ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΣΥΝΟΛΑ-ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

1. Έστω βασικό σύνολο $\Omega = \{1, 4, 5, 8, 10\}$ και τα υποσύνολα του Ω, $A = \{1, 5, 10\}$, $B = \{4, 8, 10\}$

i) Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn τα παραπάνω σύνολα.

ii) Να περιγράψετε με αναγραφή τα σύνολα $A \cup B$, $A \cap B$, $A' \cap B$, $B - A$

iii) Να γράψετε όλα τα δυνατά υποσύνολα του Α.

2. Θεωρούμε ως βασικό σύνολο το: $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 15\}$ καθώς και τα σύνολα

i) $A = \{x \in \Omega \,/\, x$ άρτιος$\}$ και $B = \{x \in \Omega \,/\, x$ πολλαπλάσιο του $3\}$.

ii) Να παραστήσετε τα σύνολα Α και Β με αναγραφή των στοιχείων τους.

iii) Να βρείτε τα σύνολα:

α) $A \cup B$ β) $A \cap B$ iii) A'

iv) B' v) $(A \cup B)'$ vi) $A \cap B'$

3. Δίνονται τα σύνολα $A = \left\{x \in R \,/\, x^2 - 4x + 3\right\}$ και $B = \left\{x \in N \,/\, \left(2x^2 - 5x + 2\right)(x-1) = 0\right\}$

i) Να γραφούν με αναγραφή τα σύνολα.
ii) Να βρείτε την ένωση και τη τομή τους.
iii) Να εξετάσετε αν το Α είναι υποσύνολο του Β.

4. Δίνεται ο δειγματικός χώρος: $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Θεωρούμε επίσης τα ενδεχόμενα:

$A = \{x \in \Omega / |x-4| \le 2\}$, $B = \{x \in \Omega / x^2 - 4x + 3 \le 0\}$ και $\Gamma = \{x \in \Omega / (x-4)^2 \ge 3x - 2\}$

i) Να βρείτε τις πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$ και $P(\Gamma)$.
ii) Να βρείτε τα ενδεχόμενα $A \cup B$ και $A \cap \Gamma$ και στη συνέχεια τις πιθανότητες $P(A \cup B)$ και $P(A \cap \Gamma)$.

5. Έστω ο δειγματικός χώρος :$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Για τα ενδεχόμενα Α, Β, Γ του Ω, είναι :$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,$A \cap B = \{1, 3, 4\}$, $A - B = \{2, 6\}$ και

$\Gamma = \{x \in \Omega / |2x-5| < 3\}$

i) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$, $P(\Gamma)$.

ii) Να βρείτε την πιθανότητα, ώστε να πραγματοποιηθεί το Β και όχι το Γ.

iii) Να βρείτε την πιθανότητα, ώστε να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα Β και Γ.

6. Από 38 άτομα μιας τάξης, που ρωτήθηκαν, οι 14 απάντησαν ότι έγραψαν άριστα σ' ένα διαγώνισμα (Α), οι 23 ότι έγραψαν άριστα σ' ένα διαγώνισμα (Β) και οι 5 έγραψαν άριστα και στα δύο. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα άτομο να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων:

i) Το άτομο δεν έγραψε άριστα σε κανένα διαγώνισμα.

ii) Το άτομο έγραψε άριστα μόνο στο (Α).

iii) Το άτομο έγραψε άριστα μόνο στο (Β).

7. Από 120 μαθητές ενός Λυκείου, 24 μαθητές συμμετέχουν στο διαγωνισμό της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, 20 μαθητές συμμετέχουν στο διαγωνισμό της Ένωσης Ελλήνων Φυσικών και 12 μαθητές συμμετέχουν και στους δύο διαγωνισμούς. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Ποια είναι η πιθανότητα ο μαθητής:
i) Να συμμετέχει σ΄ έναν τουλάχιστον από τους δύο διαγωνισμούς;
ii) Να συμμετέχει μόνο σ΄ έναν από τους δύο διαγωνισμούς;
iii) Να μην συμμετέχει σε κανέναν από τους δύο διαγωνισμούς;

8. Σε ένα τμήμα της Α Λυκείου ενός σχολείου με 25 μαθητές οι 21 μαθαίνουν Αγγλικά, οι 11 Γαλλικά και 8 παιδιά μαθαίνουν και τις 2 γλώσσες. Επιλέγουμε μέσα από την τάξη τυχαία έναν μαθητή. Να βρείτε τη πιθανότητα του ενδεχομένου:
i) Ο μαθητής μαθαίνει τουλάχιστον μία ξένη γλώσσα.
ii) Ο μαθητής μαθαίνει μόνο Αγγλικά.
iii) Ο μαθητής μαθαίνει μόνο Γαλλικά.
iv) Ο μαθητής δεν μαθαίνει Γαλλικά.
v) Ο μαθητής μαθαίνει μόνο μία από τις δύο γλώσσες.
vi) Ο μαθητής δεν μαθαίνει καμία από τις δύο γλώσσες.
vii) Ο μαθητής μαθαίνει Αγγλικά ή δεν μαθαίνει Γαλλικά.

9. Θεωρούμε δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω, για τα οποία γνωρίζουμε ότι: $P(A') = 0,6$, $P(B) = 0,3$ και $P(A \cap B) = 0,3$.
i) Να δείξετε ότι $P(A) = 0,4$
ii) Να βρείτε την πιθανότητα «να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο Α ή Β»
iii) Να βρείτε την πιθανότητα $P[(A \cap B') \cup (B \cap A')]$
iv) Αν Γ είναι ένα τρίτο ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου Ω το οποίο δεν είναι το κενό σύνολο, τότε να αποδείξετε ότι: $P(\Gamma) + \dfrac{1}{P(\Gamma)} \geq -2$

10. Εξετάσαμε τους φοιτητές ενός τμήματος σχετικά με το αν πέρασαν τα μαθήματα της Στατιστικής και των Πιθανοτήτων. Προέκυψαν τα εξής συμπεράσματα:
- το 65% των φοιτητών πέρασαν τη Στατιστική
- το 15% των φοιτητών πέρασαν τις Πιθανότητες και δεν πέρασαν τη Στατιστική
- Το 60% των φοιτητών δεν πέρασαν τουλάχιστον ένα από τα δύο μαθήματα

Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή του τμήματος .Να βρείτε την πιθανότητα αυτός:
i) να έχει περάσει και τα δύο μαθήματα,
ii) να έχει περάσει το μάθημα των Πιθανοτήτων,
iii)να μην έχει περάσει κανένα από τα δύο μαθήματα,
iv) να έχει περάσει ένα μόνο από τα δύο μαθήματα.

11. Ένα ενυδρείο έχει 2400 ψάρια .Από αυτά τα 1800 είναι τροπικά ψάρια ,τα 800 έχουν κόκκινο χρώμα και τα 600 είναι τροπικά ψάρια με κόκκινο χρώμα. Επιλέγουμε τυχαία ένα ψάρι.
Αν Α: το ενδεχόμενο το ψάρι να είναι τροπικό και
Β: το ενδεχόμενο το ψάρι να είναι κόκκινο .

Να βρεθεί η πιθανότητα το ψάρι
i) να είναι τροπικό ή να έχει κόκκινο χρώμα ;
ii) να μην είναι τροπικό ούτε να έχει κόκκινο χρώμα ;
iii) να έχει κόκκινο χρώμα αλλά να μην είναι τροπικό;
iv) να είναι τροπικό ή να μην έχει κόκκινο χρώμα ;

12. Ένας κήπος έχει 1200 δέντρα .Από αυτά τα 300 είναι τροπικά ,τα 1000 είναι οπωροφόρα και τα 200 είναι τροπικά και οπωροφόρα. Επιλέγουμε τυχαία ένα δέντρο.
Αν Α: το ενδεχόμενο το δέντρο να είναι τροπικό και
Β: το ενδεχόμενο το δέντρο να είναι οπωροφόρο .
Να βρεθεί η πιθανότητα το δέντρο
i) να είναι τροπικό ή να είναι οπωροφόρο ;
ii) να μην είναι οπωροφόρο ούτε τροπικό ;
iii) να είναι οπωροφόρο αλλά να μην είναι τροπικό;
iv) να είναι τροπικό ή να μην είναι οπωροφόρο ;

13. Οι πιθανότητες των ενδεχομένων Α, Β, $A \cap B$ ενός πειράματος τύχης με δειγματικό χώρο **Ω** ικανοποιούν την σχέση $[3P(A)-1]^2+[2P(B')-1]^2+[6P(A\cap B)-1]^2=0$. (1) Να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων :
i) Να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο Α.
ii) Να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο Β.
iii) Να πραγματοποιηθεί ακριβώς ένα από τα ενδεχόμενα Α και Β.
iv) Να μην πραγματοποιούνται συγχρόνως τα ενδεχόμενα Α και Β.

14. Σε ένα κουτί υπάρχουν x άσπρες σφαίρες και $(x + 2)^2$ μαύρες σφαίρες, με $x \neq 0$.
i) Επιλέγουμε τυχαία μια σφαίρα από το κουτί. Να εκφράσετε ως συνάρτηση του x τις πιθανότητες των ενδεχομένων:
Α: επιλέγουμε άσπρη σφαίρα,
Μ: επιλέγουμε μαύρη σφαίρα.
ii) Αν η πιθανότητα να επιλέξουμε μαύρη σφαίρα ,είναι κατά $\frac{4}{5}$ μεγαλύτερη από την πιθανότητα να επιλέξουμε άσπρη σφαίρα και στο κουτί υπάρχουν πάνω από 15 σφαίρες, να βρείτε το x , καθώς και την πιθανότητα να επιλεγεί μαύρη σφαίρα.
iii) Να αποδείξετε ότι :$P(A) < \frac{1}{9}$ για κάθε $x \in R$
iv) Για την τιμή του x για την οποία είναι: $P(A) = \frac{1}{9}$ εκτελούμε το εξής πείραμα: Παίρνουμε διαδοχικά 3 σφαίρες από το κουτί (χωρίς επανατοποθέτηση) και σημειώνουμε κάθε φορά το χρώμα τους. Να βρείτε τον δειγματικό χώρο του πειράματος.

15. Έστω Α και Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύει ότι:
$P(B) = 9(P(A))^2 - 7P(A) + 2 + P(A \cap B)$
i) Να εκφράσετε την $P(A\cup B)$ συναρτήσει της P(A).
ii) Να βρείτε την P(A).
iii) Να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το Β και να μην πραγματοποιηθεί το Α.

iv) Αν επιπλέον η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ακριβώς ένα από τα Α, Β είναι να βρείτε:

α) τις πιθανότητες P(B) και P(A $\cap$B),

β) την πιθανότητα P(B'- A').

16. Σε έναν χορευτικό όμιλο συμμετέχουν x αγόρια και $(x + 4)^2$ κορίτσια.

i) Επιλέγουμε τυχαία ένα άτομο για να εκπροσωπήσει τον όμιλο σε μια εκδήλωση. Να εκφράσετε ως συνάρτηση του x την πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι,

ii) Αν η πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι είναι ίση με $\frac{1}{19}$ και ο όμιλος περιλαμβάνει λιγότερα από 100 μέλη, να βρείτε τον αριθμό των μελών του ομίλου, καθώς και την πιθανότητα να επιλεγεί κορίτσι.

iii) Αν Α είναι το ενδεχόμενο να επιλεγεί αγόρι, να αποδείξετε ότι $P(A) \leq \frac{1}{17}$.

17. Από τους 25 μαθητές ενός τμήματος Α΄ Λυκείου ενός σχολείου, οι 23 μαθαίνουν Αγγλικά, οι 8 Γαλλικά . Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή της τάξης.

i)Να δείξετε ότι : $\frac{6}{25} \leq p(A \cap B) \leq \frac{8}{25}$

ii) Να αποδείξετε ότι : $\frac{3}{5} \leq p(A - B) \leq \frac{23}{25}$

18. Ένας κήπος έχει 1200 δέντρα .Από αυτά τα 300 είναι τροπικά ,τα 1000 είναι οπωροφόρα Επιλέγουμε τυχαία ένα δέντρο.

Αν Α: το ενδεχόμενο το δέντρο να είναι τροπικό και
Β: το ενδεχόμενο το δέντρο να είναι οπωροφόρο .

i)Να αποδείξετε ότι : $\frac{1}{12} \leq p(A \cap B) \leq \frac{1}{4}$

ii) Να αποδείξετε ότι $\frac{7}{12} \leq p(\text{B} - \text{A}) \leq \frac{5}{6}$

19. Ένα ενυδρείο έχει 2400 ψάρια .Από αυτά τα 1800 είναι τροπικά ψάρια ,τα 800 έχουν κόκκινο χρώμα. Επιλέγουμε τυχαία ένα ψάρι.

Αν Α: το ενδεχόμενο το ψάρι να είναι τροπικό και
Β: το ενδεχόμενο το ψάρι να είναι κόκκινο .

i)Να δείξετε ότι $\frac{1}{12} \leq p(A \cap B) \leq \frac{1}{3}$

ii) Να αποδείξετε ότι $\frac{5}{12} \leq p(A - B) \leq \frac{3}{4}$

20. Κατά την αρχή της σχολικής χρονιάς οι μαθητές της Α΄ τάξης ενός λυκείου ρωτήθηκαν σχετικά με τον αριθμό των βιβλίων που διάβασαν την περίοδο των θερινών διακοπών. Σύμφωνα με τις απαντήσεις που δόθηκαν ,συντάχθηκε ο επόμενος πίνακας

Αριθμός βιβλίων	Αριθμός μαθητών
0	α+4
1	5α+8
2	4α
3	α-1
4	2α

Γνωρίζουμε ότι αν επιλέξουμε τυχαία ένα μαθητή ,τότε η πιθανότητα να έχει διαβάσει 2 βιβλία είναι 24%.

i) Να αποδείξετε ότι α=3

ii) Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

Α: ο μαθητής έχει διαβάσει το πολύ 1 βιβλίο

Β: ο μαθητής έχει διαβάσει τουλάχιστον 3 βιβλία.

ΔΙΑΤΑΞΗ-ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ-ΡΙΖΕΣ

21. Δίνεται η παράσταση $A = x^3 - 4x^2 + x - 4$

i) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση Α

ii) Να αποδείξετε ότι Α > 0 για x > 4

22. Αν για τους αριθμούς x ,y ισχύει: $x^2+y^2-4x+2y+5 = 0$.

i) Να δείξετε ότι x = 2 και y = -1.

ii) Να δείξετε ότι οι αριθμοί $\sqrt{x}+y$ και $\sqrt{x}-y$ είναι αντίστροφοι

iii) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης : $\sqrt{x+y+2\sqrt{x}} - \sqrt{x+y-2\sqrt{x}}$.

23. Αν $3 < x < 5 \quad και \quad 4 < y < 7$,να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχεται

η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

i) Α= x+y ii) Β= x -2y iii)$\Gamma = \dfrac{2x}{y}$ και iv) Δ= 2x+3y

24. i) Να βρείτε τον αριθμό: $\lambda = \dfrac{6^{27}}{4^{12} \cdot 27^9}$.

ii) Για την τιμή του λ που βρήκατε, να παραγοντοποιήσετε τις επόμενες παραστάσεις:

$A = 2(x^2+y^2) - (x+y)^2 - \sqrt[3]{\lambda^2}$ και: $B = x^2 - xy + x + y - \sqrt[4]{2\lambda}$

25. Για τους αριθμούς α και β ισχύει: $\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha + 6\beta + 13 = 0$

i) Να βρείτε τους αριθμούς α και β.

ii) Αν α=2,β=-3

α) Να μετατρέψετε το κλάσμα: $A = \dfrac{15}{\sqrt{a-\beta} \cdot (\sqrt{\alpha}+\beta)}$ σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή,

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $B = \sqrt{-\beta+\alpha\sqrt{\alpha}} - \sqrt{-\beta-\alpha\sqrt{\alpha}}$

γ) Να αποδείξετε ότι : $\sqrt[3]{\alpha^3\sqrt{\alpha\sqrt[5]{\alpha}}} = \sqrt[5]{64}$

26. Δίνονται οι φυσικοί αριθμοί $a = \frac{2^{13} \cdot 4^8}{8^9}$ και $\beta = \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{3-\sqrt{6}} \cdot \sqrt[3]{3+\sqrt{6}}$.

i) Να βρείτε τους αριθμούς α και β.

ii) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $K = \sqrt[4]{xy\sqrt{x\sqrt[3]{\frac{y^2}{x}}}}$ για $x = \frac{1}{8}$ και $y = \frac{1}{27}$.

27. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \sqrt{4-2\sqrt{3}} + \sqrt{28-10\sqrt{3}}$ και $\beta = \left(\sqrt[3]{2\sqrt[5]{3\sqrt{2}}} : \sqrt[5]{3\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}\right) \cdot \sqrt[20]{4} \cdot \sqrt[15]{9}$.

i) Να βρείτε τους αριθμούς α και β

ii) Να υπολογίσετε την παράσταση $\mathrm{A} = \sqrt[6]{\alpha} \cdot \beta^2$

iii)Να λύσετε την εξίσωση βx=α και να γράψετε τη λύση της σαν κλάσμα με ρητό παρονομαστή.

28. Δίνεται η παράσταση $f(x) = \frac{|x-1| - |3-3x| + |2x-4|}{2}$, $x \in$R.

i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση, για τις διάφορες τιμές του *x*,είναι ίση με την διαφορά των αποστάσεων, πάνω στον άξονα ,τουχαπό τους αριθμούς 1 και 2.

ii) Να βρείτε την τιμή του *x* αν $f(x) = 0$.

iii) Να βρείτε τις τιμές του *x* για τις οποίες ισχύουν: $f(x) < 0$ και $x \in (1 , 2)$.

29. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με διαστάσεις x, y που έχει περίμετρο 24 εκατοστά.

i) Δικαιολογείστε ότι x+y=12.

ii) Να δώσετε με δικούς σας αριθμούς τις διαστάσεις δύο τέτοιων ορθογωνίων και να υπολογίσετε το εμβαδόν σε καθένα από αυτά.

iii) Αποδείξτε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου δίνεται από την σχέση: Ε= $\frac{1}{4}$ $[(x+y)^2-(x-y)^2]$

iv) Με δεδομένο ότι x+y =12 αποδείξτε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου παίρνει την μορφή Ε= 36- $\frac{1}{4}$ $(x-y)^2$ και στη συνέχεια ότι για το εμβαδόν ισχύει $E \leq 36$.

30. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με διαστάσεις x, y που πληρούν τους περιορισμούς: $3 \leq x \leq 5$ και $4 \leq y \leq 12$.

i) Να δώσετε με συγκεκριμένους αριθμούς τις διαστάσεις δύο τέτοιων ορθογωνίων και να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρό τους.

ii) Να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών περιέχονται οι παραστάσεις:

A= x+y B= x-y Γ= xy

iii) Μεταξύ ποιων τιμών περιέχεται η περίμετρος και το εμβαδόν του ορθογωνίου. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ-ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

31. Δίνεται η παράσταση $\mathrm{A} = |2x-3| - 5$

i) Να γραφεί η παράσταση Α χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $\mathrm{A} = -2$

iii)Να λύσετε την ανίσωση $\mathrm{A} \geq 1$

32. Δίνεται η παράσταση $B = |3x-4|$.Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες :
i) B = 4 ii) B = 4- 3x iii) 3<B < 5

33. Δίνεται η παράσταση $\mathrm{A} = |2x-1|$. Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες :
i) A =d(x,1)
ii) A=5
iii) A < 3
iv) A > 7

34. Δίνονται οι παραστάσεις A= |x|+4 και B=|2x-6|
i) Να λυθεί η εξίσωση $\frac{\mathrm{A}}{3} - \frac{\mathrm{A}}{5} = \frac{2}{3}$
ii) Να βρεθούν οι ακέραιες λύσεις της ανίσωσης 2< B< 8 .
iii) Να λυθεί η εξίσωση A= B για 0<x<3

35. Δίνονται οι παραστάσεις $\mathrm{A} = |x+3|$ και $B = |x-2|$
i) Να λύσετε την εξίσωση : 2A = 3B ,όπου A και B οι παραστάσεις της υπόθεσης
ii) Να λύσετε την εξίσωση : $\frac{A}{2} - \frac{A+4}{3} = 0$,όπου A η δοθείσα παράσταση
iii) Να λύσετε την εξίσωση : $B = 3x+3$,όπου B η δοθείσα παράσταση

36. Δίνονται οι παραστάσεις : $A = |x+4|+7$ και $B = |x-4|+7$
i) Να λυθεί η ανίσωση A > 8.
ii) Να λυθεί η ανίσωση B < 14.
iii) Να λυθεί η εξίσωση A=B .

37. Δίνονται οι παραστάσεις $\mathrm{A} = |3x+4|$ και $\mathrm{B} = |2x+7|$
i) Να λυθεί η ανίσωση $\mathrm{A} \geq 4$
ii) Να λυθεί η ανίσωση $\mathrm{B} \leq 7$
iii) Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων α) και β)
iv) Να λυθεί η εξίσωση : $\mathrm{A} = \sqrt{B}^2$

38. Δίνονται οι παραστάσεις $\mathrm{A}(x) = |x-2| - |3-x|$ και $\mathrm{B}(x) = 1 - |x-3|$
i) Να λυθούν οι εξισώσεις:
α) $\mathrm{B}(x) = -4$ και β) $\mathrm{B}(x) = 5$
ii) Να λυθεί η εξίσωση $\mathrm{A}(x) = 0$
iii) Να λυθεί η ανίσωση $\mathrm{A}(x) < \mathrm{B}(x)$

39. Δίνεται η παράσταση : $\mathrm{A} = \frac{(x^2-2x+1)(x^3-9x)}{x^2-x}$.
i) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A
ii) Να απλοποιήσετε την παράσταση A
iii) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει : A=0

40. Δίνονται οι παραστάσεις $\mathrm{A}(x) = -x^2+x+2$, $\mathrm{B}(x) = 5x^2+20x+20$,
i) Να λυθεί η ανίσωση $\mathrm{A}(x) \leq 0$

ii) Να λυθεί η ανίσωση $B(x) < 0$

iii) $A(x) < B(x)-5$

41. Δίνονται οι παραστάσεις $A(x) = 2x^2+x+1$, $B(x) = -3x^2+18x-27$
i)Να λυθεί η ανίσωση $A(x) \geq 0$
ii) Να λυθεί η ανίσωση $B(x)>0$
iii) $A(x) < B(x)+11$

42. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = |x-2|-5$
i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -1$
iii) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$

43. i) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση $A = α^3 - 3α - 2$.
ii) Δίνεται η εξίσωση: $|λ|(|λ|x + 3) = |λ|^3 + 2|λ|x - 2$ (1)
α) Να λύσετε την εξίσωση (1) για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ.
β) Όταν η εξίσωση (1) έχει μοναδική λύση, να αποδείξετε ότι αυτή είναι μεγαλύτερη ή ίση του 4.

44. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |3x^2 - x + 1| - 2|x^2 + 2| + 1$.
i) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x^2 - x - 2$, $x \in \mathbb{R}$.
ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
iii) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει: $f(x) \leq 10$.
iv) Να λύσετε την εξίσωση $f^2(x) - 2f(x) - 8 = 0$.

45. Δίνεται η εξίσωση : $3x^2 - 2x + 4(\mu - 1) = 0$
i) Να βρεθεί ο $\mu \in R$ ώστε να έχει 2 ρίζες πραγματικές και άνισες
ii) Να βρεθεί ο $\mu \in R$ ώστε να έχει μία διπλή ρίζα και στη συνέχεια να βρεθεί η ρίζα αυτή
iii) Να βρεθεί ο $\mu \in R$ ώστε να έχει ρίζα το 3

46. Δίνεται η εξίσωση : $(\lambda - 2)x^2 - 2x + 4 = 0$,$\lambda \neq 2$
i) Να βρεθεί ο $\lambda \in R$ ώστε να έχει 2 ρίζες πραγματικές και άνισες
ii) Να βρεθεί ο $\lambda \in R$ ώστε να έχει μία διπλή ρίζα και στη συνέχεια να βρεθεί η ρίζα αυτή
iii) Να βρεθεί ο $\lambda \in R$ ώστε να έχει ρίζα το 1

47. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + \lambda x + \lambda - 1 = 0$ με $\lambda \neq 2$.
i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες x_1, x_2.
ii) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις : $x_1 + x_2$ και $x_1 \cdot x_2$.
iii) Να βρείτε τις τιμές του **λ** ώστε να ισχύει η σχέση: $3x_1 + 3x_2 + 3 = x_1^2 \cdot x_2^2$

48. Δίνεται η εξίσωση $αβx^2 - (α+β)x+1 = 0$ με $α \neq 0$, $β \neq 0$.
i) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες για οποιεσδήποτε τιμές των α , β.
ii) Να λυθεί η εξίσωση

iii)Αν μία ρίζα της εξίσωσης είναι ο αριθμός ρ ,να δείξετε ότι ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ της εξίσωσης x^2-(α +β) x +αβ=0

49. Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2 + (\sqrt{\beta} - \alpha)x - \sqrt{\beta} = 0$ με β>0,α≠0.

i) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες για οποιεσδήποτε τιμές των α , β.

ii) Αν x_1 , x_2 οι δύο ρίζες της εξίσωσης να δείξετε ότι $x_1+x_2 + x_1 \cdot x_2 = -1$.

iii) Αν μία ρίζα της εξίσωσης είναι ο αριθμός $\frac{-\sqrt{\beta}}{\beta}$,με $\alpha \neq 1$,να δείξετε ότι β = α

50. Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x) = \lambda x^2 - (\lambda - 1)x + \lambda$, $\lambda \neq 0$

i) Να βρείτε τι τιμές του λ , ώστε η εξίσωση $f(x) = 0$ να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

ii) Να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε η εξίσωση $f(x) = 0$ να έχει ρίζες δύο αντίστροφους πραγματικούς αριθμούς.

iii) Να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε το τριώνυμο να έχει θετικές τιμές για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

51. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - (2\lambda + 1)x + \lambda^2 + \lambda + 1, \lambda \in R$.

i) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ, η εξίσωση:

α) έχει πραγματικές ρίζες,

β) έχει αντίστροφες ρίζες.

ii) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης, να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει: $x_1^2 + x_2^2 = x_1x_2 + 6$.

52. Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x) = (\lambda + 1)x^2 - |\lambda|x - \lambda, \quad \lambda \in R.$

i) Να βρείτε το λ ώστε η εξίσωση f(x)=0 να είναι πρώτου βαθμού.

ii) Να βρείτε το λ ώστε η εξίσωση f(x)=0 να είναι δευτέρου βαθμού και έχει ρίζα τον αριθμό 1.

iii) Για λ=1, να λύσετε την ανίσωση $f(x) \geq 0$

53. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2x - \lambda = 0$, $\lambda \in R$.

i) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

ii) Για $\lambda = 4$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις : $x_1 + x_2$ και $x_1 \cdot x_2$, όπου x_1, x_2 οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης.

iii) Για $\lambda = 4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = (1 + x_1)^{2011} \cdot (1 + x_2)^{2011}$.

54. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = 2ax^2 - (3a^2 - 1)x - 12$ $\mu\varepsilon$ $a > 0$. Αν η μία από τις δύο ρίζες του τριωνύμου είναι η $\rho_1 = -2$

i) Να βρεθεί ο θετικός α (10 μονάδες)

ii) Να βρεθεί η δεύτερη ρίζα ρ_1 του τριωνύμου

iii) Να λυθεί η ανίσωση $-12 < f(x) < 0$

55. Δίνεται η εξίσωση:$(\lambda^2- 5\lambda + 6)x^2 + (\lambda -3)x + 3 = 0$ (1)

i) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ, η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

ii) Αν x_1, x_2 είναι πραγματικές ρίζες της εξίσωσης (1), να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει:

$\left|\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right| \le \frac{1}{3}$.

56. Δίνεται η εξίσωση $x^2+x+\lambda-1=0$ (1) με ρίζες $x_1,\ x_2$.

i) Να βρείτε για ποια τιμή του λ είναι: $x_1 \cdot x_2+3\cdot\left(x_1+x_2\right)+5=0$

ii) Για λ=-1

α) να λυθεί η εξίσωση (1).

β)Να σχηματιστεί άλλη εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες, $\rho_1 = {x_1}^2,\ \rho_2 = {x_2}^2$

57. Δίνεται η εξίσωση:$x^2 - 2\lambda x + \lambda(\lambda + 3) = 0$ (1)

i) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ, η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες,

ii) Έστω S και P το άθροισμα και το γινόμενο αντίστοιχα των ριζών της εξίσωσης (1). Αν ισχύει P-S = 12, να βρείτε την τιμή του λ.

iii) Έστω x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα (β).

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$

β) Να σχηματίσετε εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς $x_1^2x_2$ και $x_2^2x_1$.

58. Δίνεται η εξίσωση:$x^2-(\lambda + 1)x + \lambda = 0$ (1)

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in R$.

ii) Έστω x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1).

α) Να αποδείξετε ότι: $x_1^2x_2+x_2^2x_1+x_1+x_2 \ge 0$

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει: $x_1^2+x_2^2 \le x_1+x_2$

59. Δίνεται το τριώνυμο :$f(x) = x^2- (3\lambda +2)x + \lambda^2+3\lambda -4$.(10

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει 2 ρίζες πραγματικές και άνισες

ii) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε ο αριθμός 1 να είναι ρίζα της εξίσωσης .

iii) α)Να βρείτε την τιμή του λ ώστε να ισχύει $x_1^2+x_2^2=6x_1x_2$,x_1,x_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1)

β)Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα (α) να λύσετε την ανίσωση f (x) < -50.

60. Δίνεται η εξίσωση:$2x^2 + \alpha x- 3 = 0$ (1)

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές και άνισες ρίζες για κάθε $\alpha \in R$.

ii) Αν x_1 , x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης, να βρείτε για ποιες τιμές του α ισχύει:$|x_1-x_2|<\sqrt{15}$

61. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^2 + (\mu+ 2)x + \mu$

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f (x) = 0 έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες ρ_1, ρ_2 για κάθε $\mu \in$ R.

ii) Να βρείτε για ποιες τιμές του μ, η εξίσωση: $x^2+|\rho_2-\rho_1|\cdot x+\frac{5\rho_1\rho_2}{4}=0$ έχει μοναδική λύση.

iii) Να βρείτε για ποιες τιμές του μ αληθεύει η ανίσωση: $\rho_1^2+\rho_2^2>\rho_1\rho_2+6$

62. Δίνεται η εξίσωση:$(\lambda + 1)x^2-2(\lambda-1)x-1=0$ (1) με $\lambda \neq -1$.

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda\neq-1$.

ii) Έστω x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1). Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες:
α) οι αριθμοί x_1 και x_2 είναι ετερόσημοι ,
β) ισχύει $x_1 + x_2 < x_1x_2$.

63. Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=x^2-(λ-1)x-λ+1$.
i) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση f(x)=0, να έχει πραγματικές ρίζες.
ii) Για ποιες τιμές του λ το τριώνυμο έχει διπλή ρίζα;
iii) Να γράψετε το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών της εξίσωσης.
iv) Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{3|S|}{2}-|P|<4$.

ΠΡΟΟΔΟΙ

64. Δίνεται αριθμητική πρόοδος ($α_ν$), της οποίας ο 6ος όρος είναι 10 και το άθροισμα των πρώτων 15 όρων είναι 60. Να βρείτε:
i) τον πρώτο όρο και τη διαφορά της ($α_ν$),
ii) τον 21ο όρο της ($α_ν$),
iii) ποιος όρος της ($α_ν$) είναι ίσος με - 62,
iv) το άθροισμα των πρώτων 25 όρων της ($α_ν$),
v) πόσοι πρώτοι όροι της ($α_ν$) έχουν άθροισμα 110,
vi) πόσους θετικούς όρους έχει η ($α_ν$),
vii) τον γεωμετρικό μέσο των αριθμών $α_{11}$ και $α_{16}$.

65. Δίνεται γεωμετρική πρόοδος ($α_ν$), της οποίας ο 5ος όρος είναι 48 και 0 8ος όρος είναι 384. Να βρείτε:
i) τον πρώτο όρο και τη διαφορά της ($α_ν$),
ii) τον 10ο όρο της ($α_ν$),
iii) ποιος όρος της ($α_ν$) είναι ίσος με 192,
iv) το άθροισμα των πρώτων 10 όρων της ($α_ν$),
v) πόσοι πρώτοι όροι της ($α_ν$) έχουν άθροισμα 189,
vi) τον αριθμητικό μέσο των αριθμών $α_4$ και $α_9$.

66. Οι αριθμοί 3x-2, x+1 και 2x-5 είναι διαδοχικοί όροι μίας αριθμητικής προόδου $(a_ν)$
i) Να αποδείξετε ότι x=3.
ii) Να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου.
iii) Αν ο αριθμός 3x-2 είναι ο έκτος όρος της προόδου, να βρείτε:
α) τον πρώτο όρο της προόδου
β) το άθροισμα S_{20} των 20 πρώτων όρων της προόδου.

67. Αν $-x^3 + κ$, $x^2 + 3 + κ$, $- 3x + κ$, με τη σειρά που δίνονται, είναι οι τρεις πρώτοι όροι αριθμητικής προόδου και έχουν άθροισμα 27, τότε:
i) να αποδείξετε ότι x =- 2,
ii) να βρείτε τον αριθμό κ,
iii) να υπολογίσετε τον εικοστό όρο α20 της προόδου,
iv) να υπολογίσετε το άθροισμα S20 των είκοσι πρώτων όρων της προόδου.

68. Δίνεται ακολουθία ($α_ν$) με $α_1$=9 για την οποία ισχύει $α_{ν+1}=2α_ν-6$.
i) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία ($γ_ν$) με $γ_ν=α_ν-6$ είναι γεωμετρική πρόοδος.
ii) Να βρείτε τον 9ο όρο της ακολουθίας

iii) Να βρείτε το άθροισμα των 7 πρώτων όρων της $(α_ν)$

69. Σε μια γεωμετρική πρόοδο $(α_ν)$ ισχύει: $α_6 \cdot α_9 = 2α_4$

i) Να βρείτε το γινόμενο των πρώτων 21 όρων της $(α_ν)$.

ii) Αν επιπλέον ισχύει $a_{12} = \sqrt{8}$, να βρείτε:

α) τον λόγο και τον πρώτο όρο της $(α_ν)$,

β) την τιμή του $κ \in R$, ώστε οι αριθμοί: $\alpha_{11}, \alpha_{15} + \kappa, \alpha_{19} - \kappa$ να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

70. Δύο αριθμοί έχουν αριθμητικό μέσο 5 και γεωμετρικό μέσο 4.

i) Να βρείτε τους αριθμούς αυτούς.

ii) Αν ο μικρότερος από τους αριθμούς που βρήκατε είναι ο 5ος όρος και ο μεγαλύτερος είναι ο 9ος όρος μιας αριθμητικής προόδου $(α_ν)$, τότε:

α) να βρείτε τον πρώτο όρο και τη διαφορά της $(α_ν)$,

β) να βρείτε για ποιον όρο ισχύει $α_ν = ν$,

γ) να βρείτε πόσοι από τους πρώτους όρους της (αν) έχουν άθροισμα 205,

δ) να υπολογίσετε το άθροισμα: $S = α_1 + α_3 + α_5 + ... + α_{23}$

71. Έντεκα αριθμοί αποτελούν διαδοχικούς όρους μιας γεωμετρικής προόδου. Οι πρώτοι έξι από αυτούς έχουν άθροισμα 63, ενώ οι έξι τελευταίοι έχουν άθροισμα 2016.

i) Να βρείτε τον λόγο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου.

ii) Ανάμεσα στον πρώτο και τον έβδομο αριθμό να παρεμβάλλεται 8 αριθμούς, ώστε όλοι μαζί να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

72. Σε μια αριθμητική πρόοδο $(α_ν)$, ο 4ος όρος είναι - 5, ενώ το άθροισμα του 7ου και του 11ου όρου είναι 20. Να βρείτε:

i) τον πρώτο όρο και τη διαφορά της προόδου,

ii) πόσοι πρώτοι όροι της προόδου έχουν άθροισμα -5,

iii) το άθροισμα $S = α_1 + α_3 + α_5 + ... + α_{25}$,

iv) το άθροισμα των όρων $α_κ$ για τους οποίους ισχύει ότι $a_\kappa^2 \leq 14\alpha_\kappa + 95$.

73. Δίνεται αριθμητική πρόοδος $(α_ν)$, με διαφορά $ω \neq 0$, για την οποία ισχύει: $α_1 + α_8 = α_2 + α_4 + α_9$

i) Να βρείτε τον όρο $α_6$.

ii) Να αποδείξετε ότι: $a_5 \cdot a_7 < 0$.

iii) Να αποδείξετε ότι $α_{2ν-6} = 2α_ν$ για κάθε $ν \geq 4$

iv) Να υπολογίσετε τον λόγο $\dfrac{S_{44}}{S_{22}}$

74. Σε μια αριθμητική πρόοδο $(α_ν)$ ισχύει $S_{20} = 820$ και η σχέση: $α_2 + α_4 + α_6 + ... + α_{20}= 430$.Να βρείτε:

i) τον πρώτο όρο και τη διαφορά της προόδου,

ii) το άθροισμα: $S= α_{21} + α_{22} + ... + α_{30}$

iii) την τιμή του $κ \in N^*$, ώστε οι αριθμοί $α_κ$, $α_{5κ-1}$,$α_{24κ-4}$ να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.

75. Δίνεται η ακολουθία με γενικό όρο : $\alpha_\nu = -11 + 2\nu$.

i) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (αν) είναι αριθμητική πρόοδος και έχει πρώτο όρο $\alpha_1 = -9$ και διαφορά ω=2

ii) Να βρείτε το άθροισμα: $S = a_{12} + a_{13} + ... + a_{21}$,όπου $a_{12}, a_{13}, ..., a_{21}$ είναι διαδοχικοί όροι της προόδου ($α_ν$).

iii) Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης: $|x^2-2x-1|=2$ είναι διαδοχικοί όροι της προηγούμενης προόδου ($α_ν$).

76. Στα πρώτα γενέθλια του παιδιού τους, δυο γονείς του καταθέτουν ένα χρηματικό ποσό. Ο πατέρας καταθέτει 150 € και κάθε χρόνο στα γενέθλια του παιδιού, θα αυξάνει το ποσό κατά 6 €. Η μητέρα καταθέτει τώρα μόνο 1 € και κάθε επόμενα γενέθλια του παιδιού, θα διπλασιάζει το προηγούμενο ποσό.

i) Πόσα χρήματα θα καταθέσει ο πατέρας στα δέκατα γενέθλια του παιδιού του;

ii) Πόσα χρήματα θα καταθέσει η μητέρα στα έκτα γενέθλια του παιδιού της;

iii) Αν μετά τα δέκατα όγδοα γενέθλια του το παιδί κάνει ανάληψη των καταθέσεων των γονιών του, πόσα χρήματα θα εισπράξει συνολικά;

iv) Σε ποια γενέθλια του παιδιού, το ποσό που θα καταθέσει η μητέρα του θα ξεπεράσει τα 1030 € ;

77. Η τιμή αγοράς ενός ηλεκτρονικού υπολογιστή είναι μεγαλύτερη από 620€ και μικρότερη από 640€.

Κατά την αγορά συμφωνήθηκαν τα εξής:

- Να δοθεί προκαταβολή 120€ .
- Η εξόφληση του υπόλοιπου ποσού να γίνει σε δέκα μηνιαίες δόσεις
- Κάθε δόση να είναι μεγαλύτερη από την προηγούμενη κατά ω € όπου ω θετικός ακέραιος
- Η τέταρτη δόση είναι 48 € .

α)Να εκφράσετε το ποσό της πρώτης δόσης ως συνάρτηση του ω

β)Να εκφράσετε την τιμή αγοράς σαν συνάρτηση του ω

γ)Να βρείτε την τιμή του ω

δ)Να βρείτε το ποσό της τελευταίας δόσης.

ε)Να βρείτε την τιμή αγοράς του ηλεκτρονικού υπολογιστή.

78. Σ ’έναν ουρανοξύστη 17 ορόφων ,τα γραφεία του ίδιου ορόφου έχουν το ίδιο ενοίκιο .Κάθε γραφείο του πρώτου ορόφου ενοικιάζεται 550€ το μήνα. Κάθε γραφείο ενός ορόφου ενοικιάζεται 35€ το μήνα ακριβότερα από ένα γραφείο του προηγούμενου ορόφου.

i) Ποιο είναι το μηνιαίο ενοίκιο ενός γραφείου του πέμπτου ορόφου;

ii) Πόσο ακριβότερο είναι ένα γραφείο του 15ου ορόφου από ένα του 7ου ορόφου;

iii) Σε ποιους ορόφους το ενοίκιο ξεπερνά τις 1000€ το μήνα;

iv) Αν το πλήθος των γραφείων ενός ορόφου είναι μικρότερο κατά 2 από το πλήθος των γραφείων του αμέσως προηγούμενου ορόφου και ο 17ος όροφος έχει 12 γραφεία ,να βρείτε :

α)πόσα γραφεία έχει ο πρώτος όροφος .

β) πόσα γραφεία έχει συνολικά ο ουρανοξύστης.

γ) πόσο θα κοστίσει τον μήνα σε έναν επιχειρηματία να νοικιάσει όλα τα γραφεία που βρίσκονται στον μεσαίο όροφο του ουρανοξύστη.

79. Σε ένα θέατρο, η πρώτη σειρά έχει 70 καθίσματα και η τελευταία έχει 250 καθίσματα. Το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς σχηματίζει αριθμητική πρόοδο. Η προτελευταία σειρά έχει 140 καθίσματα περισσότερα από τη δεύτερη σειρά.

i) Να αποδείξετε ότι κάθε σειρά καθισμάτων του θεάτρου έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη σειρά.

ii) Να υπολογίσετε το πλήθος των καθισμάτων του θεάτρου.

iii) Την πρώτη παράσταση ενός θεατρικού έργου, σ’ αυτό το θέατρο, την παρακολούθησαν 100 θεατές,ενώ σε κάθε επόμενη παράσταση, ο αριθμός των θεατών διπλασιαζόταν. Ποια είναι η παράσταση στην οποία για πρώτη φορά θα γεμίσει το θέατρο;

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

80. Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=\dfrac{x}{x-1}$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

ii) Να βρείτε τις τιμές $f\left(0\right)$ και $f\left(2\right)$.

iii) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x.

iv) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y=2$.

81. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{2-x}}$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $\dfrac{x-1}{2-x}=f\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

iii) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$.

82. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+2}}$.και $g(x)=\sqrt{\dfrac{x+3}{x+2}}$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g.

iii) Να βρεθούν τα σημεία τομής των f και g με τους άξονες

iv) Να εξετάσετε αν τα σημεία $\mathrm{A}\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$, $B\left(0,4\right)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση των 2 συναρτήσεων.

83. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{\dfrac{-2x+1}{x-3}+2}$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

ii) Να βρείτε, αν η γραφική της παράσταση τέμνει και σε ποια σημεία τους άξονες χ΄χ και $y'y$.

iii) Να βρείτε τη τιμή της συνάρτησης για $x=-7$

84. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x^2-x+a}{x^2-5x+4}$.

i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f(x).

ii) Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α, αν γνωρίζετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A\left(3,-7\right)$.

iii) Αν $\alpha=-1$, τότε:

α) Να απλοποιηθεί ο τύπος της συνάρτησης.

β) Να βρεθούν τα σημεία τομής της με τους άξονες.

γ) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = 1$

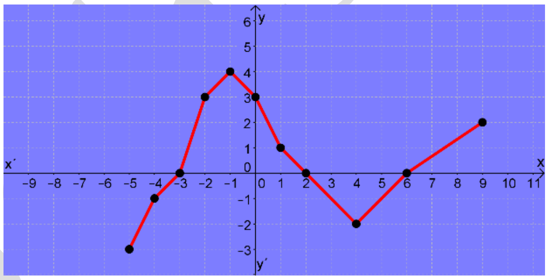
85. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της με μορφή διαστημάτων.

ii) Να βρείτε τα σημεία τομής της συνάρτησης f με τον άξονα x΄x και με τον άξονα y΄y.

iii) Αφού απλοποιήσετε τον τύπο της παραπάνω συνάρτησης, να δικαιολογήσετε γιατί παριστάνει ευθεία γραμμή από την οποία εξαιρείται ένα σημείο. Ποιο είναι αυτό; Τι γωνία σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα x΄x;

86. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.



i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f.
ii) Να βρείτε τις τιμές $f(0)$, $f(1)$ και $f(f(4))$.
iii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
iv) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -3$.
v) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 3$.
vi) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = α$ για τις διάφορες τιμές του $α \in R$.

87. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + βx + γ$, με $β, γ \in R$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία M(1,-8) και N(4,-5).
i) Να βρείτε τις τιμές των β και γ,
ii) Αν β=-4 και γ=-5 ,να βρείτε :
α) τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες
β) τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα χ'χ
γ) τη σχετική θέση της γραφικής παράστασης της f ως προς την ευθεία y=-9

88. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = 3x^2 + (2λ + 4)x + 2μ - 3$.Αν διέρχεται από το σημείο Α(-1,-2) και τέμνει τον y'y στο σημείο με τεταγμένη 1.
i) Να βρείτε τους αριθμούς λ και μ.
ii) Έστω λ=1,μ=2.
α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = αx + α^2 - 2$,α>0 διέρχεται από το σημείο N(-μ, λ). Να βρείτε τον αριθμό α.
β) Να βρείτε την σχετική θέση των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

89. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1 - \dfrac{2}{x+1}}{2 - \dfrac{2x+1}{x+1}}$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
ii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.
iii) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφική της παράστασης με τους άξονες.

90. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{(x+1)\cdot\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1}$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και στη συνέχεια να απλοποιήσετε τον τύπο της.

ii) Να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση f.

iii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=x^2-1.$

91. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x^2-5x+2}{3x^2-8x+4}}$.

i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

ii) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x)=f^2(x)$

iii)Να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με την ευθεία y=3

92. Δίνονται οι συναρτήσεις f (x) = x^2 + 6x + 7 και g(x) = x^2- 2x+ 3 και έστω ε η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α(3,f(3)) και Β(1,g(1).

i) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε.

ii) Έστω Γ και Δ τα σημεία της ευθείας ε με τεταγμένες -1 και 5 αντίστοιχα. Να βρείτε:

α) τις τετμημένες των Γ και Δ,

β) τα συμμετρικά των Γ και Δ ως προς την διχοτόμο του 1ου και 3ου τεταρτημορίου.

iii) Να βρείτε το κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων της f και g

iv) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της g

93. Δίνεται η συνάρτηση f (x) = $\begin{cases} 4x-a, |x|\leq 1 \\ \beta x^2-a, x\geq 2 \end{cases}$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της f.

ii) Να βρείτε τα α, β, ώστε f(0) = -3 και f(2) = 3.

iii) Για α = β = 1

α) Να λύσετε την εξίσωση f(x) = 0.

β) Να βρείτε το γ, ώστε f(f(1)) = γ^3.

94. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 3x+9, & \alpha\nu\ x\leq 2 \\ 6x+3, & \alpha\nu\ x>2 \end{cases}$

i) Να υπολογιστούν οι τιμές: $f\left(\frac{4}{3}\right)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(3)$, $f\left(\frac{7}{3}\right)$

ii) Να βρείτε τα συμμετρικά των σημείων $A\left(\frac{4}{3}, f\left(\frac{4}{3}\right)\right), B(0, f(0))$ ως προς την αρχή των αξόνων

iii) Να κάνετε τη γραφική της παράσταση

95. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} -8x-30, & \alpha\nu\ x\leq -1 \\ 10x-24, & \alpha\nu\ x>-1 \end{cases}$.

i) Να υπολογιστούν οι τιμές: $f(2), f(-4), f(-3), f(3)$

ii) Να δείξετε ότι τα σημεία Α(2, $f(2)$) και Β(-4, $f(-4)$) είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων

iii) Να δείξετε ότι τα σημεία Γ(3, $f(3)$) και Δ(-3, $f(-3)$) είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων

96. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases} \alpha x+2 & ,\alpha\nu\ x\le -4 \\ \beta x-14, & \alpha\nu\ -4<x<-2 \\ -2x & ,\alpha\nu\ x\ge -2 \end{cases}$ με α ,β∈R, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία Α(-6, 4) και Β(- 3, 1).

i) Να βρείτε τις τιμές των α και β.

ii) Έστω ε η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α και Β.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε.

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε διέρχεται από τα σημεία Γ(-1, f(-1)) και Δ(2, f(2)) της C_f.

iii) Για α=1 και β=-5 ,

α) να σχεδιάσετε τη C_f και την ευθεία ε.

β) να λύσετε την ανίσωση f (x) < -x-2

97. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases} \alpha x & ,\alpha\nu\ x\le -1 \\ 2x-1, & \alpha\nu\ -1<\mathrm{x}<2 \\ \beta x-5 & ,\alpha\nu\ x\ge 2 \end{cases}$ με α, β ∈ R, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία Α(-2,-6)και Β(4,11)

i) Να βρείτε τις τιμές των α και β.

ii) Αν α=3 και β=4

α) Να βρείτε τις τιμές f(-1),f(0),f(f(0),f(4)

β) Να βρείτε τα συμμετρικά των σημείων Α και Β ως προς την διχοτόμο του 1ου-3ου τεταρτημορίου

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΑΒ

δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

98. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{2x-3}$ και $g(x)=\left|-2x+3\right|$

i) Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των παραπάνω συναρτήσεων.

ii) Να λύσετε την εξίσωση g(x)= 4

iii) Να λύσετε την εξίσωση f(x)=g(x)

99. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x-2, & x\le 2 \\ -3x+6, & x>2 \end{cases}$.

i) Να βρείτε τα $f(2), f(-2), f\left(f(2)\right)$.

ii) Να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

iii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=2$.

iv) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>-2$.

100. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-2\lambda x+\lambda-2$.

i) να αποδειχτεί ότι η εξίσωση f(x) = 0 έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε πραγματικό λ

ii) να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού λ ώστε να ισχύει $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=6$,όπου x_1,x_2 οι ρίζες της εξίσωσης f(x)=0

iii) για λ=3 να λυθεί η ανίσωση $-7\le f(x)\le -4$

101. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + x - 6$

i) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης τέμνει τον άξονα χ΄χ και τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης, τα οποία βρίσκονται πάνω από τον άξονα χ΄χ.

ii) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση $f(x) = \lambda + x$ να μην έχει πραγματικές ρίζες.

iii)Να λύσετε την εξίσωση $f\left(|x+2|\right) = 6$.

102. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \lambda x - 15$, με $\lambda \in R$. Αν το σημείο Δ(-2, -7) ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης τότε:

i) Να δείξετε ότι $\lambda = -2$

ii) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης τέμνει τους άξονες χ΄χ και ψ΄ψ.

iii) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης που βρίσκονται κάτω από τον άξονα χ΄χ.

103. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x-2| + \alpha$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο Μ(-5, 4).

i) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -3$.

ii) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.

iii) Έστω ε η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α και Β της C_f με τετμημένες -4 και 4 αντίστοιχα,

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε.

β) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τη C_f και την ευθεία ε.

γ) Να λύσετε γραφικά την ανίσωση:

δ) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = \kappa$ για τις διάφορες τιμές του $\kappa \in R$.

104. Οι ευθείες: ε_1: $y = (4\alpha - 5)x + 3$ και $\varepsilon_2 : y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$ είναι κάθετες.

i) Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in R$.

ii) Να βρείτε το σημείο τομής Α των ευθειών ε_1 και ε_2.

iii) Να υπολογίσετε την απόσταση (ΑΒ), όπου Β(2, -4).

iv) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης: $f(x) = x^2 + \lambda x - 4$ διέρχεται από το σημείο Α, να βρείτε :

α) την τιμή του $\lambda \in R$,

β) τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα χ΄χ

105. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = -x^2 + \lambda x - 2\lambda - 4$, με $\lambda \in R$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο Μ (λ - 3, 7 - λ) και η συνάρτηση: $g(x) = x^2 + \beta x + \gamma$, με $\beta, \gamma \in R$ της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο με τεταγμένη -1 και διέρχεται από το σημείο Ν(3, 2).

i) Να βρείτε τον αριθμό λ.

ii)Αν $\lambda=10$

α) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η C_f είναι κάτω από τον άξονα χ'χ.

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y=-47$

iii) Να βρείτε:

α) τους αριθμούς β και γ,

β) αν $\beta=-2, \gamma=-1$ να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η C_g βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y=2$

106. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \lambda x + 3$,$\lambda<0$ διέρχεται από το σημείο $A(\lambda + 2, 3\lambda + 15)$. Να βρείτε:

i) τον αριθμό λ,

ii) Αν $\lambda=-3$

α) να βρείτε το συμμετρικό σημείο A' του A ως προς τη διχοτόμο της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων,

β) την ευθεία που είναι παράλληλη στον χ΄χ και διέρχεται από το σημείο A.

107. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης: $f(x) = \lambda\sqrt{x-2}$ διέρχεται από το σημείο A(6, -6).

i) Να βρείτε τον αριθμό λ

ii) Αν $\lambda=-3$

α) να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) να εξετάσετε αν το συμμετρικό του σημείου A ως προς τον χ΄χ ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες .

108. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = |x- 3| - 2|x|$

i) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.

ii) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η C_f είναι κάτω από τον άξονα χ'χ.

iii) Να γράψετε τον τύπο της f χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.

iv) Η ευθεία $y = (\lambda^2 - 4\lambda + 1)x + 3$ είναι παράλληλη στη C_f όταν $x\in (0, 3)$. Να βρείτε τον αριθμό λ.

109. Δίνονται τα σημεία $A(3\lambda, 4)$ και $B(3, 4\lambda)$, τα οποία είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων O.

i) Να βρείτε τον αριθμό λ.

ii) Να βρείτε την ευθεία ε που διέρχεται από τα σημεία A και B.

iii) Να βρείτε τα σημεία τομής της ε με τους άξονες.

iv) Να βρείτε την ευθεία ζ που είναι κάθετη στην ε και διέρχεται από το σημείο Γ (8,-7).

v) Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών ε και ζ.

110. Δίνονται τα σημεία: A(1, 3) και B(-4,-2).Να βρείτε:

i) την εξίσωση της ευθείας ε_1 που διέρχεται από τα σημεία A και B,

ii) το συμμετρικό A' του A ως προς τον άξονα χ'χ και το συμμετρικό B' του B ως προς τον άξονα y'y.

iii) την εξίσωση της ευθείας ε_2 που διέρχεται από τα σημεία A' και B',

iv) το σημείο τομής των ευθειών ε_1 και ε_2.

111. Δίνονται οι ευθείες :ε_1: $y = |\alpha + 1|x + 3$ και ε_2: $y = |2\alpha- 3|x + 20$

i) Να βρείτε για ποιες τιμές του α, οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες.

ii) Για τη μεγαλύτερη από τις παραπάνω τιμές του α, να βρείτε:

α) το σημείο τομής A της ε_1 με τον y'y,

β) το σημείο τομής B της ε_2 με τον χ'χ.

γ) τα συμμετρικά των σημείων A και B ως προς την αρχή των αξόνων .

112. Έστω τα σημεία $A\left(\alpha^2-3\alpha,|\beta+1|\right)$, B(2,-1) και $\Gamma\left(3\alpha-1,2|\beta|\right)$.Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ για τα οποία:

i) τα σημεία A,B να είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων

ii) A,Γ να είναι συμμετρικά ως προς τον y΄y

iii) B,Γ να είναι συμμετρικά ως προς την διχοτόμο της γωνίας xOy

iv) το σημείο Α να ανήκει στην ευθεία $y=-x-\frac{9}{4}$

113. Έστω ότι οι ευθείες ε: y = λ(λ - 4)x + λ - 2 και ζ: y = (2λ - 9)x + 6 είναι παράλληλες.
i) Να βρείτε τον αριθμό λ.
ii) Αν λ=3 και το σημείο Α(α + 4, α - 3) ανήκει στην ευθεία ε :
α) να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ζ με τους άξονες και να τη σχεδιάσετε.
β) να βρείτε τον αριθμό α.
iii) Για α= -2 να βρείτε το συμμετρικό του σημείου Α ως προς:
α) τον άξονα χ'χ,
β) τον άξονα y'y,
γ) την αρχή των αξόνων,
δ) τη διχοτόμο της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων
iv) Έστω Β το σημείο της ευθείας ζ με τεταγμένη 3. Να βρείτε:
α) την τετμημένη του σημείου Β,
β) το τεταρτημόριο που ανήκει το Β.

114. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης: $f(x)=\sqrt{|x-2|+a}$ διέρχεται από το σημείο Μ(- 11, 3).
i) Να βρείτε τον αριθμό α,
ii) Για α=-4
α)να βρείτε το πεδίο ορισμού της f,
β) Να κάνετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $g(x)=f^2(x)$

115. Δίνονται οι συναρτήσεις: f (x) = x^2 + 6x -7 και g (x) =- x^2 -2x -8.
i) Να βρείτε τα σημεία τομής των C_f και C_g.
ii) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g
iii) Να λύσετε την ανίσωση $x^2-19<f(x)\le g(x)-5$

116. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης: $f(x)=\frac{4}{x^2+x+a}-1$ διέρχεται από το σημείο $M(-1,-3)$.
i) Να βρείτε τον αριθμό α,
ii) Αν α=-2 ,να βρείτε
α) το πεδίο ορισμού της f,
β) τα σημεία τομής Α,Β της C_f με τον άξονα χ'χ ,και το σημείο τομής Γ της C_f με τον άξονα y'y,
γ)την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία Α και Γ(Α το σημείο με θετική τετμημένη)
δ) την εξίσωση της ευθείας ζ που είναι παράλληλη στην ε και διέρχεται από το σημείο Ν(2, -6),
ε) το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία ζ με τους άξονες.

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΕΣ

117. Έστω Ω το σύνολο που έχει ως στοιχεία τους αριθμούς που είναι οι ενδείξεις ενός ζαριού και λ ∈ Ω Αν η εξίσωση x^2-2x + λ-2 = 0 δεν έχει καμία πραγματική ρίζα, να βρείτε το σύνολο που έχει στοιχεία τις τιμές του λ.

118. Έστω Ω το σύνολο που έχει ως στοιχεία τους αριθμούς που είναι οι ενδείξεις ενός ζαριού και λ ∈ Ω. Αν η εξίσωση x^2-3x + λ-1 = 0 έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες και Α το σύνολο που έχει ως στοιχεία τις τιμές του λ:

i) Να βρείτε το Α.
ii) Αν Γ = Α∪{β} και Δ = {1,4,3,α} να βρείτε τα α και β, ώστε τα σύνολα Γ και Δ να είναι ίσα.

119. Έστω Α,Β ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω ,ώστε να ισχύουν :

- Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα Α,Β είναι $\frac{7}{8}$
- Οι πιθανότητες P(B),P(A∩B) δεν είναι ίσες και ανήκουν στο σύνολο : $X=\left\{\kappa,\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right\}$,όπου

$$\kappa=\frac{3^{\frac{1}{12}}\cdot\sqrt[3]{3\sqrt{3^3\sqrt{3}}}}{\sqrt[5]{2^8}\cdot\sqrt[5]{3-\sqrt{5}}\cdot\sqrt[5]{3+\sqrt{5}}}$$

i) Να βρείτε το κ
ii) Να βρείτε τα P(B), P(A∩B) και να αιτιολογήσετε την απάντηση σας
iii) Να βρείτε τις πιθανότητες:
α) να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο Α
β) να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο Α

120. Έστω Α,Β ενδεχόμενα δειγματικού χώρου Ω και $P(A),P(B)$ οι πιθανότητές τους, αντίστοιχα. Αν $\left|P(A)-2\right|-4\left|3-P(A)\right|+9=0$, το $P(B)$ είναι ρίζα της εξίσωσης $4x^2-9x+2=0$ και $P(A\cup B)=\frac{5}{12}$, τότε:
i) Να βρείτε το $P(A)$.
ii) Να βρείτε το $P(B)$.
iii) Να βρείτε τη πιθανότητα να πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα τα Α και Β.
iv) Να λύσετε την ανίσωση $x^2-12P(A)x+9P(A)>0$.

121. Δίνεται η ευθεία (ε) : $y=3P(A)x+2$, όπου $P(A)$ η πιθανότητα ενός ενδεχομένου Α και το σημείο της Β(1,3)
i) Να βρείτε το $P(A)$
ii) Αν $P(B)$ η τετμημένη του σημείου τομής της (ε) με την ευθεία (δ) : $y=16P(B)x+\frac{5}{4}$ ($P(B)$ είναι η πιθανότητα ενός ενδεχομένου Β) και τα ενδεχόμενα Α,Β είναι ασυμβίβαστα να βρείτε τη πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα Α,Β.
iii) αν $P(B)=\frac{1}{2}$ και $P(B-A)=\frac{1}{3}$, να βρείτε τη πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα Α,Β

122. Έστω P(A) και P(B) οι πιθανότητες των ενδεχομένων Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω. Για τον αριθμό P(A) ισχύει: $\left|3+2P(A)\right|-\left|P(A)-1\right|=3$, ενώ ο αριθμός P(B) είναι ρίζα της εξίσωσης: $6x^2$-x-1=0.
i) Να βρείτε τους αριθμούς P(A) και P(B)
ii) Αν P(A)= $\frac{1}{3}$ και P(B)= $\frac{1}{2}$ και η πιθανότητα να συμβούν ταυτόχρονα τα ενδεχόμενα Α και Β

είναι $\frac{1}{6}$, να υπολογίσετε:

α) την πιθανότητα να συμβεί τουλάχιστον ένα από τα ενδεχόμενα Α και Β

β) την πιθανότητα να συμβεί το πολύ ένα από τα Α και Β

123. Δίνεται η παράσταση Α= $\lambda^3-\lambda^2+\lambda-1$

i) Να την παραγοντοποιήσετε

ii) Αν $\lambda>1$ να δείξετε ότι $A>0$

iii) Αν $A=0$ να λυθεί η ανίσωση $|x-2|<\lambda$

124. Δίνονται οι παραστάσεις $A=d(x,4)$, $x\in\mathbb{R}$, $B=\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{3-\sqrt{5}}$ και

$\Gamma=\frac{1}{(2-\sqrt{3})^2}-\frac{1}{(2+\sqrt{3})^2}$.

i) Να αποδείξετε ότι $B=2$

ii) Να αποδείξετε ότι $\Gamma=8\sqrt{3}$

iii) Να λύσετε την εξίσωση $A=B$.

iv) Να λύσετε την ανίσωση $A\le\Gamma$

125. Δίνεται ο αριθμός: $a=(\sqrt{72}-\sqrt{36}-\sqrt{8})(\sqrt{2}+1)$.

i) Να βρείτε τον αριθμό α.

ii) Να λύσετε την εξίσωση: $|2x-a|+|ax-8|=a^2-2\sqrt{x^2-ax+a}$.

126. Δίνεται ο αριθμός: $a=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

i) Να βρείτε τον αριθμό α

ii) Αν α=5

α)Να λύσετε την εξίσωση $(x-3)^4-a(x-3)^2+4=0$

β) Να λύσετε την ανίσωση $\alpha|2x-3|-|6-4x|\le\sqrt[3]{a^2+2}$

127. Δίνεται η επόμενη εξίσωση: $\lambda^2(x-1)=2(2x-\lambda)$ (1)

i) Αν η εξίσωση (1) είναι ταυτότητα, να λύσετε την εξίσωση $x^2-(\lambda+1)|x|+\lambda=0$.

ii) Αν η εξίσωση (1) είναι αδύνατη, να λύσετε την ανίσωση $x(x-2\lambda)+\lambda(x+4)\le 0$.

iii) Αν η εξίσωση (1) έχει μοναδική λύση x_0, να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει $|x_0|=\frac{1}{2}$.

128. Δίνεται η εξίσωση $\lambda^2(x-1)-2(\lambda-1)(\lambda+1)=2(\lambda x-1)$ (1)

Αν η εξίσωση (1) είναι ταυτότητα ,τότε :

i) να βρείτε την τιμή του λ ,

ii) να λύσετε την εξίσωση: $\left|\frac{|x|-\lambda}{|x|-1}\right|=\lambda$

129. Δίνεται η παράσταση : $A=\frac{|1-x|-2x^2+4x-2}{|x-1|}$.

i) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α

ii) Να απλοποιήσετε την παράσταση Α

iii) Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) Α=1 β) Α=-1

130. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)= x^2 + 3x - 10$

i) Να λύσετε την ανίσωση : $f(x)< 0$

ii) Αν οι τιμές του x που βρήκατε στο ερώτημα (i) ανήκουν στο διάστημα $(-5,2)$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\mu = 2|x + 5| - 3|x - 2| + 5|x - 4|$

iii) Αν $\mu = 24$,να βρείτε την τιμή της παράστασης: $A=\sqrt[3]{3+\sqrt[4]{\mu+1}}\cdot\sqrt[3]{3-\sqrt[4]{\mu+1}}\cdot\sqrt[3]{2}$

131. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2-\lambda)x=\lambda-1,\ \lambda\in\mathbb{R}$.Αν η εξίσωση είναι αόριστη τότε:

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(\lambda^2+\lambda-2)x=4\lambda$ είναι αδύνατη.

ii) Να αποδείξετε ότι $\dfrac{2x}{x^2+1}\le\lambda$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

iii) Να λυθεί η ανίσωση $\left|x^2-1\right|<3\lambda$.

132. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^2-x+1$.

i) να αποδείξετε ότι $f(x)>0$ για κάθε πραγματικό x

ii) να λυθεί η εξίσωση $|-f(x)|-|f(x)-3x|=2$

iii) να βρεθεί το πεδίο ορισμού της $g(x)=\dfrac{f(x)}{\sqrt{1-x}}$

133. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^4-5x^2+8$ και η παράσταση $A=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

i) Να αποδείξετε ότι η παράσταση $A=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=4$.

ii) Να βρεθούν τα σημεία τομής της $f(x)$ με τους άξονες

iii) Να βρεθούν τα σημεία τομής της $f(x)$ με την ευθεία $y=A$,όπου A η παράσταση που έχει δοθεί

134. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\dfrac{x^3-9x}{x^2+3x}$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να απλοποιήσετε τον τύπο της.

ii) Να μετατρέψετε το κλάσμα $A=\dfrac{f(10)}{f(6)-\sqrt{f(5)}}$ σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή.

iii)Να λύσετε την ανίσωση: $(f(2))^{2012}\cdot x^2+\sqrt[3]{f(30)}\cdot x-10\le 0$

135. Έστω οι εξισώσεις $x^2-\sqrt{2}=0$ (1) και $x^2 - \lambda x + \lambda - 1 = 0$ (2). Η θετική ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ρίζα και της εξίσωσης (2).

i) Να βρείτε τον αριθμό λ.

ii) Για $\lambda=1+\sqrt[4]{2}$ να λύσετε την εξίσωση (2).

iii) Αν ρ η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης (2) που βρήκατε, να γράψετε το κλάσμα $\dfrac{1}{\rho}$ και να το μετατρέψετε σε αντίστοιχο με ρητό παρονομαστή.

136. Δίνονται οι παραστάσεις $A=|x-1|$ και $B=|x+3|$

i) Να λύσετε τη εξίσωση $\dfrac{A-4}{2}+\dfrac{5}{3}<\dfrac{A}{3}$ ΄.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $A=B$

iii) Αν $x=3$, τότε:

α) να μετατρέψετε τη παράσταση $\dfrac{1}{\sqrt{B}-A}$ σε ισοδύναμη με ρητό παρονομαστή.

β) Να αποδείξετε ότι $\sqrt{\sqrt{A\sqrt[3]{A}}}=\sqrt[3]{A}$.

137. Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύει $\alpha_{16} = 5\alpha_{14}$ και το άθροισμα των πρώτων 30 όρων της ισούται με 120.

i) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και τη διαφορά ω της (α_ν).

ii) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης: $f(x) = 2x^2 + \beta x + \gamma$ διέρχεται από τα σημεία $A(\alpha_{14}, \alpha_{13})$ και $B(\alpha_{13}, \alpha_{18})$.

α) Να βρείτε τους αριθμούς β και γ.

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \le S_{26}$.

138. Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύει ότι:$\alpha_{15} + \alpha_{16} + \ldots + \alpha_{22} = 200$ (και επιπλέον ο αριθμητικός μέσος των α_{12} και α_{15} είναι 15).

i) Να αποδείξετε ότι $\alpha_1 =-10$ και ω = 2.

ii) Θεωρούμε τη συνάρτηση: $f(x)=\dfrac{x^3-3x^2+a_4x+S_{12}}{x-(a_{10})^{\frac{1}{3}}}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να απλοποιήσετε τον τύπο της.

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \le 0$.

139. Σε μια αριθμητική πρόοδο (αν), ισχύει: $\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_{12} = 10$ και ο όρος α_{13} είναι τριπλάσιος από τον όρο α_8.

i) Να βρείτε τον πρώτο όρο και τη διαφορά της προόδου.

ii) Να βρείτε τον όρο α_ν για τον οποίο ισχύει $\alpha_\nu = 2\nu$.

iii) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2-a_9\cdot x+S_{12}\le 0$

140. Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν), της οποίας οι όροι α_4 και α_{16} είναι αντίθετοι,

i) Να βρείτε τον όρο α,

ii) Να υπολογίσετε τον λόγο $\dfrac{a_{2\nu-10}}{\alpha_\nu}$ για κάθε $\nu \ge 6$ και $\nu \neq 10$.

iii) Αν επιπλέον ο αριθμητικός μέσος των α_{13} και α_{18} ισούται με 11, τότε:

α) να αποδείξετε ότι $\alpha_1 = - 18$ και ω = 2,

β) να υπολογίσετε το άθροισμα των όρων α_ν για τους οποίους η εξίσωση $x^2 + \alpha_\nu \cdot x + 5\nu = 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

141. Δίνεται γεωμετρική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύει: $\alpha_{11}^2=5\alpha_7\cdot\alpha_{14}$

i) Να βρείτε τον λόγο λ της (α_ν).

ii) Αν επιπλέον οι αριθμοί: $\alpha_1 + 1$, $\alpha_2 + 15$,α_3-35 με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, τότε:

α) να βρείτε τον α_1,

β) να λύσετε την ανίσωση: $x^2-\frac{3}{4}x \geq \frac{a_{20}+a_{21}+...+a_{30}}{a_{20}\cdot S_{11}}$

142. Δίνεται γεωμετρική πρόοδος ($α_ν$), με $α_7 = 4$ και $α_{10} = 32$. Θεωρούμε επίσης τα ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω.

i) Να βρείτε τον πρώτο όρο και τον λόγο της ($α_ν$).

ii) Οι πιθανότητες P(A), $P(A \cap B)$ και $P(A \cup B)$ είναι διαφορετικές ανά δύο και ανήκουν στο σύνολο: $Σ = \{α_2, α_4, α_6, S_4\}$

Να βρείτε τις πιθανότητες:

i) P(A), $P(A \cap B)$ και $P(A \cup B)$

ii) P(B)

iii) $P((A-B) \cup (B- A))$

143. Έστω Α και Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω. Ισχύουν τα εξής:

- $P(A)+P(B)=\frac{5}{6}$
- Οι αριθμοί $P(B),P(A),P(A\cup B)$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου
- Οι αριθμοί $P(B\text{-}A),P(A),P(A\cup B)$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου

i) Να αποδείξετε ότι : $P(A)=\frac{1}{2}$ και $P(B)=\frac{1}{3}$

ii) Να βρείτε τις πιθανότητες :

α)να πραγματοποιηθεί το Α και να μην πραγματοποιηθεί το Β

β)να πραγματοποιηθεί το πολύ ένα από τα Α,Β

iii) Δίνεται γεωμετρική πρόοδος ($α_ν$) για την οποία ισχύει ότι $α_2=P(A\cap B)$ και $α_5=P((A\text{-}B) \cup (B\text{-}A))$.

Να βρείτε το άθροισμα των 8 όρων της ($α_ν$).

144. Δίνεται μια γεωμετρική πρόοδος ($α_ν$), με $α_1 > 0$ και λόγο λ.

i) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του λ για τις οποίες η παράσταση: $A = α_3 - 4α_2 - 5α_1$ είναι αρνητικός αριθμός

ii) Αν ο λ είναι ο αριθμητικός μέσος των αριθμών λ-1,λ+1 και το άθροισμα των 6 πρώτων όρων της ($α_ν$) είναι 189, τότε:

α) να βρείτε τον $α_1$ και τον λόγο λ

β) να λύσετε την ανίσωση: $|x^2-5x| \leq \frac{2\cdot S_{10}^2}{a_{21}-S_{11}}$

145. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^2 + λx- 7$, με $λ\in R$.Οι αριθμοί f (2), f(6), f(8), με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου

i) Να βρείτε την τιμή του $λ \in R$.

ii) Αν λ=-2

α) και x_1,x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης f (x)=0, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A=\left(\frac{x_1^3+x_2^3}{x_1^2+x_2^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

β) Να λύσετε την ανίσωση: $f(x) + f(x-1) \leq -3$

γ) Θεωρούμε γεωμετρική πρόοδο ($α_ν$). Αν η γραφική παράστασης της f διέρχεται από το σημείο $A(1,α_5)$, να βρείτε το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της ($α_ν$).

146. Δίνεται γεωμετρική πρόοδος ($α_ν$) για την οποία ισχύει: $\frac{a_2+a_3}{a_2-a_4}=2$

i) Να βρείτε τον λόγο λ της ($α_ν$).

ii) Αν $\lambda=\frac{1`}{2}$ και το γινόμενο των τριών πρώτων όρων της ($α_ν$) είναι 2^{18}, τότε:

α) να βρείτε τον $α_1$,

β) να λύσετε την ανίσωση: $x+a_1x+a_2x+...+a_8x\le 10a_3-a_2x^2$

147. Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x)=x^2-4ax+16, \quad \alpha\in R.$

i) Να βρείτε για ποιες τιμές του $α\in R$ η εξίσωση f(x)=0 έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

ii) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, να αποδείξετε ότι $f\left(x_1+x_2\right)=x_1\cdot x_2$

iii) Αν οι ρίζες x_1, x_2 του παραπάνω τριωνύμου είναι ο τέταρτος και ο πέμπτος όρος αντίστοιχα μιας γεωμετρικής προόδου, να υπολογίσετε τον αριθμό: $A=a_2\cdot a_7$ όπου α_2, α_7 είναι επίσης όροι της ίδιας γεωμετρικής προόδου.

148. Δίνεται η συνάρτηση: f(x)= $\frac{3x-9}{x^2-4x+3}$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της, να απλοποιήσετε τον τύπο της και να αποδείξετε ότι: f(x)= $\frac{3}{x-1}$.

ii) Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{f^2(x)}>0$.

iii) Να δείξετε ότι:

α) f(2)=3

β) $\sqrt[3]{f(2)\cdot\sqrt{f(2)}}=\sqrt{f(2)}$.

iv) Να μετατρέψετε σε ισοδύναμη με ρητό παρονομαστή την παράσταση:

$\frac{1}{\sqrt{f(2)}-1}+\frac{\sqrt{f(2)}}{\sqrt{f(2)}+1}$.

149. Δίνεται η συνάρτηση: f(x) = $|x^2$-4x- 12| και έστω Α, Β τα σημεία της C_f με τετμημένες - 4 και 1 αντίστοιχα. Θεωρούμε και την ευθεία ε που διέρχεται από τα σημεία Α και Β.

i) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε.

ii) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε διέρχεται από τα σημεία Γ(4, f(4)) και Δ(7, f(7)) της C_f.

iii) Να λύσετε την ανίσωση : f(x) < 20

iv) Να λύσετε την εξίσωση: f(x)= -x+16

150. Δίνονται οι συναρτήσεις :f (x) = 3 -x^2 και g(x) = |2x|.

i) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=4|x|+7$.

ii) Να λύσετε την ανίσωση f (|2x-1|) > f (7).

iii) Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f και g.

151. Δίνεται η συνάρτηση :f (x) = x^2 -(λ + 3)x + λ-1, με $λ\in R$

i) Να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα χ'χ σε δύο σημεία για κάθε $λ \in R$.

ii) Έστω x_1 και x_2 οι λύσεις της εξίσωσης f (x) =0.

α)Να βρείτε τις τιμές του ακεραίου αριθμού για τις οποίες η παράσταση $x_1^2x_2+x_2^2x_1$ είναι αρνητικός αριθμός, β) Για την μικρότερη τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα (α): να λύσετε την ανίσωση $-x+12<f(x) \le 6$.

152. Θεωρούμε τη συνάρτηση :$f(x) = x^2 - 2x + \gamma$, με $\gamma \in R$, καθώς και την ευθεία ε που διέρχεται από τα σημεία Α(-2, - 1), Β(4, 11) και από το σημείο Α(1,f(1)).
i) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε.
ii) Να αποδείξετε ότι $\gamma = 6$.
iii) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από την ευθεία ε.
iv) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 5|x| - 2x$.

153. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \lambda^2 x^2 + \lambda x - 2, \lambda \in \mathbb{R}$.
i) Να βρείτε το λ αν το 1 είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.
ii)Για την θετική τιμή του λ του α) ερωτήματος να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες .
iii) Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=0$.
iv) Να βρεθεί το λ ,ώστε η εξίσωση $f(x)=0$ να έχει μία διπλή ρίζα.

154. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + \lambda$. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού λ για την οποία η εξίσωση $f(x)=0$ έχει:
i) ρίζα το 2
ii) δύο ρίζες πραγματικές και άνισες
iii) ρίζες ετερόσημες
iv) Αν $\lambda = 3$, τότε
α) να βρείτε τις τιμές του χ για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα χ΄χ.
β) να λύσετε την εξίσωση $|f(x)+4x| = 4|x|$.

155. Δίνεται η συνάρτηση :$f(x) = x^2 + (\mu - 2\lambda)x + 5\lambda - 2\mu$ με $\lambda, \mu \in R$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(1,-1) και τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο με τεταγμένη - 3
i) Να βρείτε τις τιμές των λ και μ.
ii) Για λ=1,μ=-1
α) να λύσετε την ανίσωση $f(x) \le -1$
β) να λύσετε την ανίσωση $f(x + 2) + f(x) \le 12$.

156. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \dfrac{2x^2 - 6|x|}{-6 + 2|x|}$.
i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να απλοποιήσετε τον τύπο της.
ii) Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f(x) και: $g(x) = |x^2 - 3x + 3|$.

157. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 - (k+1)x + k$
i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού k.
ii) Να βρείτε την τιμή του k, αν είναι γνωστό ότι για τις ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης $f(x)=0$

ισχύει ότι: $x_1^2+x_2^2=5$.

iii) Αν $k=2$, τότε:

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x.

β) Να λύσετε την ανίσωση $f\left(x\right)\le 0$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $x^2-1\le f(x)<6$.

158. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases}\lambda x-3, \alpha\nu\ \ x\ge 4\\ \mu x+3, \alpha\nu\ \ x<4\end{cases}$.

Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία Α(-4,1) και Β(-1,4).

i) Να βρείτε τους αριθμούς λ και μ.

ii) Για λ=$\frac{1}{2}$,μ=-1

α) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

β) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 + f(0)\cdot x < f(3) - f(f(-7))$

159. Δίνεται η συνάρτηση f(x) =x^2+αx+α-1, όπου: $a=\frac{7}{2^{\frac{1}{2}}+3}-\frac{7}{2^{\frac{1}{2}}-3}$

i) Να αποδείξετε ότι α = 6.

ii) Να λύσετε την ανίσωση f(x) ≤ f(-1)

iii) Έστω Κ το σημείο της C_f με τεταγμένη -4 και Λ το σημείο της με τετμημένη -6. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία Κ και Λ.

160. Δίνεται η συνάρτηση f (x) = x^2 + βx + γ, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία Λ(1, 0) και Μ(4, 3).

i) Να αποδείξετε ότι β = - 4 και γ = 3.

ii) Να βρείτε τα συμμετρικά των σημείων Λ και Μ ως προς τους άξονες χ΄χ και y΄y.

iii) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\frac{x^2-1}{f(x)}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g(x) και να απλοποιήσετε τον τύπο της.

β) Να λύσετε την εξίσωση: $|f(x)|=g(\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\sqrt[24]{2^{37}})$

161. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-3(\lambda+1)x+\lambda^2+4\lambda,\ \ \lambda\in\mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο άνισες ρίζες x_1,x_2 για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

ii) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ για τις οποίες οι ρίζες x_1,x_2 είναι θετικές.

iii) Αν $\lambda=1$, τότε:

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα χ΄χ.

γ) Να βρείτε την εξίσωση δευτέρου βαθμού που έχει ρίζες τα x_1+1 και x_2+1.

162. Η εξίσωση: x^2 + (μ - 3)x - μ + 2 = 0 έχει μοναδική ρίζα.

i) Να βρείτε την τιμή του μ ∈ R και τη ρίζα της εξίσωσης (1).

ii) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης: f (x) = x^2 + βx + γ τέμνει τον άξονα χ'χ στο σημείο με τετμημένη - 2μ.

α) Να βρείτε τους αριθμούς β και γ.

β) Να λύσετε την ανίσωση f (x) ≤ μ.

163. Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=x^2-\lambda x+\lambda-1$.

i) Να αποδειχθεί ότι το τριώνυμο έχει πάντοτε πραγματικές ρίζες.

ii) Έστω x_1,x_2 οι ρίζες του τριωνύμου. Να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε $x_1-x_2=4$.

iii) Να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε $x_1^2+x_2^2-x_1x_2<1$.

iv) Για $\lambda=3$ να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες αληθεύει η σχέση $2\le f(x)\le 6$.

164. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2-|x-2|$.

i) Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης f, χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.

ii) Να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

iii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=1$.

iv) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>-1$.

v) να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=2-|2x-5|$.

165. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x-12}$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

ii) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$.

iii) Να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{1}{f(x)}\ge 60$.

iv) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα y΄y.

166. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-x+1,\ x\in\mathbb{R}$.

i) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x-1)+f(2x)-3f(2)=-5$.

ii) Να λύσετε την εξίσωση: $\left|f(x)-x^2\right|=2|x-1|-3$.

iii) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>x-4f(1)$.

iv) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει τον άξονα χ΄χ.

v) Να αποδείξετε ότι $\dfrac{\sqrt{f(2)}}{\sqrt{f(2)+2}-\sqrt{f(2)}}+\dfrac{\sqrt{f(2)+2}}{\sqrt{f(2)+2}+\sqrt{f(2)}}=4$.

167. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{4x+4}-\sqrt{2x+16}$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

iii) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M\left(8,6-4\sqrt{2}\right)$.

iv) Να αποδείξετε ότι $f(17)+f(6)=\sqrt{2}$.

168. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}2x-8, & x\le 1\\ x^2-8x+7, & x>1\end{cases}$.

i) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-3)$, $f(0)$, $f(2)$, $f(-1)$, $f(3)$.

ii) Να αποδείξετε ότι: $f(0)+2f(2)=f(-1)+f(3)$.

iii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

iv) Για κάθε $x<0$, να αποδείξετε ότι $|f(x)|-|f(x)+2|=2$

169. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{3}{x+2}$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $|f(x-2)|=2|f(x+1)|$.

iii) Να λύσετε την ανίσωση $\left(\dfrac{3}{f(x)}\right)^2+x>0$.

iv) Να αποδείξετε ότι

α) $f(-1)=3$

β) $\dfrac{1}{\left(2-\sqrt{f(-1)}\right)^2}-\dfrac{1}{\left(2+\sqrt{f(-1)}\right)^2}=8\sqrt{3}$

170. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{|x-2|-x}{x^2-2x+\lambda}$

i) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ, για τις οποίες η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

ii) Αν $\lambda=2$, τότε:

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x-f(2)|<f(0)$

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^2+9f(0)\geq 6\alpha$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $|2|x|-f(0)|=3$.

171. Ένα κουνούπι κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $f(x)=x^2-4x+3$ και μία μύγα στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=x^2-2x+2$.

i) Να βρείτε

α) αν θα συναντηθούν η μύγα και το κουνούπι και αν ναι σε ποιο σημείο;

β) για ποιες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ το κουνούπι θα βρίσκεται πάνω από τον χ΄χ και για ποιες κάτω

ii)Αν ο x΄ x παριστάνει την επιφάνεια της θάλασσας

α) να δείξετε ότι η μύγα δεν πρόκειται να πνιγεί

β) να βρείτε αν υπάρχουν σημεία τα οποία πρέπει να αποφύγει το κουνούπι ώστε να μη πέσει στη θάλασσα

γ) αν ένα ψάρι βρίσκεται στο σημείο $A(-1,-8)$ να βρείτε την θέση που θα βρίσκεται το κουνούπι ,αν το ψάρι και το κουνούπι ακολουθούν συμμετρική πορεία ως προς τον χ΄χ

iii) Αν ένας άνθρωπος κινείται στην ευθεία $y=-4x+7$, να βρείτε πόσες φορές θα τον τσιμπήσει το κουνούπι