{3}$. (Μονάδες 8)

- β)** Να αποδείξετε ότι το μήκος του τόξου ΑΓ είναι $\ell_{AG} = \frac{\pi R}{6}$. (Μονάδες 8)

- γ)** Να υπολογίσετε την περίμετρο του μεικτόγραμμου τριγώνου ΟΑΓ που αποτελείται από το ευθύγραμμο τμήμα ΟΑ και τα τόξα ΑΓ και ΟΓ. (Μονάδες 9)



21193. Στο διπλανό σχήμα τρεις κυκλικοί τροχοί με ίσες ακτίνες, έχουν τα κέντρα τους στις κορυφές τριγώνου ΑΒΓ με πλευρές α, β και γ . Ένας τεντωμένος ιμάντας μήκους L συνδέει τους τρεις ίσους τροχούς όπως στο σχήμα και εφάπτεται σε αυτούς στα σημεία Κ, Λ, Μ, Ν, Ρ, Σ.

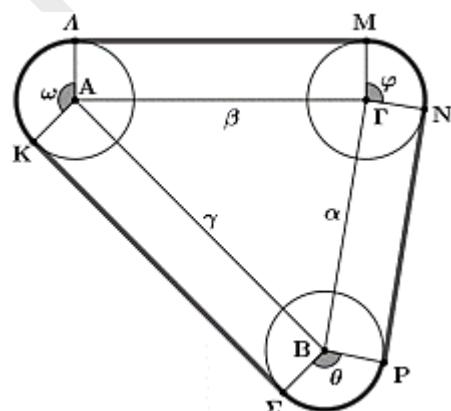
- α)** Να αποδείξετε ότι:

- i. Το τετράπλευρο ΑΛΜΓ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 4)

- ii. Η κυρτή γωνία ΚΑΛ και η γωνία Α του τριγώνου ΑΒΓ είναι παραπληρωματικές. (Μονάδες 4)

- β)** Αν $KA\Lambda = \omega, \Sigma BP = \hat{\theta}, MG\Gamma = \hat{\phi}$, να αποδείξετε ότι $\omega + \hat{\theta} + \hat{\phi} = 360^\circ$. (Μονάδες 8)

- γ)** Να αποδείξετε ότι το μήκος του ιμάντα L είναι $L = 2(\tau + \pi R)$ όπου τ η ημιπερίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 9)



Εμβαδόν κυκλικού δίσκου - τομέα

2^o Θέμα

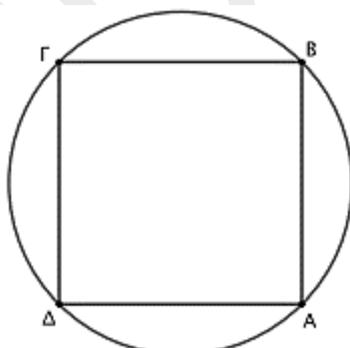
18097.Τετράγωνο $ABΓΔ$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R , όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν το εμβαδόν του τετραγώνου είναι ίσο με 4, τότε:

α) Να υπολογίσετε την ακτίνα R του κύκλου.

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ του τετραγώνου και του περιγεγραμμένου κύκλου του είναι ίσο με $2\pi - 4$.

(Μονάδες 12)



18098.Δίνεται τετράγωνο $ABΓΔ$ πλευράς $a = 4$.

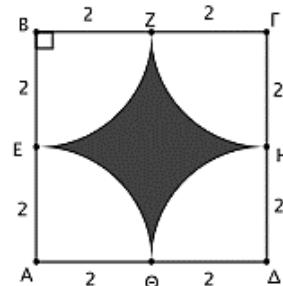
Με κέντρα τις κορυφές του τετραγώνου και ακτίνα $r = 2$ σχεδιάζουμε τέσσερις κυκλικούς τομείς στο εσωτερικό του, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν κάθε κυκλικού τομέα.

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου είναι $E = 4(4 - \pi)$.

(Μονάδες 12)



18099.Κανονικό εξάγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας $R = 2\sqrt{3}$ όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε την πλευρά και το απόστημα του κανονικού εξαγώνου.

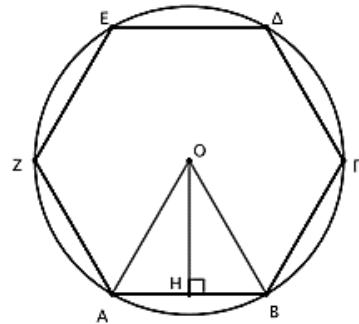
(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κανονικού εξαγώνου.

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ του κανονικού εξαγώνου και του περιγεγραμμένου κύκλου του ισούται με $E = 6(2\pi - 3\sqrt{3})$.

(Μονάδες 7)



20363. Δίνεται ο κύκλος (O, R) και τα σημεία του A, B, Γ όπως φαίνονται στο διπλανό σχήμα, ώστε $AB = R$ και $B\Gamma = R\sqrt{2}$.

a) Να αποδείξετε ότι $AB = 60^\circ$ και $B\Gamma = 90^\circ$.

(Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του R , τα μήκη των τόξων $AB, B\Gamma$.

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του R , το εμβαδόν του κυκλικού τομέα (O, AG) που αντιστοιχεί στην κυρτή γωνία AOG .

(Μονάδες 10)

20672. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα $AB = 6$, και σημείο του Γ , ώστε $B\Gamma = 4$. Στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η AB σχεδιάζουμε τα ημικύκλια C_1 και C_2 με διαμέτρους AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα και στο άλλο ημιεπίπεδο σχεδιάζουμε ημικύκλιο C_3 με διάμετρο AG .

α) Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των ημικυκλίων C_1, C_2 και C_3 είναι

$\frac{9\pi}{2}, 2\pi$ και $\frac{\pi}{2}$ αντίστοιχα.

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου.

(Μονάδες 10)

21069. Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα $\rho = 3$. Θεωρούμε την χορδή $B\Gamma = 3\sqrt{3}$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι το μέτρο του κυρτογώνιου τόξου $B\Gamma$ είναι 120° .

(Μονάδες 08)

β) Να υπολογισθεί το μήκος του κυρτογώνιου τόξου $B\Gamma$.

(Μονάδες 08)

γ) Να υπολογισθεί το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $O B\Gamma$.

(Μονάδες 09)

21075. Δίνεται κύκλος με κέντρο O , ακτίνα ρ και εμβαδόν ίσο με 16π .

α) Να υπολογίσετε την ακτίνα ρ του κύκλου.

(Μονάδες 07)

β) Αν η ακτίνα ρ του κύκλου είναι 4 να υπολογίσετε:

i. Την πλευρά του εγγεγραμμένου τετραγώνου στον κύκλο.

(Μονάδες 09)

ii. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται ανάμεσα στο τετράγωνο και στον κύκλο.

(Μονάδες 09)

21121. Στο διπλανό σχήμα, το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει

υποτείνουσα $B\Gamma = 13$ και αντίστοιχο ύψος $A\Delta = 6$. Με κέντρο το A και ακτίνα $A\Delta$ γράφουμε κύκλο, ο οποίος τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ του τριγώνου, στα σημεία E και Z αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τα εμβαδά:

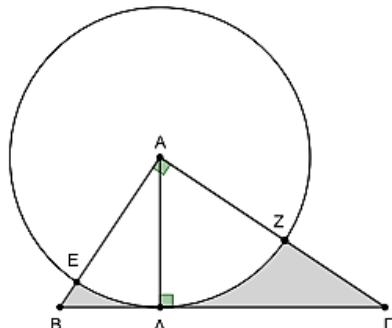
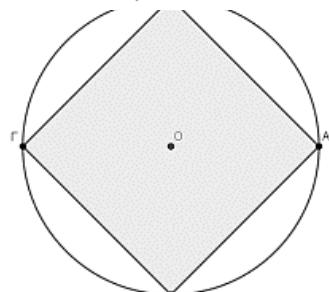
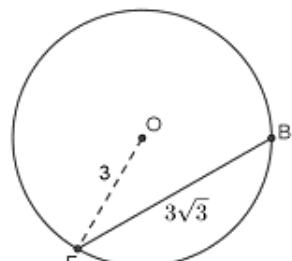
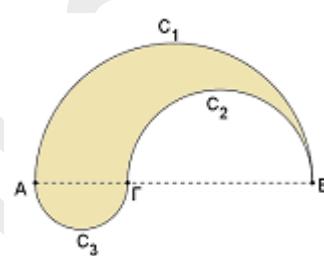
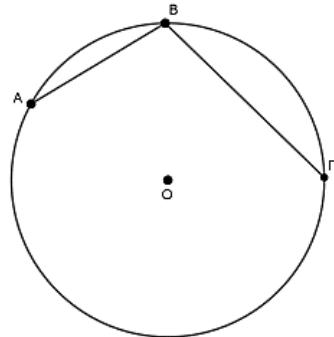
i. του κυκλικού τομέα $AEDZ$,

(Μονάδες 9)

ii. του σκιασμένου χωρίου που είναι εσωτερικά του τριγώνου $AB\Gamma$ και

εξωτερικά του κύκλου, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.

(Μονάδες 8)

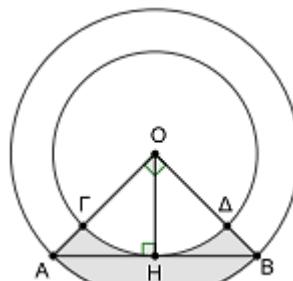


21123.Στο τρίγωνο OAB του σχήματος είναι $\angle AOB = 90^\circ$, $OA = OB = 2$ και το OH είναι το ύψος του από την κορυφή O . Με κέντρο το O και ακτίνα $R = OA$ και $\rho = OH$ γράφουμε δύο ομόκεντρους κύκλους. Ο κύκλος (O, ρ) τέμνει τις OA και OB στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα.

a) Να αποδείξετε ότι $OH = \sqrt{2}$. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τα εμβαδά των κυκλικών τομέων OAB και $O\Gamma\Delta$. (Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους που περικλείεται από τα τόξα AB και $\Gamma\Delta$ και τα ευθύγραμμα τμήματα AG και BD .



(Μονάδες 5)

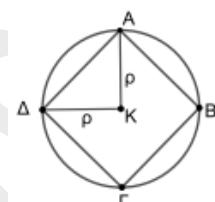
21300.Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$, το οποίο είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο (K, ρ) , όπως στο παρακάτω σχήμα.

a) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AK\Delta$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 08)

β) Αν επιπλέον το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου $AK\Delta$ είναι 4: (Μονάδες 07)

i. Να αποδείξετε ότι $\rho = \sqrt{8}$. (Μονάδες 07)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κύκλου (K, ρ) . (Μονάδες 10)

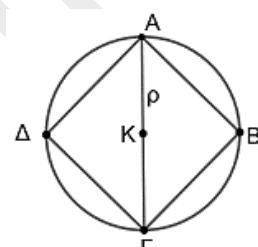


21301.Σε κύκλο (K, ρ) εμβαδού $E = 4\pi$ είναι εγγεγραμμένο τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$, όπως στο παρακάτω σχήμα. Να υπολογίσετε:

a) την ακτίνα ρ του κύκλου (K, ρ) . (Μονάδες 07)

β) το μήκος της διαμέτρου AG του κύκλου (K, ρ) και της πλευράς AB του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$. (Μονάδες 10)

γ) το εμβαδόν του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$. (Μονάδες 08)



22310.Το παρακάτω σχήμα (Σ) αποτελείται από το ημικύκλιο διαμέτρου AB και το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$. Το ημικύκλιο και το ορθογώνιο έχουν ίσα εμβαδά. Δίνεται $AB = 8\text{cm}$.

a) Να αποδείξετε ότι:

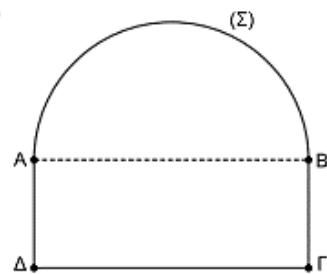
i. το εμβαδόν του ημικυκλίου είναι $E = 8\pi \text{ cm}^2$. (Μονάδες 8)

ii. το μήκος του ημικυκλίου είναι $L = 4\pi \text{ cm}$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε:

i. το μήκος της πλευράς $A\Delta$ του ορθογωνίου, (Μονάδες 5)

ii. την περίμετρο του σχήματος (Σ) . (Μονάδες 4)



4^ο Θέμα

17599.Σε τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς a του παρακάτω σχήματος, γράφουμε τεταρτοκύκλιο εσωτερικά του τετραγώνου με κέντρο A και ακτίνα a .

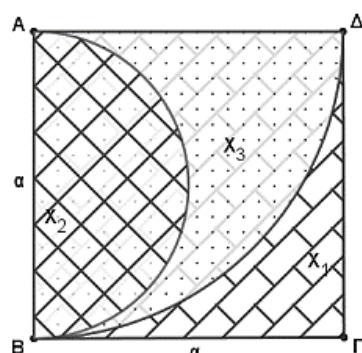
a) Αν X_1 είναι το χωρίο του τετραγώνου που βρίσκεται εξωτερικά του τεταρτοκυκλίου, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ισούται με:

$$(X_1) = \frac{\alpha^2}{4} \cdot (4 - \pi). \quad (\text{Μονάδες 5})$$

β) Με διάμετρο AB κατασκευάζουμε ημικύκλιο εσωτερικά του τετραγώνου. Αν X_2 είναι το χωρίο του ημικυκλίου και X_3 το χωρίο του τεταρτοκυκλίου που βρίσκεται εξωτερικά του ημικυκλίου, να υπολογίσετε τα εμβαδά των δύο χωρίων X_2 και X_3 . (Μονάδες 11)

γ) Ποιο από τα χωρία X_1 και X_2 έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν;

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)



18043. Σε κύκλο (O, ρ) θεωρούμε τα σημεία A, B, Γ και Δ . Η πλευρά AD είναι ίση με την πλευρά λ_6 κανονικού εξάγωνου εγγεγραμμένου στον κύκλο.

a) Αν η πλευρά AB ισούται με την πλευρά λ_4 τετραγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο και το τόξο $B\Gamma = 120^\circ$:

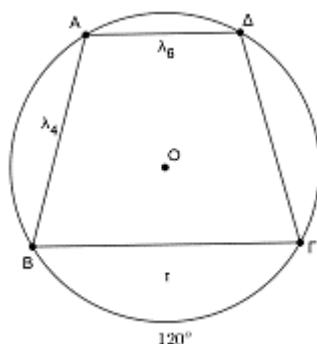
i. Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς $\Gamma\Delta$ ως συνάρτηση της ακτίνας.

(Μονάδες 08)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν (τ) του κυκλικού τμήματος που περικλείεται από την κυρτή γωνία $B\Omega\Gamma$.

(Μονάδες 10)

β) Κρατάμε τα σημεία A και Δ σταθερά και μετακινούμε την χορδή $B\Gamma$ παράλληλα προς την AD ώστε να διέρχεται από το O . Ποιο θα είναι το μήκος του τόξου AB ;



(Μονάδες 07)

21197. Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο πλευράς $2a$ και Λ το μέσο της πλευράς του $\Gamma\Delta$. Έστω ότι το ημικύκλιο, που σχεδιάζεται στο εσωτερικό του τετραγώνου με διάμετρο την πλευρά του AB , έχει εμβαδόν 10. Τότε:

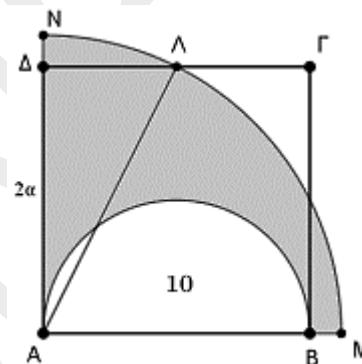
a) Να αποδείξετε ότι:

i. Το εμβαδό του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ είναι $(AB\Gamma\Delta) = \frac{80}{\pi}$.

(Μονάδες 6)

ii. $A\Lambda^2 = \frac{100}{\pi}$.

(Μονάδες 6)



β) Με κέντρο το A και ακτίνα $\Lambda\Lambda$ κατασκευάζουμε τεταρτοκύκλιο AMN , και έστω M, N είναι τα σημεία τομής του με τις προεκτάσεις των πλευρών του τετραγώνου AB , $A\Delta$ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε:

i. Το εμβαδό του σκιασμένου χωρίου $ABMNA$.

(Μονάδες 8)

ii. Τον λόγο του εμβαδού του τεταρτοκυκλίου AMN προς το εμβαδό του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.

(Μονάδες 5)

21103. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς $2a$ και με διαμέτρους τις $B\Gamma$ και BA φτιάχνουμε εξωτερικά του τετραγώνου ημικύκλια, όπως φαίνεται στο σχήμα.

a) Να αποδείξετε ότι το μήκος κάθε ημικυκλίου ισούται με $\pi - a$.

(Μονάδες 07)

β) i. Αν η περίμετρος της καρδιάς είναι $2\pi + 4$, να υπολογίσετε το a .

(Μονάδες 06)

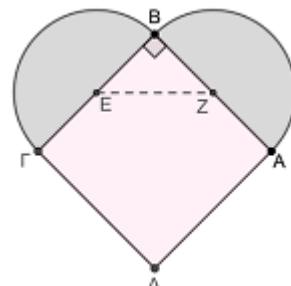
ii. Αν $a = 1$ να βρείτε το μήκος του τμήματος που ενώνει τα κέντρα των δύο ημικυκλίων.

(Μονάδες 06)

γ) Αν (τ) είναι το άθροισμα των εμβαδών των δύο ημικυκλίων να συγκρίνετε τον λόγο

$\frac{(\tau)}{(AB\Gamma\Delta)}$ με την μονάδα. Να αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(Μονάδες 06)



20361. Δίνεται κύκλος (O, R) και η χορδή του AB ίση με την πλευρά κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο.

Στο σημείο A φέρνουμε την εφαπτομένη $x'x$ του κύκλου και από το B την κάθετη στην $x'x$ που την τέμνει στο G .

Να αποδείξετε ότι:

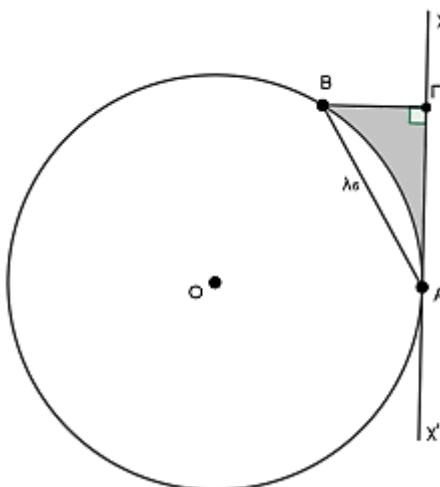
a) $AG = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. (Μονάδες 8)

b) $(OAGB) = \frac{3R^2\sqrt{3}}{8}$. (Μονάδες 7)

γ) το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου, που φαίνεται

στο διπλανό σχήμα είναι: $E = \frac{(9\sqrt{3} - 4\pi)R^2}{24}$.

(Μονάδες 10)



21127. Ο κυκλικός δίσκος του διπλανού σχήματος έχει κέντρο O και ακτίνα R . Έστω AB μια χορδή του κύκλου και M η προβολή του O στην AB . Αν η MO προεκταθεί προς το O , τέμνει τον κύκλο στο σημείο N . Δίνεται ότι $MN = \frac{3R}{2}$.

a) Να αποδείξετε ότι:

i. $AB = R\sqrt{3}$, (Μονάδες 6)

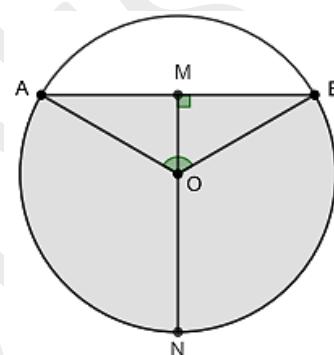
ii. $\angle AOB = 120^\circ$. (Μονάδες 6)

β) Υποθέστε ότι η διατομή ενός αγωγού μεταφοράς νερού είναι ο κυκλικός δίσκος του σχήματος που έχει δοθεί με $R = 10$ cm.

Η στάθμη του νερού που ρέει στον αγωγό είναι στη χορδή AB και το $MN = 15$ cm. Να βρείτε:

i. το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους του σχήματος που περικλείεται από την χορδή AB και το τόξο ANB . (Μονάδες 7)

ii. το μήκος του τόξου ANB . (Μονάδες 6)



21138. Στο διπλανό σχήμα ο κύκλος C_1 έχει κέντρο K και ακτίνα R και ο κύκλος C_2 έχει κέντρο L και ακτίνα $r = 2$.

Οι αποστάσεις των K και L από την κοινή χορδή AB των δύο κύκλων είναι $KO = \sqrt{3}$ και $LO = 1$.

a) Να αποδείξετε ότι:

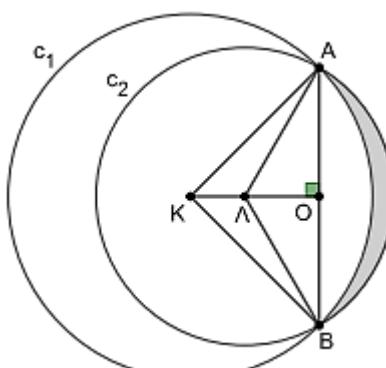
i. $OA = \sqrt{3}$. (Μονάδες 6)

ii. $R = \sqrt{6}$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τα εμβαδά:

i. των κυκλικών τομέων KAB και LAB . (Μονάδες 8)

ii. του σκιασμένου μηνίσκου του σχήματος . (Μονάδες 5)



21659. Για τα σημεία A , B και G του κύκλου (O, R) στο παρακάτω σχήμα ισχύει ότι $AB = R$ και $BG = R\sqrt{2}$.

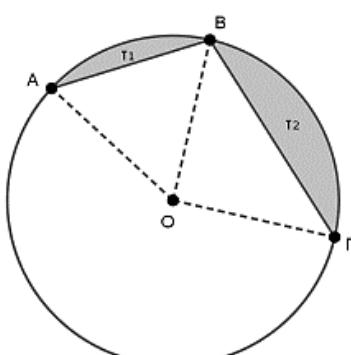
Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του R :

α) το μήκη των τόξων AB , BG . (Μονάδες 8)

β) το μήκος του μη κυρτογώνιου τόξου AG και το εμβαδό του κυκλικού τομέα (OAG) που αντιστοιχεί στην κυρτή γωνία AOG . (Μονάδες 8)

γ) το άθροισμα των εμβαδών των κυκλικών τμημάτων (τ_1) και (τ_2) , όπως αυτά σημειώνονται στο σχήμα.

(Μονάδες 9)



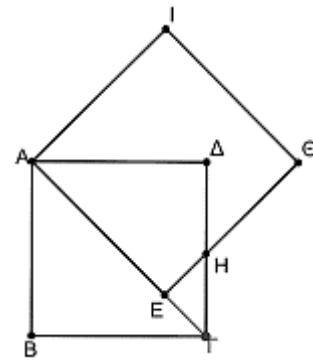
18355. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς a . Στην διαγώνιό του $A\Gamma$

θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε $EG = \frac{1}{4}A\Gamma$. Με πλευρά την AE

κατασκευάζουμε τετράγωνο $AI\Theta E$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Έστω H το σημείο τομής της $\Delta\Gamma$ με την $E\Theta$.

a) i. Να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{(AI\Theta E)}{(AB\Gamma\Delta)}$. (Μονάδες 08)

ii. Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{(E\Gamma H)}{(A\Gamma\Delta)}$. (Μονάδες 10)



β) Κατασκευάζουμε τον περιγεγραμμένο κύκλο του $AI\Theta E$. Να εξετάσετε αν ο λόγος του εμβαδού του κύκλου αυτού προς το εμβαδόν του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ εξαρτάται από το μήκος a της πλευράς του $AB\Gamma\Delta$. (Μονάδες 07)

21181. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) και περιγεγραμμένο στον κύκλο (O, r) όπου r το απόστημα του ισοπλεύρου τριγώνου. Αν το απόστημα του ισοπλεύρου τριγώνου είναι 5 να υπολογίσετε:

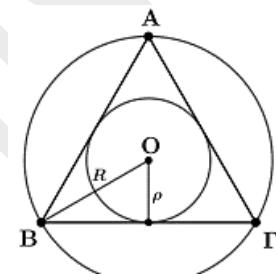
a) Την ακτίνα R του κύκλου. (Μονάδες 4)

β) Αν $R = 10$ τότε να υπολογίσετε:

i. Το εμβαδό του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

(Μονάδες 9)

ii. Το εμβαδό του κυκλικού δακτυλίου που σχηματίζουν ο εγγεγραμμένος και ο περιγεγραμμένος στο τρίγωνο $AB\Gamma$ κύκλος. (Μονάδες 12)



21979. Στο παρακάτω σχήμα, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο, πλευράς $2a$. Με διάμετρο τη $B\Gamma$ γράφουμε ημικύκλιο, που τέμνει τις πλευρές AB , $A\Gamma$ στα σημεία Δ, E αντίστοιχα. Αν O είναι το κέντρο του ημικυκλίου, να αποδείξετε ότι:

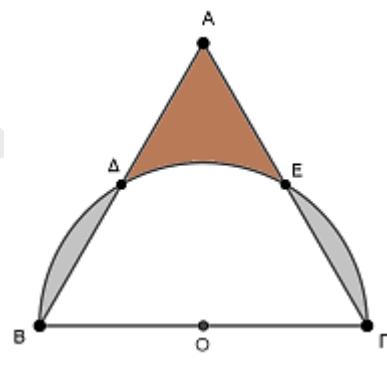
a) $\Delta\Gamma = a\sqrt{3}$. (Μονάδες 8)

β) το άθροισμα των εμβαδών των δύο κυκλικών τμημάτων που βρίσκονται στο εξωτερικό του τριγώνου ισούται με

$$E = \frac{(2\pi - 3\sqrt{3})a^2}{6}. \quad (\text{Μονάδες 9})$$

γ) το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου χωρίου που ορίζεται από τα

$$\text{ευθύγραμμα τμήματα } A\Delta, AE \text{ και το τόξο } \Delta E \text{ είναι: } E' = \frac{(3\sqrt{3} - \pi)a^2}{6}. \quad (\text{Μονάδες 8})$$



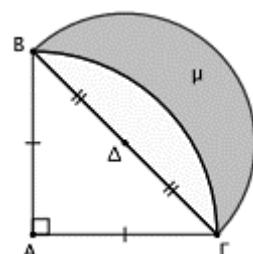
22021. Δίνεται ισοσκελές και ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A = 90^\circ$ και $B\Gamma = 2r$. Με διάμετρο $B\Gamma$ γράφουμε ημικύκλιο εξωτερικά του τριγώνου.

Επίσης, γράφουμε τον κυκλικό τομέα $AB\Gamma$ με κέντρο το A και ακτίνα AB , όπως φαίνεται στο σχήμα.

a) Να αποδείξετε ότι $AB = r\sqrt{2}$. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σχηματίζόμενου μηνίσκου μ ως συνάρτηση του r . (Μονάδες 10)

γ) Να συγκρίνετε το εμβαδόν του μηνίσκου μ με το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$. Τι συμπέρασμα προκύπτει;

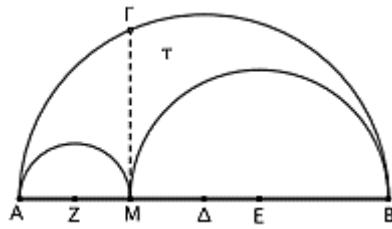


(Μονάδες 05)

22024. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB και τυχαίο σημείο του M , τέτοιο ώστε $AM = 2a$ και $MB = 2\beta$. Με διαμέτρους AM , MB και AB γράφουμε ημικύλια προς το ίδιο μέρος του AB , όπως φαίνεται στο σχήμα. Έστω Γ το σημείο τομής του ημικυκλίου AB και της κάθετης από το M στο AB .

a) Να υπολογίσετε το εμβαδόν καθενός από τα τρία ημικύλια

ZAM , EMB και ΔAB όπου Z , E , Δ είναι τα μέσα των AM , MB και AB αντίστοιχα. (Μονάδες 09)



b) Να υπολογίσετε το εμβαδόν καμπυλόγραμμου σχήματος τ που περικλείεται μεταξύ των τριών ημικυκλίων. (Μονάδες 06)

γ) Να αποδείξετε ότι το καμπυλόγραμμο σχήμα τ που περικλείεται μεταξύ των τριών ημικυκλίων έχει το ίδιο εμβαδόν με τον κύκλο διαμέτρου MG . (Μονάδες 05)

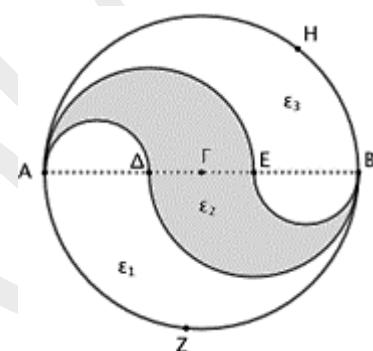
δ) Για ποια θέση του M μεγιστοποιείται το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου σχήματος τ ; (Μονάδες 05)

22058. Θεωρούμε κύκλο με κέντρο Γ και ακτίνα R . Έστω AB διάμετρος του κύκλου και Δ , E σημεία της τέτοια ώστε $A\Delta = \Delta E = EB$. Σχεδιάζουμε τα ημικύλια ΔA και AE πάνω από τη διάμετρο AB και τα ημικύλια BE και $B\Delta$ κάτω από τη διάμετρο AB , όπως φαίνεται στο σχήμα.

a) Να υπολογίσετε τα εμβαδά ε_1 και ε_3 των καμπυλόγραμμων σχημάτων ΔABZ και $BEAH$ αντίστοιχα. (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν ε_2 του γραμμοσκιασμένου καμπυλόγραμμου σχήματος ΔBE . (Μονάδες 08)

γ) Να εξετάσετε αν ο κύκλος χωρίζεται σε τρία ισοδύναμα καμπυλόγραμμα σχήματα. (Μονάδες 05)

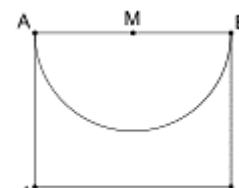


22098. Στο παρακάτω σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο με $AB = 4a$ και $\Delta\Gamma = \pi a$. Στο εσωτερικό του ορθογώνιου σχεδιάστηκε ημικύλιο διαμέτρου AB .

α) Να αποδείξετε ότι το ημικύλιο χωρίζει το ορθογώνιο σε δύο ισεμβαδικά χωρία. (Μονάδες 8)

β) Αν η διαγώνιος $B\Delta$ τέμνει το ημικύλιο στο σημείο E και M είναι το μέσο της AB ,

i. να αποδείξετε ότι $AB^2 = B\Delta \cdot BE$ και $A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta E$.



(Μονάδες 6)

ii. να αποδείξετε ότι $BE = \frac{16a}{\sqrt{16 + \pi^2}}$ και $\Delta E = \frac{\pi^2 a}{\sqrt{16 + \pi^2}}$.

(Μονάδες 6)

iii. να υπολογίσετε το $\text{συν} BME$.

(Μονάδες 5)

22151. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Στην πλευρά AB παίρνουμε σημείο Δ και στην πλευρά $A\Gamma$ σημείο E ώστε $AE = AB$. Με κέντρο το σημείο A και ακτίνες $\rho = A\Delta$, $r = AB = AE$ και $R = A\Gamma$ γράφουμε τρεις ομόκεντρους κύκλους (A, ρ) , (A, r) και (A, R) όπως στο σχήμα.

Έστω E_{EG} το εμβαδόν του σκιασμένου δακτυλίου μεταξύ των κύκλων (A, ρ) και (A, R) , $E_{\Delta B}$ το εμβαδόν του δακτυλίου μεταξύ των κύκλων (A, ρ) και (A, r) , E_{AB} το εμβαδόν του κύκλου (A, r) και $E_{\Delta\Delta}$ το εμβαδόν του κύκλου (A, ρ) .

α) Να αποδείξετε ότι:

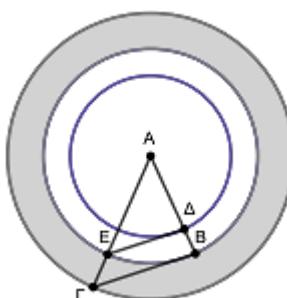
$$\text{i. } \frac{E_{EG}}{E_{AE}} = \frac{R^2 - r^2}{r^2}.$$

(Μονάδες 10)

$$\text{ii. } \frac{E_{\Delta B}}{E_{\Delta\Delta}} = \frac{r^2 - \rho^2}{\rho^2}.$$

(Μονάδες 07)

β) Αν επιπλέον οι ΔE και $B\Gamma$ είναι παράλληλες, να αποδείξετε ότι: $\frac{E_{EG}}{E_{AE}} = \frac{E_{\Delta B}}{E_{\Delta\Delta}}$. (Μονάδες 08)



22154. Δίνονται τα τρίγωνα ABG και ADE , που η κοινή κορυφή τους A βρίσκεται στο κέντρο τριών ομόκεντρων κύκλων (A, ρ_1) , (A, ρ_2) και (A, ρ_3) , η κορυφή G βρίσκεται στον κύκλο (A, ρ_3) , οι κορυφές B και E στον κύκλο (A, ρ_2) και η κορυφή Δ στον κύκλο (A, ρ_1) , όπως στο σχήμα, με $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$. Ονομάζουμε EE' το εμβαδόν του σκιασμένου δακτυλίου μεταξύ των κύκλων (A, ρ_2) και (A, ρ_3) , E_1 το εμβαδόν του κύκλου (A, ρ_1) , E_2 το εμβαδόν του κύκλου (A, ρ_2) και E_3 το εμβαδόν του κύκλου (A, ρ_3) .

a) Αν $\frac{E_{EE'}}{E_2} = \frac{7}{9}$, να αποδείξετε ότι:

i. $\frac{\rho_2}{\rho_3} = \frac{3}{4}$.

(Μονάδες 07)

ii. $\frac{E_2}{E_3} = \frac{9}{16}$.

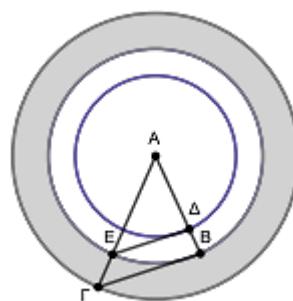
(Μονάδες 05)

iii. Αν επιπλέον οι ΔE και BG είναι παράλληλες να αποδείξετε ότι $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{3}{4}$.

(Μονάδες 08)

β) Αν $E_{EE'} = E_2$ και επιπλέον οι ΔE και BG είναι παράλληλες, να αποδείξετε ότι $E_{\Delta B} = E_1$, όπου $E_{\Delta B}$ είναι το εμβαδόν του δακτυλίου μεταξύ των κύκλων (A, ρ_1) και (A, ρ_2) .

(Μονάδες 05)



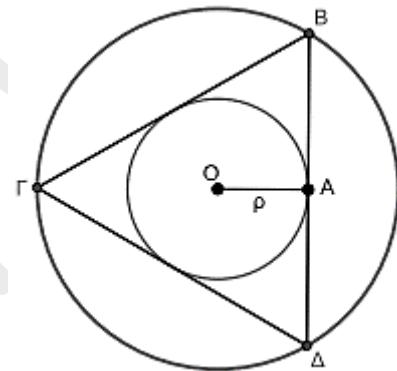
22157. Δίνονται οι ομόκεντροι κύκλοι (O, ρ) και (O, R) με $R > \rho$. Οι κορυφές του ισοπλεύρου τριγώνου $BΓΔ$ είναι σημεία του κύκλου (O, R) , ενώ οι πλευρές του εφάπτονται του κύκλου (O, ρ) , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Επίσης η $BΔ$ εφάπτεται του κύκλου (O, ρ) στο A .

a) Αν το εμβαδόν E του κύκλου (O, ρ) είναι ίσο με 36π , να αποδείξετε ότι:

i. $\rho = 6$. (Μονάδες 08)

ii. $R = 12$. (Μονάδες 06)

iii. Το εμβαδόν του ισόπλευρου τριγώνου $BΓΔ$ είναι ίσο με $108\sqrt{3}$. (Μονάδες 07)



β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $(BΓΔ)$ του ισόπλευρου τριγώνου

$BΓΔ$ είναι ίσο με $\frac{3\sqrt{3}}{\pi} \cdot E$, όπου E είναι το εμβαδόν του κύκλου (O, ρ) .

(Μονάδες 04)

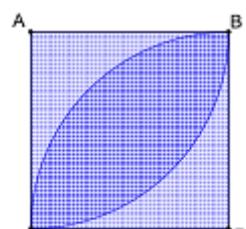
22244. Ένας κηπουρός θέλει να ποτίσει το γκαζόν που έχει φυτέψει σε έναν τετράγωνο κήπο πλευράς 10 m. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιεί μηχανισμούς ποτίσματος τους οποίους μπορεί να ρυθμίσει, ώστε να ποτίζουν έναν κυκλικό τομέα με συγκεκριμένη γωνία και ακτίνα.

a) Ο κηπουρός τοποθετεί στις απέναντι κορυφές $A, Γ$ του τετράγωνου κήπου από έναν μηχανισμό, ώστε ο καθένας να ποτίζει ένα τεταρτοκύλιο ακτίνας 10m, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1. Να αποδείξετε ότι:

i. το εμβαδόν της περιοχής που ποτίζει κάθε μηχανισμός είναι $25\pi \text{ m}^2$.

(Μονάδες 4)

ii. το εμβαδόν της περιοχής που ποτίζουν ταυτόχρονα και οι δύο μηχανισμοί είναι $50(\pi - 2) \text{ m}^2$. (Μονάδες 5)

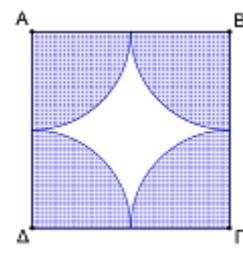


Σχήμα 1

β) Ο κηπουρός τοποθετεί στις τέσσερις κορυφές του τετράγωνου κήπου από έναν μηχανισμό, ώστε ο καθένας να ποτίζει ένα τεταρτοκύλιο ακτίνας 5m, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.

i. Να βρείτε το εμβαδόν της περιοχής που δεν ποτίζεται. (Μονάδες 8)

ii. Για να μην μείνει απότιστη κάποια περιοχή του κήπου ο κηπουρός τοποθετεί έναν πέμπτο μηχανισμό ποτίσματος στο κέντρο του κήπου ο οποίος ποτίζει την



Σχήμα 2

περιοχή ενός κυκλικού δίσκου ακτίνας 5m. Να βρείτε το εμβαδόν του κήπου που ποτίζεται από δύο μηχανισμούς ταυτόχρονα και να το συγκρίνετε με την απάντηση που βρήκατε στο ερώτημα α).

(Μονάδες 8)

22261. Δίνεται τρίγωνο ABG , εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) με $AB = \gamma$, $AG = \beta$ και $BG = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma}$.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ABG είναι αμβλυγώνιο με $A > 90^\circ$.

(Μονάδες 8)

β) η γωνία A του τριγώνου ABG ισούται με 120° . Δίνεται $\sin 120^\circ = -\frac{1}{2}$.

(Μονάδες 5)

γ) η γωνία BOG ισούται με 120° .

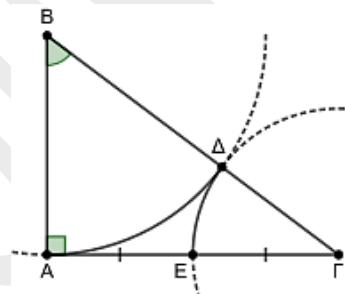
(Μονάδες 5)

δ) το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος, που ορίζεται από τη χορδή BG και το κυρτογώνιο τόξο BG ,

είναι $E = \frac{(4\pi - 3\sqrt{3})R^2}{12}$. Δίνεται $\eta \mu 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(Μονάδες 7)

22389. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABG με $A = 90^\circ$. Με κέντρο το σημείο B και ακτίνα $R = BA$ γράφουμε τον κύκλο (B, R) ο οποίος τέμνει την πλευρά BG στο σημείο Δ . Με κέντρο το σημείο G και ακτίνα $r = \Gamma\Delta$ γράφουμε τον κύκλο (Γ, r) ο οποίος τέμνει την πλευρά AG στο σημείο E . Έστω ότι το E είναι το μέσο της AG .



α) Να αποδείξετε ότι $r = \frac{2}{3}R$.

(Μονάδες 8)

β) Έστω E_1 το εμβαδόν του τριγώνου ABG και E_2 το εμβαδόν του κύκλου (B, R) . Να αποδείξετε ότι $\frac{E_2}{E_1} = \frac{3\pi}{2}$.

(Μονάδες 8)

γ) Έστω $B = \mu$ και E_3 και E_4 είναι το εμβαδά των κυκλικών τομέων $B\Delta\Gamma$ και $\Gamma\Delta E$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι $\frac{E_4}{E_3} = \frac{4(90 - \mu)}{9\mu}$.

(Μονάδες 9)

3^o Θέμα

22054. Δίνεται τετράγωνο $ABGD$ πλευράς $2a$. Με κέντρα τις κορυφές του τετραγώνου και ακτίνα α σχεδιάζουμε τέσσερις κυκλικούς τομείς στο εσωτερικό του όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν κάθε κυκλικού τομέα ως συνάρτηση του a .

(Μονάδες 08)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου καμπυλόγραμμου χωρίου είναι: $E = a^2(4 - \pi)$.

(Μονάδες 12)

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του γραμμοσκιασμένου καμπυλόγραμμου χωρίου.

(Μονάδες 05)

