

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

1. i) Αν  $A = \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$  και  $B = \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta$ , να αποδείξετε ότι :  
 $A^2 + B^2 = 1$ .  
 ii) Αν  $A = 2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$  και  $B = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha$ , να αποδείξετε ότι  $A^2 + B^2 = 1$ .
2. Αν  $x = \alpha\eta\mu\theta$  και  $y = \beta\sigma\upsilon\nu\theta$ , να αποδείξετε ότι  $(\beta x)^2 + (\alpha y)^2 = \alpha^2\beta^2$ .
3. Αν  $A = |\alpha|\cdot\eta\mu\chi + |\beta|\cdot\sigma\upsilon\nu\chi$  και  $B = |\beta|\cdot\eta\mu\chi - |\alpha|\cdot\sigma\upsilon\nu\chi$ , να αποδείξετε ότι ισχύει  $A^2 + B^2 = \alpha^2 + \beta^2$ .
4. Να αποδείξετε ότι:
  - i)  $\eta\mu^2\omega - \sigma\upsilon\nu^2\theta = \eta\mu^2\theta - \sigma\upsilon\nu^2\omega$
  - ii)  $\eta\mu^2\chi \cdot \sigma\upsilon\nu^2\varphi - \eta\mu^2\varphi \cdot \sigma\upsilon\nu^2\chi = \eta\mu^2\chi - \eta\mu^2\varphi = \sigma\upsilon\nu^2\varphi - \sigma\upsilon\nu^2\chi$
5. Να αποδειχθεί ότι:
 

i) $\epsilon\varphi^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \sigma\varphi^2\alpha\eta\mu^2\alpha = 1$	ii) $\eta\mu^2\alpha\epsilon\varphi\alpha - \sigma\upsilon\nu^2\alpha\sigma\varphi\alpha = \epsilon\varphi\alpha - \sigma\varphi\alpha$
iii) $\eta\mu^3\alpha + \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \eta\mu\alpha$	iv) $\sigma\upsilon\nu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\beta - \eta\mu^2\alpha\eta\mu^2\beta = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\beta$
6. Να αποδείξετε ότι:
 

i) $(3\eta\mu\alpha + 4\sigma\upsilon\nu\alpha)^2 + (4\eta\mu\alpha - 3\sigma\upsilon\nu\alpha)^2 = 25$	ii) $\frac{1 - \eta\mu^4\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} = 1 + \eta\mu^2\theta$
iii) $\frac{\eta\mu^4\alpha - \sigma\upsilon\nu^4\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha}{1 - \sigma\upsilon\nu\alpha} = 1 + \sigma\upsilon\nu\alpha$	
7. Να αποδειχθεί ότι:
 

i) $\frac{\eta\mu\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha + 1}{\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha - 1} = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1 - \eta\mu\alpha}$	ii) $\frac{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha}{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha} - \epsilon\varphi\alpha} - \frac{1 - \sigma\upsilon\nu\alpha}{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha} + \epsilon\varphi\alpha} = 2(1 + \epsilon\varphi\alpha)$
iii) $3\sigma\upsilon\nu^2\alpha + 2\eta\mu^2\alpha = \frac{3 + 2\epsilon\varphi^2\alpha}{1 + \epsilon\varphi^2\alpha}$	iv) $\frac{\eta\mu\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha} + \frac{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha} = \frac{2}{\eta\mu\alpha}$
v) $\epsilon\varphi\alpha + \sigma\varphi\beta = \epsilon\varphi\alpha\epsilon\varphi\beta(\sigma\varphi\alpha + \sigma\varphi\beta)$	vi) $\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1 - \eta\mu\alpha} - \frac{1 - \eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{2}{\sigma\upsilon\nu\alpha}$
vii) $\frac{\eta\mu\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha} - \frac{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha} + 2\sigma\varphi\alpha = 0$	viii) $\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1 + \eta\mu\alpha} - \frac{1 - \eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = 2\epsilon\varphi\alpha$
ix) $\frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu\alpha} + \frac{\epsilon\varphi\alpha}{1 + \epsilon\varphi^2\alpha} = \sigma\varphi\alpha$	x) $\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1 + \epsilon\varphi\alpha} - \frac{\eta\mu\alpha}{1 + \sigma\varphi\alpha} = \sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha$
xi) $\frac{\epsilon\varphi\alpha + \eta\mu\alpha}{\epsilon\varphi\alpha - \eta\mu\alpha} = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha}{1 - \sigma\upsilon\nu\alpha}$	xii) $\frac{\epsilon\varphi\alpha - \eta\mu\alpha}{\eta\mu^3\alpha} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha(1 + \sigma\upsilon\nu\alpha)}$
xiii) $\eta\mu^2\alpha(1 + \sigma\varphi^2\alpha) + \sigma\upsilon\nu^2\alpha(1 + \epsilon\varphi^2\alpha) = 2$	xiii) $\eta\mu^2\alpha(1 + \sigma\varphi^2\alpha) + \sigma\upsilon\nu^2\alpha(1 + \epsilon\varphi^2\alpha) = 2$
xiv) $\sigma\upsilon\nu^2\alpha(1 + \sigma\varphi^2\alpha) - \eta\mu^2\alpha(1 + \epsilon\varphi^2\alpha) = \frac{1}{\eta\mu^2\alpha} - \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}$	
xv) $\sigma\varphi\alpha + \frac{\eta\mu\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{1}{\eta\mu\alpha}$	xvi) $\sigma\upsilon\nu^4\alpha + \eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \eta\mu^2\alpha = 1$

$$xvii) \frac{\eta\mu^2\alpha}{\eta\mu\alpha - \sigma\nu\alpha} - \frac{\eta\mu\alpha + \sigma\nu\alpha}{\varepsilon\phi^2\alpha - 1} = \eta\mu\alpha + \sigma\nu\alpha \quad xviii) \frac{1 + 2\eta\mu\alpha\sigma\nu\alpha}{1 - 2\sigma\nu\alpha^2} = \frac{\varepsilon\phi\alpha + 1}{\varepsilon\phi\alpha - 1}$$

8. Να αποδείξετε ότι :

$$i) \frac{\sigma\nu\theta}{1 + \eta\mu\theta} + \frac{1 + \eta\mu\theta}{\sigma\nu\theta} = \frac{2}{\sigma\nu\theta}$$

$$ii) \frac{\eta\mu x}{1 - \sigma\nu x} + \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\nu x} = \frac{2}{\eta\mu x}$$

9. Να αποδείξετε ότι :

$$i) \frac{\eta\mu x - \sigma\nu x + 1}{\eta\mu x + \sigma\nu x - 1} = \frac{1 + \eta\mu x}{\sigma\nu x} = \frac{\sigma\nu x}{1 - \eta\mu x}$$

$$ii) \frac{\sigma\nu x - \eta\mu x + 1}{\eta\mu x + \sigma\nu x - 1} = \frac{1 + \sigma\nu x}{\eta\mu x} = \frac{\eta\mu x}{1 - \sigma\nu x}$$

10. Να αποδείξετε ότι:

$$i) \frac{1 + \varepsilon\phi^4\alpha}{\varepsilon\phi^2\alpha + \sigma\phi^2\alpha} = \varepsilon\phi^2\alpha$$

$$ii) \frac{1 + \varepsilon\phi\alpha + \varepsilon\phi^2\alpha}{1 + \sigma\phi\alpha + \sigma\phi^2\alpha} = \varepsilon\phi^2\alpha$$

11. Να αποδείξετε ότι:

$$i) \varepsilon\phi\alpha + \frac{1}{\varepsilon\phi\alpha} = \frac{1}{\eta\mu\alpha \cdot \sigma\nu\alpha}$$

$$ii) \frac{\eta\mu\alpha + \varepsilon\phi\alpha}{\varepsilon\phi\alpha} = 1 + \sigma\nu\alpha$$

$$iii) \eta\mu^2\alpha + \varepsilon\phi^2\alpha = \frac{1 - \sigma\nu^4\alpha}{\sigma\nu^2\alpha}$$

12. Να αποδείξετε ότι:

$$i) \frac{\varepsilon\phi\alpha + \sigma\phi\beta}{\varepsilon\phi\beta + \sigma\phi\alpha} = \frac{\sigma\phi\beta}{\sigma\phi\alpha}$$

$$ii) \sigma\phi^2\alpha - \sigma\nu^2\alpha = \sigma\phi^2\alpha \cdot \sigma\nu^2\alpha$$

$$iii) (1 - \eta\mu x) \left( 1 + \frac{1}{\eta\mu x} \right) = \sigma\nu x \cdot \sigma\phi x$$

13. Να αποδείξετε ότι:

$$i) \frac{\eta\mu\theta}{1 - \sigma\phi\theta} + \frac{\sigma\nu\theta}{1 - \varepsilon\phi\theta} = \eta\mu\theta + \sigma\nu\theta$$

$$ii) \frac{\varepsilon\phi^2\theta - 1}{\varepsilon\phi^2\theta + 1} = \eta\mu^4\theta - \sigma\nu^4\theta$$

14. Να αποδείξετε ότι:

$$i) (1 - \eta\mu x \cdot \sigma\nu x) (\eta\mu x + \sigma\nu x) = \eta\mu^3 x + \sigma\nu^3 x$$

$$ii) (1 + \eta\mu x \cdot \sigma\nu x) (\eta\mu x - \sigma\nu x) = \eta\mu^3 x - \sigma\nu^3 x$$

$$iii) \frac{\eta\mu x + \sigma\nu x}{\sigma\nu^3 x} = \varepsilon\phi^3 x + \sigma\phi^3 x + \varepsilon\phi x + 1$$

15. Να αποδείξετε ότι:

$$i) \frac{1 - \eta\mu 2\theta}{\sigma\nu^2\theta} - \frac{1 - 3\eta\mu\theta}{1 - \eta\mu\theta} = 2\varepsilon\phi^2\theta$$

$$ii) \frac{\eta\mu^4\alpha}{1 - \eta\mu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha \cdot \sigma\nu^2\alpha} = \varepsilon\phi^4\alpha$$

16. Να αποδείξετε ότι:

$$i) (1 + \eta\mu\alpha + \sigma\nu\alpha)^2 = 2(1 + \eta\mu\alpha)(1 + \sigma\nu\alpha)$$

$$ii) (\eta\mu\theta + \sigma\nu\theta)^4 - (\eta\mu\theta - \sigma\nu\theta)^4 = 8\eta\mu\theta \cdot \sigma\nu\theta$$

17. Αν  $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ , να αποδείξετε ότι  $\frac{\sqrt{1+\eta\mu x} - \sqrt{1-\eta\mu x}}{\sqrt{1+\eta\mu x} + \sqrt{1-\eta\mu x}} = \frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x} = \frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$

18. Να αποδείξετε ότι :

i)  $\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x = 1 - 2\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x$

ii)  $\left(\frac{1}{\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha}\right)^2 - \left(\frac{1-\varepsilon\phi^2\alpha}{\varepsilon\phi\alpha}\right)^2 = 4$

iii)  $(1-\varepsilon\phi\theta)^2 + (1-\sigma\phi\theta)^2 = \left(\frac{1}{\eta\mu\theta} - \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}\right)^2$

iv)  $(\eta\mu^4\theta + \sigma\upsilon\nu^4\theta)(\varepsilon\phi\theta + \sigma\phi\theta)^2 = \varepsilon\phi^2\theta + \sigma\phi^2\theta$

19. Αν  $0 < x < \pi$  και επίσης  $A = \sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}}$  και  $B = \sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}}$ , να αποδείξετε ότι :

i)  $A = \frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x} = \frac{1+\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$       ii)  $B = \frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = \frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}$

iii)  $A - B = 2\sigma\phi x$       iv)  $A + B = \frac{2}{\eta\mu x}$

20. Αν  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , να αποδείξετε ότι  $\sqrt{2\varepsilon\phi x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}} = 1 + \varepsilon\phi x$

21. Να αποδείξετε ότι  $|\sigma\phi x \cdot \sigma\phi y| < 1 \Leftrightarrow |\sigma\upsilon\nu x| < |\eta\mu y|$ .

22. Να αποδείξετε ότι τα σημεία  $M(x, y)$  του επιπέδου με  $x = 2 + 5\eta\mu t$  και  $y = -1 + 5\sigma\upsilon\nu t$  βρίσκονται σε κύκλο κέντρου  $K(2, -1)$  και ακτίνας 5.

23. Να αποδείξετε ότι  $\frac{1+\sigma\phi^{\nu} x}{1+\varepsilon\phi^{\nu} x} = \left(\frac{1+\sigma\phi x}{1+\varepsilon\phi x}\right)^{\nu}$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$

24. Αν  $\varepsilon\phi x + \sigma\phi x = \alpha$ , να υπολογίσετε συναρτήσεις του  $\alpha$  τις παραστάσεις:

i)  $\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$

ii)  $|\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x|$

iii)  $\varepsilon\phi^2 x + \sigma\phi^2 x$

iv)  $\varepsilon\phi^3 x + \sigma\phi^3 x$

25. Αν  $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = \alpha$ , να υπολογίσετε συναρτήσεις του  $\alpha$  τις παραστάσεις:

i)  $\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$

ii)  $\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x$

iii)  $|\eta\mu^3 x - \sigma\upsilon\nu^3 x|$

26. Να αποδείξετε ότι η παράσταση  $\eta\mu^6 x + \sigma\upsilon\nu^6 x + 3\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x$  έχει τιμή ανεξάρτητη του  $x$ .

27. Να αποδείξετε ότι η παράσταση  $\eta\mu^6\theta + \sigma\upsilon\nu^6\theta - 2\eta\mu^4\theta - \sigma\upsilon\nu^4\theta + \eta\mu^2\theta$  έχει τιμή ανεξάρτητη του  $\theta$ .

28. Να αποδείξετε ότι η παράσταση  $2\eta\mu^4\theta + \eta\mu^2\theta \cdot \sigma\upsilon\nu^2\theta - \sigma\upsilon\nu^4\theta - 3\eta\mu^2\theta$  έχει τιμή ανεξάρτητη του  $\theta$ .