# Θέματα Γραπτών προαγωγικών εξετάσεων περιόδου Μαΐου - Ιουνίου

## Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου

## Α. Θεωρία

**1.** Να διατυπώσετε τα κριτήρια ισότητας τριγώνων.
**2.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
**α)** Αν δύο τρίγωνα έχουν ίσες περιμέτρους, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.
**β)** Δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν δύο πλευρές και μια αντίστοιχη γωνία ίσες.
**γ)** Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία τότε θα έχουν και τις τρίτες πλευρές ίσες.
**δ)** Αν δύο τρίγωνα έχουν και τις τρεις γωνίες τους ίσες μία προς μία , τότε είναι ίσα.
**ε)** Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία.

## Β. Θεωρία

Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\ \alpha\neq 0$
**1.** Ποια παράσταση λέγεται διακρίνουσα Δ της εξίσωσης;
**2.** Ποιες είναι οι ρίζες (αν υπάρχουν) της εξίσωσης ανάλογα με το πρόσημο της διακρίνουσας;
**3.** Αν $\rho_1,\rho_2$ ρίζες της εξίσωσης, τότε να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \ \alpha\neq 0$ .

## 1η Άσκηση

Δίνονται οι παραστάσεις $A=\left(x^2-1\right)^2-\left(x^2-3\right)\left(x^2+3\right)+8$ και $B=\left(\alpha+\dfrac{5}{\alpha}\right)^2-\left(\alpha-\dfrac{5}{\alpha}\right)^2,\ \alpha\neq 0$ .

**α)** Να αποδείξετε ότι $A=18-2x^2$ και $B=20$ .
**β)** Να λύσετε την εξίσωση $B+4x=A$ .
**γ)** Να απλοποιήσετε τη παράσταση $\Gamma=\dfrac{A}{2x^2+12x+18}$
**δ)** Να υπολογίσετε τον αριθμό $x=\left(2020+\dfrac{1}{405}\right)^2-\left(2020-\dfrac{1}{405}\right)^2$

## 2η Άσκηση

Αν το σύστημα $\begin{cases}\alpha x+\beta y=7\\ 2\alpha x-\beta y=8\end{cases}$ έχει ως λύση $x=1$ και $y=2$ , να βρείτε τις τιμές των α, β.

## 3η Άσκηση

Δίνεται η παράσταση $A=\sigma\upsilon\nu^2 x\cdot\varepsilon\varphi^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x$
**α)** Να αποδείξετε ότι $A=1$
**β)** Να αποδείξετε ότι $\eta\mu^2 20^\circ+\eta\mu^2 50^\circ+\eta\mu^2 160^\circ+\eta\mu^2 130^\circ=2A$

**Από τις δύο θεωρίες να απαντήσετε σε μία και από τις τρείς ασκήσεις να απαντήσετε σε δύο.**

Στέλιος Μιχαήλογλου

# Λύσεις

## Α. Θεωρία

**1. 1ο κριτήριο ισότητας (Π - Γ - Π)**

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση, τότε είναι ίσα.

**2ο κριτήριο ισότητας (Γ - Π - Γ).**

Αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα. Σε ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές.

**3ο κριτήριο ισότητας (Π - Π - Π)**

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

**2.** α) Λ β) Λ γ) Λ δ) Λ ε) Σ

## Β. Θεωρία

**α)** Διακρίνουσα Δ είναι ο αριθμός $\beta^2 - 4\alpha\gamma$, δηλαδή $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$.

**β)** Αν $\Delta > 0$ τότε η εξίσωση έχει δύο άνισες λύσεις τις $x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$

Αν $\Delta = 0$ η εξίσωση έχει μία διπλή λύση την $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$

Αν $\Delta < 0$ τότε η εξίσωση δεν έχει λύση (αδύνατη).

**γ)** Είναι $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - \rho_1)(x - \rho_2)$

## 1η Άσκηση

Δίνονται οι παραστάσεις $A = (x^2-1)^2 - (x^2-3)(x^2+3) + 8$ και $B = \left(\alpha + \dfrac{5}{\alpha}\right)^2 - \left(\alpha - \dfrac{5}{\alpha}\right)^2$, $\alpha \neq 0$ .

**α)** $A = (x^2-1)^2 - (x^2-3)(x^2+3) + 8 = x^4 - 2x^2 + 1 - \left[(x^2)^2 - 3^2\right] + 8 =$

$x^4 - 2x^2 + 1 - (x^4 - 9) + 8 = \cancel{x^4} - 2x^2 + 1 - \cancel{x^4} + 9 + 8 = 18 - 2x^2$

$$B = \left(\alpha + \frac{5}{\alpha}\right)^2 - \left(\alpha - \frac{5}{\alpha}\right)^2 = \alpha^2 + 2\cancel{\alpha}\cdot\frac{5}{\cancel{\alpha}} + \left(\frac{5}{\alpha}\right)^2 - \left[\alpha^2 - 2\cancel{\alpha}\cdot\frac{5}{\cancel{\alpha}} + \left(\frac{5}{\alpha}\right)^2\right] =$$

$$\alpha^2 + 10 + \frac{25}{\alpha^2} - \left(\alpha^2 - 10 + \frac{25}{\alpha^2}\right) = \cancel{\alpha^2} + 10 + \cancel{\frac{25}{\alpha^2}} - \cancel{\alpha^2} + 10 - \cancel{\frac{25}{\alpha^2}} = 20$$

**β)** $B + 4x = A$ ή $20 + 4x = 18 - 2x^2$ ή $2x^2 + 4x + 20 - 18 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x + 2 = 0$ ή

$x^2 + 2x + 1 = 0$ ή $(x+1)^2 = 0$ ή $x + 1 = 0$ ή $x = -1$

**γ)** $$\Gamma = \frac{18 - 2x^2}{2x^2 + 12x + 18} = \frac{\cancel{2}(9 - x^2)}{\cancel{2}(x^2 + 6x + 9)} = \frac{(3-x)\cancel{(3+x)}}{(x+3)^{\cancel{2}}} = \frac{3-x}{x+3}$$

**δ)** $x=\left(2020+\frac{1}{405}\right)^2-\left(2020-\frac{1}{405}\right)^2$ ή $x=\left(2020+\frac{2020}{5}\right)^2-\left(2020-\frac{5}{2020}\right)^2$

Ο αριθμός x προκύπτει από την παράσταση Β, αν αντικαταστήσουμε α=2020.

Επειδή Β= 20 για κάθε τιμή του $\alpha\neq 0$ , είναι $x=20$

## 2η Άσκηση

Επειδή το σύστημα έχει λύση $x=1$ και $y=2$ , ισχύει ότι:

$$\begin{cases}\alpha\cdot 1+\beta\cdot 2=7\\ 2\alpha\cdot 1-\beta\cdot 2=8\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}\alpha+2\beta=7\\ 2\alpha-2\beta=8\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}\alpha=7-2\beta\\ 2(7-2\beta)-2\beta=8\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}\alpha=7-2\beta\\ 14-4\beta-2\beta=8\end{cases} \text{ ή}$$

$$\begin{cases}\alpha=7-2\beta\\ -6\beta=8-14\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}\alpha=7-2\beta\\ -6\beta=-6\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}\alpha=7-2\cdot 1=5\\ \beta=1\end{cases}$$

## 3η Άσκηση

**α)** $A=\sigma\upsilon\nu^2x\cdot\varepsilon\varphi^2x+\sigma\upsilon\nu^2x=\cancel{\sigma\upsilon\nu^2}x\cdot\frac{\eta\mu^2x}{\cancel{\sigma\upsilon\nu^2}x}+\sigma\upsilon\nu^2x=\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x=1$

**β)** Επειδή οι γωνίες $20°, 160°$ είναι παραπληρωματικές, ισχύει ότι $\sigma\upsilon\nu 160°=-\sigma\upsilon\nu 20°$ .

Επειδή οι γωνίες $50°, 130°$ είναι παραπληρωματικές, ισχύει ότι $\sigma\upsilon\nu 130°=-\sigma\upsilon\nu 50°$ .

Είναι

$$\eta\mu^2 20°+\eta\mu^2 50°+\sigma\upsilon\nu^2 160°+\sigma\upsilon\nu^2 130°=\eta\mu^2 20°+\eta\mu^2 50°+\left(-\sigma\upsilon\nu 20°\right)^2+\left(-\sigma\upsilon\nu 50°\right)^2=$$

$$\eta\mu^2 20°+\underbrace{\eta\mu^2 50°+\sigma\upsilon\nu^2 50°}_{1}+\sigma\upsilon\nu^2 20°=1+\underbrace{\eta\mu^2 20°+\sigma\upsilon\nu^2 20°}_{1}=2=2A$$