Μονοτονία συνάρτησης

Ορισμός

Εστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο Α και Δ ένα υποσύνολο του Α.

Η συνάρτηση f θα λέγεται:

Γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ όταν για κάθε $x_1,x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$.

Γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ όταν, για κάθε $x_1,x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) > f(x_2)$

Θεώρημα

Εστω συνάρτηση f, συνεχής σε ένα διάστημα Δ.

Αν $f'(x) > 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα $(\uparrow)$ στο Δ.

Αν $f'(x) < 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα $(\downarrow)$ στο Δ.

Απόδειξη

Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που είναι $f'(x) > 0$.

Εστω $x_1,x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1,x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, οπότε έχουμε $f(x_2)-f(x_1) = f'(\xi)(x_2-x_1)$.

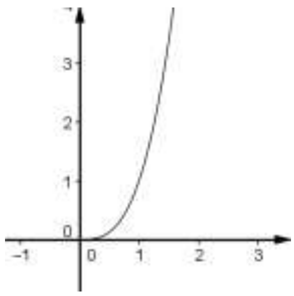
Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2)-f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

Στην περίπτωση που είναι $f'(x) < 0$ εργαζόμαστε αναλόγως.

Παρατηρήσεις και παραδείγματα στο προηγούμενο θεώρημα

1. Εστω η συνάρτηση $f(x) = x^3,\ x \ge 0$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με $f'(x) = 3x^2$. Είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

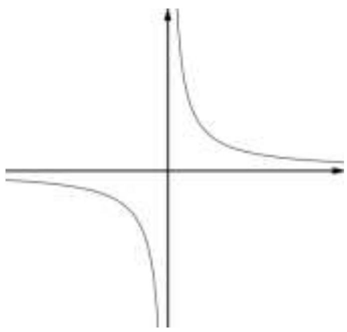


Συμπέρασμα: Το πρόσημο της παραγώγου το μελετάμε σε ανοικτά διαστήματα και τη μονοτονία της συνάρτησης την αναφέρουμε στα αντίστοιχα κλειστά διαστήματα, εφόσον η συνάρτηση είναι συνεχής στα άκρα των αντίστοιχων διαστημάτων.

2. Εστω η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{x},\ x \ne 0$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

Είναι $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$, όμως η f, όπως



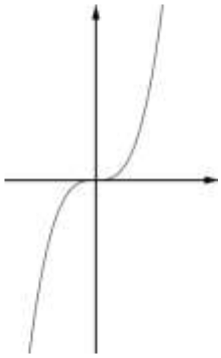
βλέπουμε και στη γραφική της παράσταση, δεν είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της, γιατί για $x_1<0$ και $x_2>0$ είναι $f(x_1)<f(x_2)$.

Αυτό συμβαίνει γιατί το θεώρημα εφαρμόζεται σ' ένα διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων, όπως είναι το $\mathbb{R}^*$.

Σε κάθε ένα όμως από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Συμπέρασμα: **Το θεώρημα εφαρμόζεται σε ένα διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων.**

3. Εστω η συνάρτηση $f(x)=x^3,\ x\in\mathbb{R}$.



Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης πληροφορούμαστε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.Όμως $f'(x)=3x^2>0$ για κάθε $x\neq 0$,δηλαδή η f' δεν είναι θετική για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Συμπέρασμα: **Αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα, αυτό δεν σημαίνει ότι υποχρεωτικά θα ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε x στο διάστημα αυτό. Με άλλα λόγια το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει.**

Θεώρημα

Εστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 ,στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β).

Απόδειξη

Εστω ότι $f'(x)>0$, για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha,x_0]$ και $[x_0,\beta)$.

Εστω $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$ με $x_1<x_2$.

— Αν $x_1,x_2\in(\alpha,x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.

— Αν $x_1,x_2\in[x_0,\beta)$, επειδή η f ίναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0,\beta)$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.

— Τέλος, αν $x_1<x_0<x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).

Ομοίως, αν $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$.

Παραδείγματα

4. Εστω η συνάρτηση $f(x)=x^3,\ x\in\mathbb{R}$.

Είναι $f'(x)=3x^2>0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

5. Εστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=(x-1)^2(x-2)^2\cdots(x-10^{100})^2$.

Παρατηρούμε ότι $f'(x)>0$ για κάθε $x=1,2,3,...,10^{100}$, όμως η f είναι συνεχής στα σημεία αυτά, άρα είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Ασκήσεις

1. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $f(x)=x^3-3x+1821$.

Λύση

Η f είναι παραγωγίσιμη, οπότε και συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=3x^2-3$.

Είναι $f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow 3x^2-3\geq 0 \Leftrightarrow 3x^2\geq 3 \Leftrightarrow x^2\geq 1 \Leftrightarrow |x|\geq 1 \Leftrightarrow x\leq -1$ ή $x\geq 1$.

Για κάθε $x\in(-\infty,-1)$ είναι $f'(x)<0 \Rightarrow \searrow(-\infty,-1]$.

Για κάθε $x\in(-1,1)$ είναι $f'(x)>0 \Rightarrow f\nearrow[-1,1]$.

Για κάθε $x\in(1,+\infty)$ είναι $f'(x)<0 \Rightarrow f\searrow[1,+\infty)$.

x	$-\infty$ -1	1	$+\infty$
f'	$-$	$+$	$-$
f	↘	↗	↘

2. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2-x, & x<1 \\ e^x-1, & x\geq 1 \end{cases}$.

Λύση

Αρχικά θα εξετάσουμ αν η f είναι συνεχής στο $x_0=1$. Είναι

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2-x)=0$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(e^x-1)=0$ και $f(1)=0$, άρα η f είναι συνεχής στο $x_0=1$ και επειδή είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty,1)$ και $(1,+\infty)$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,1)$ και $(1,+\infty)$ με

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-1, & x<1 \\ e^x \;\;, & x>1 \end{cases}.$$

Για $x<1$ είναι $f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow 2x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq \frac{1}{2}$

Για κάθε $x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$ είναι $f'(x)<0 \Rightarrow f\searrow\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$

Για κάθε $x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ είναι $f'(x)>0 \Rightarrow f\nearrow\left[\frac{1}{2},1\right]$ και

για κάθε $x>1$ είναι $f'(x)>0 \Rightarrow f\nearrow[1,+\infty)$.

x	$-\infty$ $\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
f'	$-$	$+$	$+$
f	↘	↗	↗

Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0=1$, είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.

3. Να προσδιοριστούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε να είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x)=\frac{4}{3}x^3-(\lambda-2)x^2+x-2$.

Λύση

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με $f'(x)=4x^2-2(\lambda-2)x+1$.

Η f' είναι τριώνυμο με διακρίνουσα $\Delta=4(\lambda-2)^2-4\cdot4=4\left[(\lambda-2)^2-4\right]=$
$4(\lambda-2-2)(\lambda-2+2)=4\lambda(\lambda-4)$

λ	$-\infty$ 0	4	$+\infty$
λ	$-$	$+$	$+$
$\lambda-4$	$-$	$-$	$+$
Δ	$+$	$-$	$+$

Αν $\lambda<0$ ή $\lambda>4$ τότε $\Delta>0$, η f' έχει δύο ρίζες ρ_1, ρ_2 και αλλάζει πρόσημο εκατέρωθέν τους, οπότε η f δεν είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$.

Αν $0<\lambda<4$ τότε $\Delta<0$, η f' δεν έχει ρίζες και ισχύει ότι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Αν $\lambda=0$, τότε $f'(x)=4x^2+4x+1=(2x+1)^2>0$ για κάθε $x\neq-\frac{1}{2}$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Τέλος αν $\lambda=4$, τότε $f'(x)=4x^2-4x+1=(2x-1)^2>0$ για κάθε $x\neq\frac{1}{2}$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, όταν $\lambda\in[0,4]$.

4. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις :

α) $f(x)=2x\ln x-x^2+1$ **β)** $f(x)=\frac{\eta\mu\chi}{\chi}$, $\chi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=2\ln x+2-2x$ και $f''(x)=2\frac{1-x}{x}$

Για κάθε $x>1$ είναι $f''(x)<0 \Rightarrow f'\searrow[1,+\infty)$.

$x>1 \overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow} f'(x)<f'(1)=0$, άρα $f\searrow[1,+\infty)$.

Για κάθε $0<x<1$ είναι $f''(x)>0\Rightarrow f'\nearrow(0,1]$, άρα $f'(x)<f'(1)=0\Rightarrow f\searrow(0,1]$

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ με $f'(x)=\frac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^2}$.

Εστω $g(x)=x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Είναι

$g'(x) = -x\eta\mu x < 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και επειδή η g είναι συνεχής, είναι $\downarrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Για κάθε $0 < x < \frac{\pi}{2}$ είναι $g\left(\frac{\pi}{2}\right) < g(x) < g(0) = 0$, άρα $f'(x) < 0$ και $f \downarrow \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

5. Να βρείτε το πρόσημο των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = 2\ln x + 1 - x^2$ **β)** $f(x) = 2e^x + x^2 - 2x - 2$

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \frac{2}{x} - 2x = \frac{2-2x^2}{x}$.

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2-2x^2}{x} \geq 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 2 - 2x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow 0 < x \leq 1$.

Για κάθε $x \in (0,1)$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow (0,1]$.

$0 < x < 1 \overset{f \nearrow}{\Rightarrow} f(x) < f(1) \Leftrightarrow f(x) < 0$

Για κάθε $x > 1$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow [1, +\infty)$, οπότε $f(x) < f(1) \Leftrightarrow f(x) < 0$

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 2e^x + 2x - 2$. Επειδή το πρόσημο της f' δεν μπορεί να βρεθεί σε αυτό το σημείο, θα ξαναπαραγωγίσουμε για να βούμε τη μονοτονία της f'. Είναι $f''(x) = 2e^x + 2 > 0 \Rightarrow f' \nearrow \mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι $f'(0) = 0$, οπότε για $x > 0 \overset{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(0) = 0 \Rightarrow f \nearrow [0, +\infty)$.

Για κάθε $x > 0 \overset{f \nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 0$

Για $x < 0 \overset{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(0) = 0 \Rightarrow f \searrow (-\infty, 0]$, οπότε για $x < 0 \overset{f \searrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(0) = 0$

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + e^{2x} - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να βρείτε το πρόσημο των αριθμών $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ και $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\sqrt[10]{5}\right)$, $f\left(\sqrt[20]{10}\right)$ και $f\left(\sqrt[30]{15}\right)$.

Λύση

α) Είναι $f'(x) = e^x + 2e^{2x} > 0 \Rightarrow f \uparrow \mathbb{R}$

β) $-\frac{1}{2} < 0 < \frac{1}{2} \overset{f \nearrow}{\Leftrightarrow} f\left(-\frac{1}{2}\right) < f(0) < f\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) < 0 < f\left(\frac{1}{2}\right)$

γ) Είναι $\sqrt[10]{5} = 5^{\frac{1}{10}}$, $\sqrt[20]{10} = 10^{\frac{1}{20}}$ και $\sqrt[30]{15} = 15^{\frac{1}{30}}$

Εστω $g(x) = x^{\frac{1}{2x}} = e^{\ln x^{\frac{1}{2x}}} = e^{\frac{\ln x}{2x}}$, $x > 0$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $g'(x)=e^{\frac{\ln x}{2x}}\dfrac{2-2\ln x}{x^2}=2x^{\frac{1}{2x}}\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

Για κάθε $x>e$ είναι $\ln x>1$, άρα $g'(x)<0 \Rightarrow g\searrow[e,+\infty)$

Είναι $5<10<15 \overset{g\searrow}{\Leftrightarrow} g(5)>g(10)>g(15) \Leftrightarrow 5^{\frac{1}{10}}>10^{\frac{1}{20}}>15^{\frac{1}{30}} \Leftrightarrow$

$\sqrt[10]{5}>\sqrt[20]{10}>\sqrt[30]{15} \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f\left(\sqrt[10]{5}\right)>f\left(\sqrt[20]{10}\right)>f\left(\sqrt[30]{15}\right)$

7. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε να ισχύει :
$f'(x)>(1-x)f''(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Λύση

$f'(x)>(1-x)f''(x) \Leftrightarrow f'(x)-(1-x)f''(x)>0 \Leftrightarrow (x-1)'f'(x)+(x-1)f''(x)>0$

Εστω $g(x)=(x-1)f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

Είναι $g'(x)=f(x)+(x-1)f'(x)>0 \Rightarrow g\nearrow\mathbb{R}$.

Αν $x>1$, τότε $g(x)>g(1) \Leftrightarrow (x-1)f'(x)>0 \overset{x>1}{\Leftrightarrow} f'(x)>0 \Rightarrow f\nearrow[1,+\infty)$

Αν $x<1$, τότε $g(x)<g(1) \Leftrightarrow (x-1)f'(x)<0 \overset{x<1}{\Leftrightarrow} f'(x)>0 \Rightarrow f\nearrow(-\infty,1]$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ είναι και συνεχής, οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

8. Να αποδείξετε ότι:

α) $e^x(x+1)>1$, $x>0$ **β)** $e^x<(1+x)^{1+x}$, $x>0$

Λύση

α) Εστω $f(x)=e^x(x+1)-1$, $x\ge 0$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με $f'(x)=e^x(x+2)>0 \Rightarrow f\nearrow[0,+\infty)$

Για κάθε $x>0 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x)>f(0)=0 \Leftrightarrow e^x(x+1)>1$

β) Επειδή και στα δύο μέλη της ανίσωσης βρίσκονται εκθετικές συναρτήσεις, είναι πιο εύκολο να μετασχηματίσουμε την ανίσωση λογαριθμώντας.

Δηλαδή, $e^x<(1+x)^{1+x} \Leftrightarrow \ln e^x<\ln(1+x)^{1+x} \Leftrightarrow x<(1+x)\ln(1+x)$, $x>0$.

Εστω $f(x)=(1+x)\ln(1+x)-x$, $x\in[0,+\infty)$.

Είναι $f'(x)=\ln(1+x)+(1+x)\dfrac{1}{1+x}-1=\ln(x+1)$.

Για κάθε $x>0$ είναι $x+1>1 \Leftrightarrow \ln(x+1)>0$, οπότε $f'(x)>0$ και f γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Για κάθε $x>0$ είναι $f(x)>f(0) \Leftrightarrow (1+x)\ln(1+x)-x>0 \Leftrightarrow (1+x)\ln(1+x)>x$.

9. Να αποδείξετε ότι:

α) $\sigma\upsilon\nu x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$, $x>0$ **β)** $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$, $x>0$

Λύση

α) Εστω $f(x) = \sigma\upsilon\nu x - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}$, $x \geq 0$.

Είναι $f'(x) = -\eta\mu x + x - \frac{x^3}{6}$, $f''(x) = -\sigma\upsilon\nu x + 1 - \frac{x^2}{2}$ και $f^{(3)}(x) = \eta\mu x - x$.

Επειδή $\eta\mu x < x$ για κάθε $x>0$, είναι $f^{(3)}(x) < 0 \Rightarrow f'' \searrow [0,+\infty)$ αφού η f'' είναι συνεχής.

Για κάθε $x>0 \overset{f''\searrow}{\Leftrightarrow} f''(x) < f''(0) = 0 \Rightarrow f' \searrow [0,+\infty)$

Για κάθε $x>0 \overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(0) = 0 \Rightarrow f \searrow [0,+\infty)$

Για κάθε $x>0 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(x) < f(0) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$

β) Εστω $f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$, $x \in [0,+\infty)$.

Είναι $f'(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$, $f''(x) = e^x - 1 - x$ και $f^{(3)}(x) = e^x - 1$

Για κάθε $x>0$ είναι $e^x > e^0 = 1$ άρα $f^{(3)}(x) > 0 \Rightarrow f'' \nearrow [0,+\infty)$.

Για κάθε $x>0$ είναι $f''(x) > f''(0) = 0 \Rightarrow f' \nearrow [0,+\infty)$.

Για κάθε $x>0$ είναι $f'(x) > f'(0) = 0$, άρα $f \nearrow [0,+\infty)$.

Για κάθε $x>0$ είναι $f(x) > f(0) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$.

10. Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f,g:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει η σχέση: $f'(x) = g'(x) + \eta\mu^2\chi + e^x$, $x \in [0,+\infty)$. Να αποδείξετε ότι $f(0) + g(x) < g(0) + f(x)$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$.

Λύση

Εστω $h(x) = f(0) + g(x) - g(0) - f(x)$, $x \geq 0$,

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με $h'(x) = g'(x) - f'(x) = -\eta\mu^2 x - e^x$

Είναι $h'(x) = -\eta\mu^2 x - e^x < 0$ άρα $h \searrow [0,+\infty)$.

Για κάθε $x>0$ είναι $h(x) < h(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) + g(x) - g(0) - f(x) < 0 \Leftrightarrow$

$f(0) + g(x) < g(0) + f(x)$

11. **α)** Να αποδείξετε ότι : $\ln(x+1) > x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{5}$, $x \in [0,+\infty)$.

β) Εστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ για την ποία ισχύει :

$[f(x)]^5 + 2[f(x)]^3 + 3f(x) = (x+1)\ln(x+1) - \frac{4}{5}x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + 182$ για κάθε $x \in [0,+\infty)$.Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Λύση

α) $\ln(x+1) > x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{5} \Leftrightarrow \ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{5} > 0$, $x \in [0,+\infty)$.

Εστω $g(x) = \ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{5}$, $x \in [0,+\infty)$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με $g'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 + x = \frac{1 - x - 1 + x^2 + x}{x+1} = \frac{x^2}{x+1}$.

Είναι $g'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$, οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Για κάθε $x \geq 0$ είναι $g(x) \geq g(0) \Leftrightarrow g(x) \geq \frac{1}{5} > 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{5} > 0 \Leftrightarrow$

$\ln(x+1) > x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{5}$.

β) Παραγωγίζοντας τη δοθείσα σχέση κατά μέλη, έχουμε :

$5f^4(x)f'(x) + 6f^2(x)f'(x) + 3f'(x) = \ln(x+1) + 1 - \frac{4}{5} - x + \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow$

$f'(x)\left[5f^4(x) + 6f^2(x) + 3\right] = \ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{5}$ (1).

Επειδή $5f^4(x) + 6f^2(x) + 3 > 0$ για κάθε $x \in [0,+\infty)$ και $\ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{5} > 0$ για κάθε $x \in [0,+\infty)$, από τη σχέση (1) προκύπτει ότι $f'(x) > 0$ και f γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,+\infty)$.

12. Να αποδείξετε ότι : $2x - x^2 < 2\ln(x+1) < 2x$, $x > 0$

Λύση

Εστω $f(x) = 2x - x^2 - 2\ln(x+1)$, $x \geq 0$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με $f'(x) = 2 - 2x - \frac{2}{x+1} = -\frac{2x^2}{x+1}$.

Είναι $f'(x) < 0$ για κάθε $x > 0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$.

Για κάθε $x > 0 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(x) < f(0) = 0 \Leftrightarrow 2x - x^2 < 2\ln(x+1)$ (1)

Εστω $g(x) = 2\ln(x+1) - 2x$, $x \geq 0$. Είναι $g'(x) = -\frac{2x}{x+1} < 0$ για κάθε $x > 0$, άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$.

Για κάθε $x > 0 \overset{g\searrow}{\Leftrightarrow} g(x) < g(0) = 0 \Leftrightarrow 2\ln(x+1) < 2x$ (2)

Από τις σχέσεις (1),(2) ισχύει ότι: $2x-x^2<2\ln(x+1)<2x$ για κάθε $x>0$.

13. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$, για την οποία ισχύει ότι: $f(\alpha)=f(\beta)=0$ και $f''(x)<0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$. Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$.

Λύση

Επειδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$, είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β). Επειδή $f(\alpha)=f(\beta)$, λόγω του θεωρήματος Rolle, υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=0$

Επειδή $f''(x)<0$ η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,\beta]$.

Για κάθε $\alpha<x<\xi \overset{f'\searrow}{\Rightarrow} f'(x)>f'(\xi)=0 \Rightarrow f\nearrow[\alpha,\xi]$.

Για κάθε $\alpha<x\le\xi \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(x)>f(\alpha)=0$.

Για κάθε $\xi<x<\beta \overset{f'\searrow}{\Rightarrow} f'(\xi)>f'(x)\Leftrightarrow f'(x)<0\Rightarrow f\searrow[\xi,\beta]$, άρα $f(x)>f(\beta)\Leftrightarrow f(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$.

14. Δίνεται συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ για την οποία ισχύει $f''(x)<0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και $f(0)=0$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

Λύση

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $h'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$.

Από το ΘΜΤγια την f, υπάρχει $\xi\in(0,x)$, $x>0$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x)}{x}$

Επειδή $f''(x)<0$ η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

Είναι $0<\xi<x \overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow} f'(0)>f'(\xi)>f'(x)\Rightarrow \dfrac{f(x)}{x}>f'(x)\Leftrightarrow xf'(x)-f(x)<0$,άρα $h'(x)<0$ και $h\searrow(0,+\infty)$.

15. Δίνεται δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ με $f(0)=f'(0)=0$, και $f(2)=8$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)>2$.

Λύση

Η f είναι συνεχής στο $[0,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,2)$, οπότε από το ΘΜΤ υπάρχει $\xi_1 \in (0,2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1)=\frac{f(2)-f(0)}{2}=4$.

Η f' είναι συνεχής στο $[0,\xi_1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,\xi_1)$, οπότε από το ΘΜΤ υπάρχει $\xi \in (0,\xi_1)$τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=\frac{f'(\xi_1)-f'(0)}{\xi_1}=\frac{4}{\xi_1}$.

Είναι $0<\xi_1<2 \Rightarrow \frac{2}{\xi_1}>1 \Leftrightarrow \frac{4}{\xi_1}>2 \Leftrightarrow f''(\xi)>2$

16. Δίνεται συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν α,β,γ,δ, είναι διαδοχικοί όροι μίας γνησίως αύξουσας αριθμητικής προόδου, να δείξετε ότι $f(\alpha)+f(\delta)>f(\beta)+f(\gamma)$.

Λύση

Επειδή $f''(x)>0$, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Επειδή τα α,β,γ,δ, είναι διαδοχικοί όροι μίας γνησίως αύξουσας αριθμητικής προόδου, ισχύει ότι $\alpha<\beta<\gamma<\delta$ και $\beta-\alpha=\gamma-\beta=\delta-\gamma=\omega$, όπου ω η διαφορά της προόδου.

Από το ΘΜΤ υπάχει $\xi_1\in(\alpha,\beta)$ και $\xi_2\in(\gamma,\delta)$: $f'(\xi_1)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ και $f'(\xi_2)=\frac{f(\delta)-f(\gamma)}{\delta-\gamma}$.

Είναι $\xi_1<\xi_2 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1)<f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}>\frac{f(\delta)-f(\gamma)}{\delta-\gamma} \Leftrightarrow f(\beta)-f(\alpha)>f(\delta)-f(\gamma) \Leftrightarrow$

$f(\beta)+f(\gamma)>f(\alpha)+f(\delta)$

17. Δίνεται συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(x)>0$ και $f''(x)f(x)-(f'(x))^2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση $\frac{f'}{f}$ είναι γνησίως αύξουσα.

β) Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ ισχύει: $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\le\sqrt{f(x_1)f(x_2)}$.

Λύση

α) Εστω $g(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$, $x\in\mathbb{R}$.Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$g'(x)=\frac{f''(x)f(x)-(f'(x))^2}{f^2(x)}>0$, οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Είναι: $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\le\sqrt{f(x_1)f(x_2)} \Leftrightarrow f^2\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\le f(x_1)f(x_2) \Leftrightarrow$

$\ln f^2\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\le \ln(f(x_1)f(x_2)) \Leftrightarrow 2\ln f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\le \ln f(x_1)+\ln f(x_2) \Leftrightarrow$

$\ln f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)-\ln f(x_1)\le \ln f(x_2)-\ln f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\ln f(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

Εστω $x_1<x_2$.

Η συνάρτηση h είναι συνεχής στα διαστήματα $\left[x_1,\dfrac{x_1+x_2}{2}\right]$ και $\left[\dfrac{x_1+x_2}{2},x_2\right]$ και παραγωγίσιμη στα $\left(x_1,\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$ και $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},x_2\right)$ με $h'(x)=(\ln f(x))'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}=g(x)$.

Οπότε, λόγω του Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi_1\in\left(x_1,\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$ και $\xi_2\in\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},x_2\right)$ τέτοια, ώστε:

$$h'(\xi_1)=\frac{h\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-h(x_1)}{\frac{x_1+x_2}{2}-x_1}=\frac{\ln f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-\ln f(x_1)}{\frac{x_2-x_1}{2}}\text{ και}$$

$$h'(\xi_2)=\frac{h(x_2)-h\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2-\frac{x_1+x_2}{2}}=\frac{\ln f(x_2)-\ln f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{\frac{x_2-x_1}{2}}.$$

Είναι $h'(x)=g(x)$ και η g είναι $\nearrow$ στο $\mathbb{R}$, οπότε και η h' είναι $\nearrow$ στο $\mathbb{R}$.

Επειδή $\xi_1<\xi_2$ ισχύει:

$$h'(\xi_1)<h'(\xi_2)\Leftrightarrow\frac{\ln f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-\ln f(x_1)}{\frac{x_2-x_1}{2}}<\frac{\ln f(x_2)-\ln f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{\frac{x_2-x_1}{2}}\Leftrightarrow$$

$$\ln f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-\ln f(x_1)<\ln f(x_2)-\ln f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\Leftrightarrow 2\ln f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\ln f(x_1)+\ln f(x_2)\Leftrightarrow$$

$$\ln f^2\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\ln\left(f(x_1)f(x_2)\right)\Leftrightarrow f^2\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<f(x_1)f(x_2)\Leftrightarrow f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\sqrt{f(x_1)f(x_2)}.$$

Όμοια, αν $x_1>x_2$.

Τέλος αν $x_1=x_2$, τότε $f\left(\dfrac{x_1+x_1}{2}\right)=\sqrt{f(x_1)f(x_1)}\Leftrightarrow f(x_1)=\sqrt{f^2(x_1)}$ που ισχύει.

Άρα, για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ ισχύει: $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)\le\sqrt{f(x_1)f(x_2)}$.

18. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $x<f'(x)<x+1$ για κάθε $x>0$. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

Λύση

$x<f'(x)\Leftrightarrow f'(x)-x>0$

Εστω $g(x)=f(x)-\dfrac{x^2}{2}$, $x\ge0$. Είναι $g'(x)=f'(x)-x>0\Rightarrow g\nearrow[0,+\infty)$.

Για κάθε $x>0$ είναι $g(x)>g(0)\Leftrightarrow f(x)>\frac{x^2}{2}+f(0)$

Είναι $f'(x)<x+1\Leftrightarrow f'(x)-x-1<0$.

Εστω $h(x)=f(x)-\frac{x^2}{2}-x,\ x\geq 0$. Είναι $h'(x)=f'(x)-x-1<0\Rightarrow h\searrow[0,+\infty)$.

Για κάθε $x>0$ είναι $h(x)<h(0)\Leftrightarrow f(x)<\frac{x^2}{2}+x+f(0)$, άρα

$$\frac{x^2}{3}+f(0)<f(x)<\frac{x^2}{2}+x+f(0)\overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow}\frac{1}{2}+\frac{f(0)}{x^2}<\frac{f(x)}{x^2}<\frac{1}{2}+\frac{1}{x}+\frac{f(0)}{x^2}$$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{f(0)}{x^2}\right)=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{x}+\frac{f(0)}{x^2}\right)=0$, οπότε, από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$.

19. Δίνεται συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[1,5]$ για την οποία ισχύει $f''(x)-12x+6>0$ για κάθε $x\in[1,5]$ και $f'(1)>0$.

α) Να αποδειχθεί ότι $f(5)-f(1)>176$.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,5]$

Λύση

α) $f''(x)-12x+6>0$ ή $\left(f'(x)-6x^2+6x\right)'>0$ ή $\left(f(x)-2x^3+3x^2\right)''>0$.

Εστω $g(x)=f(x)-2x^3+3x^2$, $x\in[1,5]$.

Η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1,5]$ με $g'(x)=f'(x)-6x^2+6x$ και $g''(x)=f''(x)-12x+6$.

Είναι $g''(x)>0$, άρα η g' είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,5]$.

Για κάθε $1<x<5$ είναι $g'(1)<g'(x)\Leftrightarrow g'(x)>f'(1)-6+6=f'(1)>0$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,5]$. Επομένως είναι

$g(1)<g(5)\Leftrightarrow f(1)-2+3<f(5)-2\cdot 5^3+3\cdot 5^2\Leftrightarrow f(1)+1<f(5)-175\Leftrightarrow f(5)-f(1)>176$.

β) Είναι $g'(x)>0\Leftrightarrow f'(x)-6x^2+6x>0\Leftrightarrow f'(x)>6x(x-1)>0$ για κάθε $x\in(1,5]$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι $\nearrow$ στο $[1,5]$

20. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\left(\frac{3}{4}\right)^x=1821x-3$ το πολύ μία ρίζα.

Λύση

Εστω $f(x)=\left(\frac{3}{4}\right)^x-1821x+3,\ x\in\mathbb{R}$. Είναι $f'(x)=\left(\frac{3}{4}\right)^x\ln\frac{3}{4}-1821<0\Rightarrow f\searrow\mathbb{R}$, άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει το πολύ μία ρίζα.

21. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[1,e]\to(0,1)$, με $f'(x)>0$, για κάθε $x\in(1,e)$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=x(1-\ln x)$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(1,e)$.

Λύση

Εστω $g(x)=f(x)-x(1-\ln x)$, $x\in[1,e]$. Είναι $g'(x)=f'(x)+\ln x>0$ για κάθε $x\in(1,e)$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $[1,e]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Είναι $g(1)=f(1)-1<0$, $g(e)=f(e)>0$, δηλαδή $g(1)g(e)<0$, οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1,e)$ και επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα, η ρίζα είναι μοναδική.

22. Δίνεται συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f^3(x)+\beta f^2(x)+\gamma f(x)=x^3-2x^2+6x-1$, $x\in\mathbb{R}$, $\beta^2<3\gamma$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$, έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

Λύση

Για $x=0$ είναι $f^3(0)+\beta f^2(0)+\gamma f(0)=-1\Leftrightarrow f(0)\left(f^2(0)+\beta f(0)+\gamma\right)=-1$ (1).

Το τριώνυμο $f^2(0)+\beta f(0)+\gamma$ έχει $\Delta=\beta^2-4\gamma=\beta^2-3\gamma-\gamma<0$, γιατί

$\beta^2<3\gamma\Leftrightarrow\gamma>\dfrac{\beta^2}{3}\geq 0$, άρα $f^2(0)+\beta f(0)+\gamma>0$ και από την (1) είναι $f(0)<0$.

Για $x=1$ είναι $f^3(1)+\beta f^2(1)+\gamma f(1)=4\Leftrightarrow f(1)\left(f^2(1)+\beta f(1)+\gamma\right)=4$ και επειδή $f^2(1)+\beta f(1)+\gamma>0$, είναι και $f(1)>0$.

Επειδή η f είναι συνεχής, απο το Θεώρημα Bolzano η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$.

Είναι $\left(f^3(x)+\beta f^2(x)+\gamma f(x)\right)'=\left(x^3-2x^2+6x-1\right)'\Rightarrow$

$3f^2(x)f'(x)+2\beta f(x)f'(x)+\gamma f'(x)=3x^2-4x+6\Leftrightarrow$

$f'(x)\left(3f^2(x)+2\beta f(x)+\gamma\right)=3x^2-4x+6$.

Επειδή $3x^2-4x+6>0$ και $3f^2(x)+2\beta f(x)+\gamma>0$ $(\Delta<0)$, είναι και $f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow[0,1]$ και η ρίζα του Bolzano είναι μοναδική.

23. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $e^x+e^{3x}=2$

β) $4^x+4^{\frac{1}{x}}=18$, $x>0$

Λύση

α) Εστω $f(x)=e^x+e^{3x}-2$, $x\in\mathbb{R}$. Είναι $f'(x)=e^x+3e^{3x}>0\Rightarrow f\nearrow\mathbb{R}\Rightarrow f$ "1–1".

Επειδή $f(0)=0$ και η f είναι 1–1, η $x=0$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

β) Εστω $f(x)=4^x+4^{\frac{1}{x}}-18$, $x>0$.

Είναι $f'(x)=4^x\ln4+4^{\frac{1}{x}}\ln4\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\dfrac{\ln4\left(x^24^x-4^{\frac{1}{x}}\right)}{x^2}$.

Παρατηρούμε ότι το πρόσημο της f' εξαρτάται από το πρόσημο της παράστασης $x^24^x-4^{\frac{1}{x}}$. Οπότε, θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=x^24^x-4^{\frac{1}{x}}$, $x>0$.

Είναι $g'(x)=2x4^x+x^24^x\ln4+4^{\frac{1}{x}}\ln4\frac{1}{x^2}>0$, οπότε η g είναι $\nearrow$ στο $(0,+\infty)$.

Παρατηρούμε ότι $g(1)=4-4=0$, οπότε για κάθε $x>1$ είναι $g(x)>g(1)=0$, άρα και $f'(x)>0$, οπότε $f\nearrow$ στο $[1,+\infty)$.

Για κάθε $0<x<1$ είναι $g(x)<g(1)=0$, άρα και $f'(x)<0$, οπότε $f\searrow$ στο $(0,1]$.

Στο διάστημα $[1,+\infty)$ η f έχει προφανή ρίζα την $x=2$, γιατί

$f(2)=4^2+4^{\frac{1}{2}}-18=\ 16+2-18=0$.Επειδή η f είναι $\nearrow$ στο $[1,+\infty)$, η $x=2$ είναι η μοναδική ρίζα της $f(x)=0$ στο διάστημα αυτό. Στο διάστημα $(0,1]$ η f έχει ρίζα την $x=\frac{1}{2}$, γιατί $f\left(\frac{1}{2}\right)=4^{\frac{1}{2}}+4^2-18=2+16-18=0$.

Επειδή η f είναι $\searrow$ στο $(0,1]$, η $x=\frac{1}{2}$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο διάστημα αυτό.

Άρα, η εξίσωση $f(x)=0\Leftrightarrow 4^x+4^{\frac{1}{x}}=18$ αληθεύει μόνο για $x=2$ ή $x=\frac{1}{2}$.

24. Να αποδείξετε ότι
α) $e^x-x+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
β) η εξίσωση $2e^x+\ 2x=x^2+\ 2$ έχει ακριβώς μία λύση τη $x=0$.

Λύση

α) Εστω $f(x)=e^x-x+1$, $x\in\mathbb{R}$.

Είναι $f'(x)=e^x-1$.

$f'(x)\geq0\Leftrightarrow e^x-1\geq0\Leftrightarrow e^x\geq1\Leftrightarrow x\geq0$.

Για κάθε $x<0$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\searrow(-\infty,0]$, οπότε $f(x)>f(0)=2>0$

Για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow[0,+\infty)$, οπότε $f(x)>f(0)=2>0$

Άρα $f(x)>0\Leftrightarrow e^x-x+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Εστω $g(x)=2e^x+2x-x^2-2$, $x\in\mathbb{R}$.

Είναι $g'(x)=2e^x+2-2x=2\left(e^x+1-x\right)=2f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Επειδή $g(0)=0$, η $x=0$ είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης $g(x)=0\Leftrightarrow 2e^x+2x=x^2+2$.

25. Εστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης fog είναι 1-1.
α) Να αποδείξετε ότι η g είναι 1-1.
β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $g\left(f(x)+x^3-x\right)=g\left(f(x)+2x-1\right)$ έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα.

Λύση

α. Εστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $g(x_1)=g(x_2)$. Επειδή η f είναι συνάρτηση, ισχύει :
$f\left(g(x_1)\right)=f\left(g(x_2)\right)\Leftrightarrow (fog)(x_1)=(fog)(x_2)$ και επειδή η fog είναι 1-1 έχουμε : $x_1=x_2$.Άρα η g είναι 1-1.

β. $g\left(f(x)+x^3-x\right)=g\left(f(x)+2x-1\right)\overset{g1-1}{\Leftrightarrow} f(x)+x^3-x=f(x)+2x-1\Leftrightarrow x^3-3x+1=0$
Εστω $h(x)=x^3-3x+1,\ x\in\mathbb{R}$.
Είναι $h'(x)=3x^2-3=3\left(x^2-1\right)$
$h'(x)\geq 0\Leftrightarrow 3\left(x^2-1\right)\geq 0\Leftrightarrow x^2\geq 1\Leftrightarrow |x|\geq 1\Leftrightarrow x\leq -1$ ή $x\geq 1$.
Για κάθε $x<-1$ είναι $h'(x)>0\Rightarrow h\nearrow(\infty,-1]$. Για κάθε $x\in(-1,1)$ είναι $h'(x)<0\Rightarrow h\searrow[-1,1]$ και για κάθε $x>1$ είναι $h'(x)>0\Rightarrow h\nearrow[1,+\infty)$
Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$.
Στο διάστημα $\Delta_1=(-\infty,-1]$ η h είναι συνεχής και $\nearrow$, άρα:
$h(\Delta_1)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}h(x),h(-1)\right]=(-\infty,3]$.
Επειδή $0\in h(\Delta_1)$ και η h είναι $\nearrow$ στο Δ_1, υπάρχει μοναδικό $x_1\in\Delta_1=(-\infty,-1]$ $(x_1<0)$ τέτοιο, ώστε $h(x_1)=0$.
Είναι $h(0)=1>0$, $h(1)=-1<0$, δηλαδή $h(0)h(1)<0$, οπότε λόγω του Θ. Bolzano υπάρχει $x_2\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $h(x_2)=0$. Επειδή η h είναι $\nearrow$ στο $[0,1]$ το $x_2>0$ είναι μοναδικό.
Στο διάστημα $\Delta_2=[-1,0]$ η h είναι συνεχής και $\searrow$ άρα: $h(\Delta_2)=[h(0),h(-1)]=[1,3]$.
Επειδή $0\notin h(\Delta_2)$ η $h(x)=0$ δεν έχει ρίζα στο Δ_2.
Στο διάστημα $\Delta_3=[1,+\infty)$ η h είναι συνεχής και $\nearrow$, άρα:
$h(\Delta_3)=\left[h(1),\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)\right)=[-1,+\infty)$.
Επειδή $0\in h(\Delta_2)$ και η h είναι $\nearrow$ στο Δ_2, υπάρχει μοναδικό $x_3\in(1,+\infty)$ $(x_3>0)$ τέτοιο, ώστε $h(x_3)=0$.
Επομένως η $h(x)=0\Leftrightarrow x^3-3x+1=0$ έχει ακριβώς δύο θετικές και μια αρνητική ρίζα.

26. Να λύσετε την εξίσωση $3^x+4^x=5^x$

Λύση

$3^x+4^x=5^x\Leftrightarrow\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x-1=0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x-1,\ x\in\mathbb{R}$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x\ln\frac{3}{5}+\left(\frac{4}{5}\right)^x\ln\frac{4}{5}$

Επειδή $\left(\frac{3}{5}\right)^x>0,\ \left(\frac{4}{5}\right)^x>0,\ \ln\frac{3}{5}<0$ και $\ln\frac{4}{5}<0$, είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\searrow\mathbb{R}\Rightarrow f$ "1–1".

Παρατηρούμε ότι $f(2)=\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2-1=\frac{9}{25}+\frac{16}{25}-\frac{25}{25}=0$.

Η δοθείσα εξίσωση γράφεται: $f(x)=0\Leftrightarrow f(x)=f(2)\overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow}x=2$

27. Να βρείτε το σύνολο τιμών των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=\ln x+\sqrt{x}-2$ **β)** $f(x)=x^4-4x+6$

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow[0,+\infty)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\ln x+\sqrt{x}-2\right)=-\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\sqrt{x}-2\right)=-2$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x+\sqrt{x}-2\right)=+\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}-2\right)=+\infty$.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ έχει σύνολο τιμών: $f(A)=\mathbb{R}$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=4x^3-4$.

$f'(x)\geq0\Leftrightarrow4x^3-4\geq0\Leftrightarrow4x^3\geq4\Leftrightarrow x^3\geq1\Leftrightarrow x\geq1$

Για κάθε $x<1$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\searrow(-\infty,1]$ και για κάθε $x>1$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow[1,+\infty)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^4=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^4=+\infty$ και $f(1)=3$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1=(-\infty,1]$, άρα $f(\Delta_1)=[3,+\infty)$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2=[1,+\infty)$, άρα $f(\Delta_2)=[3,+\infty)$.

Το σύνολο τιμών της f είναι: $f(A)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)=[3,+\infty)$.

28. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $3x^4-8x^3-6x^2+24x-\lambda=0$ για τις διάφορες τιμές $\lambda\in\mathbb{R}$.

Λύση

Εστω η συνάρτηση $f(x)=3x^4-8x^3-6x^2+24x-\lambda,\ x\in\mathbb{R}$.

Είναι $f'(x)=12x^3-24x^2-12x+24$.

$f'(x)\geq0\Leftrightarrow12\left(x^3-2x^2-x+2\right)\geq0\Leftrightarrow12\left(x^2-1\right)(x-2)\geq0\Leftrightarrow x\in[-1,1]\cup[2,+\infty)$

Για κάθε $x<-1$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\searrow(-\infty,-1]$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}3x^4=+\infty$ και

x	$-\infty$ -1	1	2	$+\infty$
f'	–	+	–	+
f	↘	↗	↘	↗

$f(-1)=-19-\lambda$.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1=(-\infty,-1]$, έχει σύνολο τιμών $f(\Delta_1)=[-19-\lambda,+\infty)$

Για κάθε $-1<x<1$ είναι $f'(x)>0 \Rightarrow f\nearrow[-1,1]$. Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2=[-1,1]$, έχει σύνολο τιμών $f(\Delta_2)=[-19-\lambda,13-\lambda]$

Για κάθε $1<x<2$ είναι $f'(x)<0 \Rightarrow f\searrow[1,2]$.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_3=[1,2]$ έχει σύνολο τιμών $f(\Delta_3)=[8-\lambda,13-\lambda]$.

Για κάθε $x>2$ είναι $f'(x)>0 \Rightarrow f\nearrow[2,+\infty)$. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^4=+\infty$ και $f(2)=8-\lambda$. Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_4=[2,+\infty)$, έχει σύνολο τιμών $f(\Delta_2)=[-19-\lambda,13-\lambda]$

Αν $-19-\lambda>0 \Leftrightarrow \lambda<-19$, τότε $13-\lambda>0$, $8-\lambda>0$, οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ δεν έχει καμία ρίζα.

Αν $\lambda=-19$, τότε $13-\lambda>0$, $8-\lambda>0$ και η εξίσωση έχει μία ρίζα, την $\rho_1=-1$.

Αν $-19<\lambda<8$, τότε $-19-\lambda<0$ και $13-\lambda>0$, $8-\lambda>0$, οπότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες, $\rho_1\in(-\infty,-1)$ και $\rho_2\in(-1,1)$.

Αν $\lambda=8$, τότε $-19-\lambda<0$, $8-\lambda=0$ και $13-\lambda>0$ και η εξίσωση έχει 3 ρίζες, $\rho_1\in(-\infty,-1)$, $\rho_2\in(-1,1)$ και $\rho_3=2$.

Αν $8<\lambda<13$, τότε $-19-\lambda<0$, $8-\lambda<0$ και $13-\lambda>0$ και η εξίσωση έχει 4 ρίζες, $\rho_1\in(-\infty,-1)$, $\rho_2\in(-1,1)$, $\rho_3\in(1,2)$ και $\rho_4\in(2,+\infty)$.

Αν $\lambda=13$, τότε $-19-\lambda<0$, $8-\lambda<0$ και $13-\lambda=0$ και η εξίσωση έχει 3 ρίζες, $\rho_1\in(-\infty,-1)$, $\rho_2=1$ και $\rho_3\in(2,+\infty)$.

Τέλος, αν $\lambda>13$, τότε $13-\lambda<0$, $-19-\lambda<0$ και $8-\lambda<0$ και η εξίσωση έχει 2 ρίζες, $\rho_1\in(-\infty,-1)$ και $\rho_2\in(2,+\infty)$.

29. Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις: $f(x)=-f(2-x)$ και $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη .

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x) = 0 έχει μοναδική ρίζα.

γ) Εστω η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{f'(x)}$.Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα x΄x, σχηματίζει με αυτόν γωνία 45° .

Λύση

α. Επειδή $f'(x)\neq 0$ και συνεχής, η f' διατηρεί πρόσημο άρα η f είναι γνήσια μονότονη.

β. Για $x=1$ είναι $f(1)=-f(1)\Leftrightarrow 2f(1)=0\Leftrightarrow$ $f(1)=0$ και f γνησίως μονότονη, άρα η $x=1$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

γ. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\frac{f(x)}{f'(x)}}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{f(x)}{x-1}\dfrac{1}{f'(x)}\right)=f'(1)\dfrac{1}{f'(1)}=1.$

Αν ω η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη με τον x΄x, τότε $g'(1)=\varepsilon\varphi\omega \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega=1 \Rightarrow \omega=45^\circ$.

30. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}-\ln x$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες στο πεδίο ορισμού της.

γ) Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g(x)=lnx στο σημείο $A(\alpha,\ln\alpha)$ με $\alpha>0$ και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x)=e^x$ στο σημείο $B(\beta,e^\beta)$ με $\beta\in\mathbb{R}$ ταυτίζονται, τότε να δείξετε ότι ο αριθμός α είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

δ) Να αιτιολογήσετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και h έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτόμενες.

Λύση

α) Πρέπει $\begin{cases}x-1\neq0\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq1\\ x>0\end{cases}$, άρα $A=(0,1)\cup(1,+\infty)$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο Α με $f'(x)=-\dfrac{x^2+1}{x(x-1)^2}<0$.

Είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\downarrow(0,1)$ και $\downarrow(1,+\infty)$.

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

Στο διάστημα $A_1=(0,1)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, άρα

$f(A_1)=\left(\lim\limits_{x\to1^-}f(x),\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\right)=\mathbb{R}$

Στο διάστημα $A_2=(1,+\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, άρα

$f(A_2)=\left(\lim\limits_{x\to1^+}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=\mathbb{R}$. Είναι $f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)=\mathbb{R}$

β) Επειδή $0\in f(A_1)=\mathbb{R}$, υπάρχει μοναδικό $x_1\in A_1=(0,1):f(x_1)=0$.

Επειδή $0\in f(A_2)=\mathbb{R}$, υπάρχει μοναδικό $x_2\in A_2=(1,+\infty):f(x_2)=0$.

Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες.

γ) Η εφαπτομένη της C_g στο Α είναι η ευθεία $\varepsilon_1:y-\ln\alpha=\dfrac{1}{\alpha}(x-\alpha)\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{\alpha}x+\ln\alpha-1$,

και της C_h στο Β η ευθεία $\varepsilon_2:y-e^\beta=e^\beta(x-\beta)\Leftrightarrow y=e^\beta x+e^\beta(1-\beta)$.

Επειδή οι $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ ταυτίζονται, είναι:

$$\begin{cases} e^{\beta}=\dfrac{1}{\alpha} \\ \ln\alpha-1=e^{\beta}(1-\beta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-\ln\alpha \\ \ln\alpha-1=\dfrac{1}{\alpha}(1+\ln\alpha) \end{cases} \Rightarrow \alpha\ln\alpha-\alpha=1+\ln\alpha \Leftrightarrow (\alpha-1)\ln\alpha=\alpha+1 \ (1).$$

Αν $\alpha=1$, τότε η (1) είναι αδύνατη. Για $\alpha\neq 1$ έχουμε: $\ln\alpha=\dfrac{\alpha+1}{\alpha-1}\Leftrightarrow f(\alpha)=0$.

δ) Επειδή η $f(x)=0$ έχει 2 ρίζες, υπάρχουν 2 τιμές του α για τις οποίες οι C_f, C_g δέχονται κοινή εφαπτομένη.

Εξάσκηση

31. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

α) $f(x)=\ln(x^2-8x+12)$ **β)** $f(x)=\begin{cases} x^2-2x-2, & x<3 \\ 1-\sqrt{x^2-9}, & x\geq 3 \end{cases}$

32. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

α) $f(x)=2e^x-x^2-2x+1$ **β)** $h(x)=\dfrac{\ln(x-1)}{\ln x}$, όταν $x\geq 2$ **γ)** $f(x)=\sigma\upsilon\nu x-\dfrac{x^4}{24}$, $x\geq 0$

33. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε να είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x)=4x^3-(\lambda-2)x^2+12x-5$.

34. Να βρείτε το πρόσημο των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=e^x-x$, $x\in\mathbb{R}$ **β)** $f(x)=2\ln x+1-x^2$, $x>0$

35. Να αποδείξετε τις ανισότητες : **α)** $\eta\mu x<2x$, $x>0$, **β)** $\eta\mu x>x-\dfrac{x^3}{3}$,$x>0$

36. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in(0,1)$ ισχύει η σχέση $1+x<e^x<1+ex$.

37. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln x+\dfrac{x^3}{3}=6$ έχει το πολύ μία ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

38. **α)** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^3+2x-1-\eta\mu 2x$,$x\in\mathbb{R}$, είναι γνησίως αύξουσα.

β) Η εξίσωση $x^3+2x-1=\eta\mu 2x$ έχει μία μόνο ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

39. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα $[1,e]$ με $0<f(x)<1$και $f'(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[1,e]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μόνο ένας αριθμός $x_0\in(1,e)$ τέτοιος ώστε: $f(x_0)+x_0\ln x_0=x_0$.

40. Να αποδείξετε ότι:

α) $e^x - x + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) η εξίσωση $2e^x + 2x = x^2 + 2$ έχει ακριβώς μία λύση την $x = 0$.

41. Εστω συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$. Αν $f(x) \le f(\alpha)$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,\beta]$.

42. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με f' γνησίως φθίνουσα και $f(0) = 0$.

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση: $g(x) = 2e^x + 3\ln x - \dfrac{f(x)}{x} - 1,\ x > 0$.

43. Να βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων:

α) $f(x) = \ln(x-3) + x^2 + 2x$ **β)** $g(x) = \sqrt{6x - x^2}$ **γ)** $h(x) = \ln x + \dfrac{1}{x-2}$

44. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[1,+\infty) \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $xf'(x) < f(x) + x^2e^x$ για κάθε $x > 1$ και $f(1) = e$. Να αποδείξετε ότι $f(x) < xe^x$ για κάθε $x > 1$.

45. Να λύσετε την ανίσωση: $\ln\dfrac{x^2 - 5x + 9}{x+1} < 3^{x+1} - 3^{x^2-5x+9}$, $x > 0$.

46. Αν $0 < x < y < \dfrac{\pi}{2}$ να αποδείξετε ότι $y\eta\mu x > x\eta\mu y$.

47. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1,4]$, για την οποία ισχύει $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in [1,4]$. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $A = f(2) + f(3)$ και $B = f(1) + f(4)$.

48. Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f(1) = 1$ και $f(0) = 0$, να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (0,1)$ είναι $f(x) < \dfrac{1}{2-x}$.

49. Δίνεται δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $2 < f''(x) < 4e^{2x}$ για κάθε $x > 0$, $f'(0) = 0$ και $f(0) = 1$. Να αποδείξετε ότι:

α) $x^2 + 1 < f(x) < e^{2x}$ για κάθε $x > 0$.

β) Υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) + \ln x_0 = 0$

50. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης: $6x^2 + 2 = x^3 + 9x$.

51. Να λύσετε την εξίσωση $\ln(xe^x + 1) - x = 0$.

52. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^{x-1} + x^2 - 3x + 1$ και $g(x) = \ln x - x + 1$.

α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις f,g.
β)Να λύσετε την εξίσωση $e^{x-1}-\ln x+x^2-2x=0$
γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f,g έχουν κοινή εφαπτομένη τον άξονα x΄x.

53. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:
α) $4^x+2^x=6^x$ **β)** $3^x-2x^2-1=0$

54. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{2}συν^2x+συνx-e^{συνx}+e$, $x\in[0,π]$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $f\left(\frac{5π}{9}\right)$.

γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\frac{1}{2}\right)$ και $f(1)$.

55. Εστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f(0)=4$ και $f(2)=0$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$ είναι γνησίως αύξουσα όταν $f(x)<f'(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Υπάρχει $ξ\in\mathbb{R}$, τέτοιο ώστε: $f(ξ)\geq f'(ξ)$.

56. Να αποδείξετε ότι $27^{27}>28^{26}$.

57. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:
$x^2+1<f'(x)<x^2+x+2$ για κάθε $x>0$. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^3}$.

58. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2^x+3^x-1, x\in\mathbb{R}$.
α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
β) Να λύσετε την εξίσωση $2^{x^2-3x}-2^{2x-4}=3^{2x-4}-3^{x^2-3x}$
γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.
δ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=α$, $α>0$.

59. **α)** Να λύσετε την εξίσωση $x+e^x=1$.
β) Εστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι
$f(x)+e^{f(x)}=3x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i. η f είναι γνησίως αύξουσα.
ii. η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
iii. αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $f'(x)>f(x+1)-f(x)>f'(x+1)$.