

Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου Μεθοδική Επανάληψη



Στέλιος Μιχαήλογλου

www.askisopolis.gr

**Η επανάληψη βήμα - βήμα με ερωτήσεις
και απαντήσεις σε κάθε παράγραφο
καθώς και τις βασικές ασκήσεις.**

Αριθμητική - Άλγεβρα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο - Οι φυσικοί αριθμοί

Α.1.1. Φυσικοί αριθμοί - Διάταξη Φυσικών – Στρογγυλοποίηση

1. Ποιοι αριθμοί λέγονται φυσικοί;

Απάντηση

Οι αριθμοί 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6..... 98, 99, 100.....ονομάζονται φυσικοί αριθμοί. Κάθε φυσικός αριθμός έχει έναν επόμενο και ένα προηγούμενο φυσικό αριθμό, εκτός από το 0 που έχει μόνο επόμενο, το 1.

2. Ποιοι αριθμοί ονομάζονται άρτιοι και ποιοι περιπτοί;

Απάντηση

Άρτιοι λέγονται οι φυσικοί αριθμοί που διαιρούνται με το 2 και περιπτοί εκείνοι που δεν διαιρούνται με το 2.

3. Τι είναι η στρογγυλοποίηση ενός φυσικού αριθμού και με ποιο τρόπο γίνεται;

Απάντηση

Η διαδικασία αντικατάστασης ενός φυσικού αριθμού με μια προσέγγισή του, δηλαδή με κάποιον άλλο λίγο μεγαλύτερο ή λίγο μικρότερό του ονομάζεται στρογγυλοποίηση. Για να στρογγυλοποιήσουμε ένα φυσικό αριθμό:

- Προσδιορίζουμε τη τάξη στην οποία θα γίνει η στρογγυλοποίηση.
- Εξετάζουμε το ψηφίο της αμέσως μικρότερης τάξης.
- Αν αυτό είναι μικρότερο του 5 (δηλαδή 0, 1, 2, 3 ή 4), το ψηφίο αυτό και όλα τα ψηφία των μικρότερων τάξεων μηδενίζονται.
- Αν είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 5 (δηλαδή 5, 6, 7, 8 ή 9), το ψηφίο αυτό και όλα τα ψηφία των μικρότερων τάξεων μηδενίζονται και το ψηφίο της τάξης στρογγυλοποίησης αυξάνεται κατά 1.

Βασικές ασκήσεις

1. Τοποθέτησε το κατάλληλο σύμβολο: <, =, >, στο κενό μεταξύ των ακόλουθων αριθμών:
(α) 45...45 (β) 38...36, (γ) 456...465, (δ) 8.765...8.970, (ε) 90.876...86.945,
(στ) 345...5.690
2. Στρογγυλοποίησε τον αριθμό 7.568.349 στις πλησιέστερες:
(α) δεκάδες, (β) εκατοντάδες, (γ) χιλιάδες, (δ) δεκάδες χιλιάδες, (ε) εκατοντάδες χιλιάδες.

A.1.2. Πρόσθεση, αφαίρεση και πολλαπλασιασμός φυσικών αριθμών

4. Ποια πράξη ονομάζεται πρόσθεση δύο φυσικών αριθμών a και β ;
Ποιες είναι οι ιδιότητες της πρόσθεσης;

Απάντηση

Πρόσθεση είναι η πράξη με την οποία από δύο φυσικούς αριθμούς a και β , τους προσθετούς, βρίσκουμε ένα τρίτο φυσικό αριθμό γ , που είναι το άθροισμά τους και γράφουμε: $a + \beta = \gamma$

Ιδιότητες της πρόσθεσης:

Το 0 όταν προστεθεί σε ένα φυσικό αριθμό δεν τον μεταβάλλει. $a + 0 = 0 + a = a$

Μπορούμε να αλλάζουμε τη σειρά των δύο προσθετέων ενός αθροίσματος (Αντιμεταθετική ιδιότητα)

$$a + \beta = \beta + a$$

Μπορούμε να αντικαθιστούμε προσθετέους με το άθροισμά τους ή να αναλύουμε ένα προσθετέο σε άθροισμα

(Προσεταιριστική ιδιότητα).

$$a + (\beta + \gamma) = (a + \beta) + \gamma$$

5. Ποια πράξη ονομάζεται αφαίρεση και πως ονομάζονται οι αριθμοί που συμμετέχουν σε αυτή τη πράξη;

Απάντηση

Αφαίρεση είναι η πράξη με την οποία, όταν δίνονται δύο αριθμοί, M (μειωτέος) και A (αφαιρετέος) βρίσκουμε έναν αριθμό Δ (διαφορά), ο οποίος όταν προστεθεί στο A δίνει το M . Δηλαδή: $\Delta = M - A$

6. Ποια πράξη ονομάζεται πολλαπλασιασμός και πως ονομάζονται οι αριθμοί που συμμετέχουν σε αυτή;

Απάντηση

Πολλαπλασιασμός είναι η πράξη με την οποία από δύο φυσικούς αριθμούς a και β , τους παράγοντες, βρίσκουμε ένα τρίτο φυσικό αριθμό γ , που είναι το γινόμενο τους: $a \cdot \beta = \gamma$.

7. Ποιες είναι οι ιδιότητες του πολλαπλασιασμού;

Απάντηση

Το 1 όταν πολλαπλασιαστεί με ένα φυσικό αριθμό δεν τον μεταβάλλει.

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

Μπορούμε να αλλάζουμε τη σειρά των παραγόντων ενός γινομένου (Αντιμεταθετική ιδιότητα).

$$a \cdot \beta = \beta \cdot a$$

Μπορούμε να αντικαθιστούμε παράγοντες με το γινόμενο τους ή να αναλύουμε ένα παράγοντα σε γινόμενο (Προσεταιριστική ιδιότητα) $a \cdot (\beta \cdot \gamma) = (a \cdot \beta) \cdot \gamma$

Επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση:

$$a \cdot (\beta + \gamma) = a \cdot \beta + a \cdot \gamma$$

Επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την αφαίρεση:

$$a \cdot (\beta - \gamma) = a \cdot \beta - a \cdot \gamma$$

Βασικές ασκήσεις

- Υπολόγισε τα παρακάτω γινόμενα, χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα:
(α) $3 \cdot 13$, (β) $7 \cdot 11$, (γ) $45 \cdot 12$, (δ) $12 \cdot 101$, (ε) $5 \cdot 110$, (στ) $4 \cdot 111$, (ζ) $34 \cdot 99$, (η) $58 \cdot 98$.
- Ο Νίκος κατέβηκε για ψώνια με 160 €. Σε ένα μαγαζί βρήκε ένα πουκάμισο που κόστιζε 5 €, ένα πανταλόνι που κόστιζε 48 € και ένα σακάκι που κόστιζε 77 €. Του φτάνουν τα χρήματα για να τα αγοράσει όλα;
- Ένα σχολείο έχει 12 αίθουσες διδασκαλίας. Οι 7 χωράνε από 20 διπλά θρανία και οι υπόλοιπες από 12 διπλά θρανία. Στο σχολείο εγγράφηκαν: στην Α' τάξη 80 παιδιά, στην Β' τάξη 58 παιδιά και στην Γ τάξη 61 παιδιά. Επαρκούν οι αίθουσες για τα παιδιά αυτού του Γυμνασίου;

A.1.3. Δυνάμεις φυσικών αριθμών

8. Τι ονομάζεται νιοστή δύναμη του φυσικού αριθμού a ;

Απάντηση

Το γινόμενο $a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a$, που έχει n παράγοντες ίσους με το a , λέγεται δύναμη του a στη n ή νιοστή δύναμη του a και συμβολίζεται με a^n .

$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a$
 n παράγοντες

9. Τι ονομάζεται αριθμητική παράσταση; Ποια είναι η προτεραιότητα των πράξεων σε μια αριθμητική παράσταση;

Απάντηση

Αριθμητική παράσταση λέγεται κάθε σειρά αριθμών που συνδέονται μεταξύ τους με τα σύμβολα των πράξεων.

Η σειρά με την οποία πρέπει να κάνουμε τις πράξεις σε μία αριθμητική παράσταση (προτεραιότητα των πράξεων) είναι η ακόλουθη:

- Υπολογισμός δυνάμεων.
- Εκτέλεση πολλαπλασιασμών και διαιρέσεων.
- Εκτέλεση προσθέσεων και αφαιρέσεων.

Αν υπάρχουν παρενθέσεις, εκτελούμε πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις με την παραπάνω σειρά.

Βασικές ασκήσεις

- Βρες τις τιμές των παραστάσεων: (α) $(6+5)^2$ και 6^2+5^2 , (β) $(3+6)^2$ και 3^2+6^2 . Τι παρατηρείς;
- Γράψε πιο σύντομα τα παρακάτω αθροίσματα και γινόμενα:
(α) $a+a+a$, (β) $a \cdot a \cdot a$, (γ) $x+x+x+x$ (δ) $x \cdot x \cdot x$

8. Γράψε τους αριθμούς: (α) 34.720, (β) 123.654, (γ) 890.650 σε αναπτυγμένη μορφή με χρήση των δυνάμεων του 10.

A.1.4. Ευκλείδεια διαίρεση - Διαιρετότητα

10. Τι ονομάζεται Ευκλείδεια διαίρεση. Ποιος είναι ο διαιρετέος, ποιος ο διαιρέτης; τι ονομάζεται πηλίκο και τι υπόλοιπο της διαίρεσης;

Απάντηση

Όταν δοθούν δύο φυσικοί αριθμοί Δ και δ , τότε υπάρχουν δύο άλλοι φυσικοί αριθμοί

π και υ , έτσι ώστε να ισχύει: $\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon$

Ο αριθμός Δ λέγεται διαιρετέος, ο δ λέγεται διαιρέτης, ο αριθμός π ονομάζεται πηλίκο και το υ υπόλοιπο της διαίρεσης.

Το υπόλοιπο είναι αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος του μηδενός και πάντα μικρότερος του διαιρέτη: $\upsilon < \delta$

Η διαίρεση της παραπάνω μορφής λέγεται Ευκλείδεια Διαίρεση.

Αν το υπόλοιπο υ είναι 0, τότε λέμε ότι έχουμε μία Τέλεια Διαίρεση: $\Delta = \delta \cdot \pi$

Βασικές ασκήσεις

9. Να εξετάσεις ποιες από τις παρακάτω ισότητες παριστάνουν Ευκλείδειες διαιρέσεις:
(α) $125=35 \cdot 3+20$, (β) $762=38 \cdot 19 + 40$, (γ) $1500=42 \cdot 35+30$, (δ) $300=18 \cdot 16+12$
10. Αν ο n είναι φυσικός αριθμός, ποια μπορεί να είναι τα υπόλοιπα της διαίρεσης $n:8$;
11. Αν ένας αριθμός διαιρεθεί δια 9 δίνει πηλίκο 73 και υπόλοιπο 4. Ποιος είναι ο αριθμός;
12. Αν σήμερα είναι Τρίτη, τι μέρα θα είναι μετά από 247 ημέρες;

A.1.5. Χαρακτήρες διαιρετότητας - ΜΚΔ - ΕΚΠ - Ανάλυση αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων

11. Ποιοι αριθμοί λέγονται πολλαπλάσια ενός φυσικού αριθμού a ; Τι ονομάζεται Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ) δύο ή περισσότερων αριθμών;

Απάντηση

Πολλαπλάσια ενός φυσικού αριθμού a είναι οι αριθμοί που προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό του $0, a, 2a, 3a, 4a \dots$ με όλους τους φυσικούς αριθμούς.

- Κάθε φυσικός αριθμός διαιρεί τα πολλαπλάσιά του.
- Κάθε φυσικός που διαιρείται από έναν άλλο είναι πολλαπλάσιό του.
- Αν ένας φυσικός διαιρεί έναν άλλον θα διαιρεί και τα πολλαπλάσιά του.

Το μικρότερο από τα κοινά πολλαπλάσια δύο ή περισσότερων αριθμών που δεν είναι μηδέν το ονομάζουμε Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ) των αριθμών αυτών.

12. Ποιος αριθμός λέγεται πρώτος και ποιος σύνθετος;

Απάντηση

Ενας αριθμός που έχει διαιρέτες μόνο τον εαυτό του και το 1 λέγεται πρώτος αριθμός, διαφορετικά λέγεται σύνθετος.

13. Τι ονομάζουμε Μέγιστο Κοινό Διαιρέτη (ΜΚΔ) δύο ή περισσότερων αριθμών; Πότε δύο αριθμοί α και β λέγονται πρώτοι μεταξύ τους;

Απάντηση

Δύο φυσικοί αριθμοί α και β μπορεί να έχουν κοινούς διαιρέτες. Ο μεγαλύτερος από αυτούς ονομάζεται Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (ΜΚΔ) των α και β και συμβολίζεται $\text{ΜΚΔ}(\alpha, \beta)$.

Δύο αριθμοί α και β λέγονται πρώτοι μεταξύ τους αν είναι $\text{ΜΚΔ}(\alpha, \beta) = 1$.

14. Τι ονομάζουμε κριτήρια διαιρετότητας με το 2, 3, 4, 5, 9, 10 ή 25; Πότε ένας αριθμός διαιρείται με το 10, πότε με το 2, πότε με το 5, πότε με το 3 ή το 9 και πότε συγχρόνως με το 4 και το 25;

Απάντηση

Κριτήρια Διαιρετότητας με 2, 3, 4, 5, 9, 10 ή 25 λέγονται οι κανόνες με τους οποίους μπορούμε να συμπεραίνουμε, χωρίς να κάνουμε τη διαίρεση, αν ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με τους αριθμούς αυτούς.

Ενας φυσικός αριθμός διαιρείται με 10 αν λήγει σε ένα μηδενικό.

Ενας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 2, αν το τελευταίο ψηφίο είναι 0, 2, 4, 6, 8.

Ενας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 5, αν λήγει σε 0 ή 5.

Ενας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 3 ή το 9, αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 3 ή το 9 αντίστοιχα.

Ενας φυσικός αριθμός διαιρείται συγχρόνως με το 4 ή και το 25, αν τα δύο τελευταία ψηφία του είναι μηδέν.

Βασικές ασκήσεις

13. Το διπλάσιο ενός πρώτου αριθμού είναι πρώτος αριθμός ή σύνθετος και γιατί;

14. Να βρεις όλους τους διαιρέτες των παρακάτω αριθμών χρησιμοποιώντας τα κριτήρια διαιρετότητας: (α) 28, (β) 82, (γ) 95, (δ) 105, (ε) 124, (στ) 345, (ζ) 1.232, (η) 3.999.

15. Να αναλυθούν οι ακόλουθοι αριθμοί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων:

(α) 78, (β) 348, (γ) 1.210, (δ) 2.344

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο – Τα κλάσματα

A.2.1. Η έννοια του κλάσματος

15. Σε ένα σύνολο ομοειδών αντικειμένων τι ονομάζουμε νιοστό; πως συμβολίζεται; Τι ονομάζουμε κάπα νιοστά;

Απάντηση

Όταν ένα μέγεθος ή ένα σύνολο ομοειδών αντικειμένων χωρισθεί σε v ίσα μέρη, το κάθε ένα από αυτά ονομάζεται νιοστό και συμβολίζεται με το $\frac{1}{v}$.

Κάθε τμήμα του μεγέθους ή του συνόλου αντικειμένων, που αποτελείται από k τέτοια ίσα μέρη, συμβολίζεται με το κλάσμα $\frac{k}{v}$ και διαβάζεται «κάπα νιοστά».

Βασικές ασκήσεις

16. Ένα κατάστημα κάνει έκπτωση στα είδη του ίση με τα $\frac{2}{5}$ της αρχικής τιμής τους.

Ένα φόρεμα κόστιζε 90 € πριν την έκπτωση. Υπολόγισε πόσα ευρώ έκπτωση έγινε στο φόρεμα και πόσο θα πληρώσουμε για να το αγοράσουμε.

17. Σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο η μια πλευρά του είναι 33 εκατοστά και η άλλη τα $\frac{3}{11}$ της πρώτης. Να βρεις την περίμετρο του ορθογωνίου.

A.2.2. Ισοδύναμα κλάσματα

16. Πότε δύο κλάσματα λέγονται ισοδύναμα και ποια είναι η βασική τους ιδιότητα;

Απάντηση

Δύο κλάσματα $\frac{a}{\beta}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$ λέγονται ισοδύναμα όταν εκφράζουν το ίδιο τμήμα ενός μεγέθους ή ίσων μεγεθών. Επειδή ακριβώς εκφράζουν το ίδιο τμήμα ενός μεγέθους είναι ίσα και γράφουμε: $\frac{a}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$

Αν δύο κλάσματα $\frac{a}{\beta}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$ είναι ισοδύναμα τότε τα «χιαστί γινόμενα» $a \cdot \delta$ και $\beta \cdot \gamma$ είναι ίσα.

17. Πως μπορούμε να κατασκευάσουμε ισοδύναμα κλάσματα; Ποια διαδικασία ονομάζουμε απλοποίηση ενός κλάσματος; Πότε ένα κλάσμα λέγεται ανάγωγος; Ποια κλάσματα λέγονται ομώνυμα και ποια ετερόνυμα;

Απάντηση

Για να κατασκευάσουμε ισοδύναμα κλάσματα ή για να διαπιστώσουμε ότι δύο κλάσματα είναι ισοδύναμα, μπορούμε να εφαρμόζουμε τους παρακάτω κανόνες:
- Όταν πολλαπλασιαστούν οι όροι ενός κλάσματος με τον ίδιο φυσικό αριθμό ($\neq 0$)

- προκύπτει κλάσμα ισοδύναμο.
- Όταν οι όροι ενός κλάσματος διαιρεθούν με τον ίδιο φυσικό αριθμό ($\neq 0$) προκύπτει κλάσμα ισοδύναμο.
- Η διαδικασία αυτή λέγεται απλοποίηση του κλάσματος και έχει ως αποτέλεσμα ένα κλάσμα ισοδύναμο με το αρχικό με μικρότερους όρους.
- Το κλάσμα εκείνο που δεν μπορεί να απλοποιηθεί (δεν υπάρχει κοινός διαιρέτης αριθμητή και παρονομαστή) λέγεται ανάγωγο.
- Όταν δύο ή περισσότερα κλάσματα έχουν τον ίδιο παρονομαστή λέγονται ομώνυμα και όταν έχουν διαφορετικούς παρονομαστές ονομάζονται ετερόνυμα.

Βασικές ασκήσεις

18. Να μετατρέψεις το κλάσμα $\frac{2}{3}$ σε ισοδύναμο κλάσμα με παρονομαστή:
- α) 6 β) 15
19. Να συμπληρώσεις τα κενά, ώστε να προκύψουν ισοδύναμα κλάσματα.
- α) $\frac{2}{3} = \frac{22}{\dots}$ β) $\frac{\dots}{5} = \frac{9}{15}$ δ) $\frac{48}{36} = \frac{\dots}{24}$

A.2.3. Σύγκριση κλασμάτων

18. Πως συγκρίνουμε ομώνυμα και πως ετερόνυμα κλάσματα; Από δύο κλάσματα με τον ίδιο αριθμητή ποιο είναι μεγαλύτερο;

Απάντηση

Από δύο ομώνυμα κλάσματα, εκείνο που έχει τον μεγαλύτερο αριθμητή είναι μεγαλύτερο.

Για να συγκρίνουμε ετερόνυμα κλάσματα τα μετατρέπουμε σε ομώνυμα και συγκρίνουμε τους αριθμητές τους.

Για να συγκρίνουμε ετερόνυμα κλάσματα τα μετατρέπουμε σε ομώνυμα και συγκρίνουμε τους αριθμητές τους.

Από δύο κλάσματα με τον ίδιο αριθμητή μεγαλύτερο είναι εκείνο με τον μικρότερο παρονομαστή.

Βασικές ασκήσεις

20. Βρες μεταξύ ποιων διαδοχικών φυσικών αριθμών βρίσκεται καθένα από τα παρακάτω κλάσματα:
- α) $\frac{5}{3}$ β) $\frac{7}{2}$ γ) $\frac{8}{9}$ δ) $\frac{63}{5}$ ε) $\frac{125}{10}$

A.2.4. Πρόσθεση και Αφαίρεση κλασμάτων

19. Πως προσθέτουμε δύο ομώνυμα κλάσματα και πως δύο ετερόνυμα;

Απάντηση

Προσθέτουμε δύο ή περισσότερα ομώνυμα κλάσματα προσθέτοντας τους αριθμητές τους.

Προσθέτουμε ετερόνυμα κλάσματα αφού πρώτα τα μετατρέψουμε σε ομώνυμα.

20. Πως αφαιρούμε δύο ομώνυμα κλάσματα και πως δύο ετερόνυμα;

Απάντηση

Αφαιρούμε δύο ομώνυμα κλάσματα αφαιρώντας τους αριθμητές τους.
Αφαιρούμε δύο ετερόνυμα κλάσματα αφού τα μετατρέψουμε πρώτα σε ομώνυμα.

21. Ποιος αριθμός ονομάζεται μεικτός;

Απάντηση

Μεικτός λέγεται ο αριθμός που παριστάνει το άθροισμα ενός ακεραίου με ένα κλάσμα μικρότερο της μονάδας.

Βασικές ασκήσεις

21. Τρία αδέρφια μοίρασαν 20.000 €. Ο πρώτος πήρε τα $\frac{2}{5}$ του ποσού, ο δεύτερος $\frac{1}{8}$ λιγότερα από τον πρώτο και ο τρίτος τα υπόλοιπα. Ποιο μέρος του ποσού πήρε ο καθένας και πόσα χρήματα είναι το μέρος του ποσού για κάθε αδελφό;
22. Ποιο κλάσμα πρέπει να προσθέσουμε στο $\frac{3}{8}$ για να βρούμε άθροισμα $\frac{5}{9}$;
23. Ένας αγρότης πούλησε σε τέσσερις εμπόρους τα $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{1}{3}$ και $\frac{1}{10}$ της παραγωγής του. Ποιο μέρος της παραγωγής του έμεινε απούλητο;

A.2.5. Πολλαπλασιασμός κλασμάτων

22. Πως πολλαπλασιάζουμε δύο κλάσματα; Πως πολλαπλασιάζουμε ένα φυσικό αριθμό με ένα κλάσμα;

Απάντηση

Το γινόμενο δύο κλασμάτων είναι το κλάσμα που έχει αριθμητή το γινόμενο

$$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta \cdot \delta}$$

των αριθμητών και παρονομαστή το γινόμενο των παρονομαστών.

Το γινόμενο ενός φυσικού αριθμού επί ένα κλάσμα είναι το κλάσμα με αριθμητή το γινόμενο του αριθμητή επί τον φυσικό αριθμό και με τον

$$\lambda \cdot \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\lambda \cdot \alpha}{\beta}$$

ίδιο παρονομαστή.

23. Πότε δύο κλάσματα λέγονται αντίστροφα;

Απάντηση

Τα κλάσματα που έχουν γινόμενο 1 λέγονται αντίστροφα.

Επειδή $\frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} = 1$ τα κλάσματα $\frac{\gamma}{\delta}$ και $\frac{\delta}{\gamma}$ είναι αντίστροφα.

Βασικές ασκήσεις

24. Ο Κώστας ήπια τα $\frac{2}{3}$ από ένα μπουκάλι, που περιείχε αναψυκτικό όγκου $1\frac{1}{2}$ του λίτρου. Πόσα λίτρα αναψυκτικού ήπια;

25. Υπολόγισε τα εξαγόμενα των πράξεων:

α) $\frac{6}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4}$ β) $\left(\frac{6}{5} + \frac{3}{5}\right) \cdot \frac{1}{4}$ γ) $\left(\frac{6}{5} - \frac{3}{5}\right) \cdot \frac{1}{4}$

A.2.6. Διαίρεση κλασμάτων

24. Πως διαιρούμε δύο φυσικούς αριθμούς και πως δύο κλάσματα; Ποιο κλάσμα λέγεται σύνθετο;

Απάντηση

Για να διαιρέσουμε δύο φυσικούς αριθμούς αρκεί να

πολλαπλασιάσουμε τον διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη. $a : b = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$

Για να διαιρέσουμε δύο κλάσματα αρκεί να πολλαπλασιάσουμε

τον διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη. $\frac{a}{b} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{a}{b} \cdot \frac{\delta}{\gamma} = \frac{a \cdot \delta}{b \cdot \gamma}$

Ενα κλάσμα, του οποίου ένας τουλάχιστον όρος του είναι κλάσμα,

ονομάζεται σύνθετο κλάσμα. $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{a \cdot \delta}{b \cdot \gamma}$

Βασικές ασκήσεις

26. Να βρεις τους αντίστροφους των αριθμών: α) $\frac{4}{7}$ β) 72 γ) $\frac{1}{3}$ δ) 1

27. Ο Κώστας ήπια τα $\frac{2}{3}$ από ένα μπουκάλι, που περιείχε αναψυκτικό όγκου $1\frac{1}{2}$ του λίτρου. Πόσα λίτρα αναψυκτικού ήπια;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο – Δεκαδικοί αριθμοί

25. Ποιο κλάσμα ονομάζουμε δεκαδικό;

Απάντηση

Δεκαδικό λέγεται το κλάσμα που έχει παρονομαστή μια δύναμη του 10.

26. Πως στρογγυλοποιούμε έναν δεκαδικό;

Για να στρογγυλοποιήσουμε ένα δεκαδικό αριθμό:

- Προσδιορίζουμε τη δεκαδική τάξη στην οποία θα γίνει η στρογγυλοποίηση.
- Εξετάζουμε το ψηφίο της αμέσως μικρότερης τάξης.
- Αν αυτό είναι μικρότερο του 5, το ψηφίο αυτό και όλα τα ψηφία των μικρότερων τάξεων μηδενίζονται.
- Αν είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 5, το ψηφίο αυτό και όλα τα ψηφία των μικρότερων τάξεων μηδενίζονται και το ψηφίο της τάξης στρογγυλοποίησης αυξάνεται κατά 1.

Βασικές ασκήσεις

28. Γράψε καθένα από τα παρακάτω κλάσματα, ως δεκαδικό αριθμό: (i) με προσέγγιση εκατοστού και (ii) με προσέγγιση χιλιοστού:

α) $\frac{7}{16}$ β) $\frac{21}{17}$ γ) $\frac{20}{95}$

29. Γράψε ως δεκαδικό αριθμό, καθένα από τα παρακάτω δεκαδικά κλάσματα:

α) $\frac{58}{10}$ β) $\frac{3}{100}$ γ) $\frac{1024}{1000}$

30. Να στρογγυλοποιήσεις τους παρακάτω δεκαδικούς αριθμούς στο δέκατο, εκατοστό

και χιλιοστό: (α) 9876,008, (β) 67,8956, (γ) 0,001, (δ) 8,239, (ε) 23,7048.

31. Στον αριθμό 34, λείπουν τα τρία δεκαδικά ψηφία του. Να συμπληρώσεις τον αριθμό με τα ψηφία 9, 5 και 2, έτσι ώστε κάθε ψηφίο να γράφεται μία μόνο φορά. Να γράψεις όλους τους δεκαδικούς που μπορείς να βρεις και να τους διατάξεις σε φθίνουσα σειρά.

A.3.2. Πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς - Δυνάμεις με βάση δεκαδικό αριθμό

27. Πως προσθέτουμε ή αφαιρούμε δεκαδικούς αριθμούς;

Απάντηση

Η Πρόσθεση και η Αφαίρεση δεκαδικών αριθμών γίνεται, όπως και στους φυσικούς αριθμούς.

Προσθέτουμε ή αφαιρούμε τα ψηφία της ίδιας τάξης, τοποθετώντας τους αριθμούς τον ένα κάτω από τον άλλο έτσι, ώστε οι υποδιαστολές να γράφονται στην ίδια στήλη.

28. Πως πολλαπλασιάζουμε δεκαδικούς αριθμούς;

Απάντηση

Ο Πολλαπλασιασμός δεκαδικών αριθμών γίνεται, όπως και των φυσικών αριθμών. Τοποθετούμε στο αποτέλεσμα της πράξης την υποδιαστολή τόσες θέσεις από τα δεξιά προς τα αριστερά, όσα είναι συνολικά τα ψηφία στα δεκαδικά μέρη και των δύο παραγόντων.

29. Πως γίνεται η διαίρεση δεκαδικού αριθμού με δεκαδικό αριθμό;

Απάντηση

Η Διαίρεση δεκαδικού αριθμού με δεκαδικό αριθμό γίνεται, όπως και η ευκλείδεια διαίρεση. Πολλαπλασιάζουμε το διαιρέτη και το διαιρετέο με την κατάλληλη δύναμη του 10 έτσι, ώστε ο διαιρέτης να γίνει φυσικός αριθμός. Όταν εξαντληθεί το ακέραιο μέρος του διαιρετέου, "κατεβάζουμε" το μηδέν, ως πρώτο δεκαδικό ψηφίο από τον διαιρετέο και τοποθετούμε στο πηλίκο υποδιαστολή.

30. Πως πολλαπλασιάζουμε έναν δεκαδικό αριθμό με 0,1 , 0,01 , 0,001,...ή τον διαιρούμε με 10, 100, 1000...;

Απάντηση

Όταν πολλαπλασιάζουμε με 0,1, 0,01, 0,001... ή όταν διαιρούμε ένα δεκαδικό αριθμό με 10, 100, 1000, ... μεταφέρουμε την υποδιαστολή προς τα αριστερά μια, δυο, τρεις, ... αντίστοιχα θέσεις.

31. Πως πολλαπλασιάζουμε έναν δεκαδικό αριθμό με 10, 100, 1000...

Απάντηση

Όταν πολλαπλασιάζουμε ένα δεκαδικό αριθμό με 10, 100, 1000... μεταφέρουμε την υποδιαστολή του αριθμού προς τα δεξιά μία, δύο, τρεις, ... θέσεις αντίστοιχα.

Βασικές ασκήσεις

32. Να κάνεις τις πράξεις: (α) $520 \cdot 0,1 + 0,32 \cdot 100$ (β) $4,91 \cdot 0,01 + 0,819 \cdot 10$
33. Να κάνεις τις πράξεις: (α) $4,7 : 0,1 - 45 : 10$ (β) $0,98 : 0,0001 + 6785 : 1000$
34. Η περίμετρος ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι 48,52. Αν η βάση του είναι 10,7, πόσο είναι η κάθε μία από τις ίσες πλευρές του;
35. Να υπολογίσεις τις τιμές των αριθμητικών παραστάσεων:
(α) $24 \cdot 5 - 2 + 3 \cdot 5$ (β) $3 \cdot 11 - 2 + 54,1 : 2$.
36. Να υπολογίσεις τις δυνάμεις:
(α) $3,1^2$ (β) $7,012^2$ (γ) $4,5^2$ (δ) $0,5^2$ (ε) $0,2^2$ (στ) $0,3^3$

A.3.4. Τυποποιημένη μορφή μεγάλων αριθμών

32. Ποια είναι η τυποποιημένη μορφή ενός μεγάλου αριθμού;

Απάντηση

Ενας μεγάλος αριθμός μπορεί να γραφεί στη μορφή $a \cdot 10^n$, δηλαδή ως γινόμενο ενός αριθμού a επί μια δύναμη του 10. Τη μορφή αυτή την ονομάζουμε τυποποιημένη. Ο αριθμός a είναι ένας δεκαδικός αριθμός με ακέραιο ψηφίο μεγαλύτερο ή ίσο του 1 και μικρότερο του 10.

Βασικές ασκήσεις

37. Να γράψεις τους παρακάτω αριθμούς στην τυποποιημένη μορφή:

(α) 583.000 (β) 4.300.000 (γ) 7.960.000 (δ) 3.420.000.000 (ε) 4.800
(στ) 7.310 (ζ) 281.900 (η) 518.000.000 (θ) 131.000 (ι) 675.000.

38. Να γράψεις τη δεκαδική μορφή των αριθμών:

(α) $3,1 \cdot 10^6$ (β) $4,820 \cdot 10^5$ (γ) $3,25 \cdot 10^4$ (δ) $7,4 \cdot 10^3$

A.3.5. Μονάδες μέτρησης

33. Ποια είναι η βασική μονάδα μήκους; Ποιες είναι οι υποδιαιρέσεις, ποια τα πολλαπλάσιά της και με ποιες σχέσεις συνδέονται;

Απάντηση

Βασική μονάδα μήκους είναι το μέτρο (συμβολίζεται με m). Υποδιαιρέσεις του μέτρου:

- 1 δεκατόμετρο ή παλάμη (dm)

$$1dm = \frac{1}{10}m = 0,1m$$

- 1 εκατοστόμετρο ή πόντος (cm)

$$1cm = \frac{1}{100}m = 0,01m$$

- 1 χιλιοστόμετρο ή χιλιοστό (mm)

$$1mm = \frac{1}{1000}m = 0,001m$$

Βασικό πολλαπλάσιο του μέτρου είναι το χιλιόμετρο (km).

$$1km = 1000m$$

Στη ναυσιπλοΐα, ως μονάδα μέτρησης μήκους χρησιμοποιούμε το ναυτικό μίλι.

$$1 \text{ ναυτικό μίλι} = 1.852m$$

34. Ποια είναι η βασική μονάδα μέτρησης εμβαδού; Ποιες είναι οι υποδιαιρέσεις της; Ποια μονάδα επιφάνειας χρησιμοποιούμε στην Ελλάδα;

Απάντηση

Η βασική μονάδα μέτρησης εμβαδού είναι το τετραγωνικό μέτρο (συμβολίζεται με m^2) που είναι η επιφάνεια ενός τετραγώνου με πλευρά ένα μέτρο.

Υποδιαιρέσεις του τετραγωνικού μέτρου:

- 1 τετραγωνικό δεκατόμετρο (dm^2)

$$1dm^2 = \frac{1}{100}m^2 = 0,01m^2$$

- 1 τετραγωνικό εκατοστόμετρο (cm^2)

$$1cm^2 = \frac{1}{10000}m^2 = 0,0001m^2$$

- 1 τετραγωνικό χιλιοστόμετρο (mm^2)

$$1mm^2 = \frac{1}{1.000.000}m^2 = 0,000001m^2$$

Στην Ελλάδα ως μονάδα επιφανείας χρησιμοποιούμε το στρέμμα.

$$1 \text{ στρέμμα} = 1000m^2$$

35. Ποια είναι η βασική μονάδα μέτρησης όγκου; Ποιες είναι οι υποδιαιρέσεις της; Ποια άλλη μονάδα όγκου χρησιμοποιούμε και ποια είναι η βασική υποδιαιρέσή της;

Απάντηση

Η βασική μονάδα μέτρησης όγκου είναι το κυβικό μέτρο (συμβολίζεται με m^3) που είναι ο όγκος ενός κύβου ακμής ενός μέτρου.

Υποδιαιρέσεις του κυβικού μέτρου:

-1 κυβικό δεκατόμετρο (dm^3) $1dm^3 = \frac{1}{1.000} m^3 = 0,001m^3$

-1 κυβικό εκατοστόμετρο (cm^3) $1cm^3 = \frac{1}{1.000.000} m^3 = 0,000001m^3$

-1 κυβικό χιλιοστόμετρο (mm^3) $1mm^3 = \frac{1}{1.000.000.000} m^3 = 0,000000001m^3$

Για τη μέτρηση του όγκου χρησιμοποιούμε και το dm^3 που ονομάζεται και λίτρο (lt).

$$1lt = 1dm^3 = 0,001m^3$$

Το cm^3 λέγεται χιλιοστόλιτρο (ml)

$$1ml = 0,001lt = 1cm^3 = 0,000001m^3$$

36. Ποια είναι η βασική μονάδα μέτρησης χρόνου και ποια είναι τα πολλαπλάσιά της;

Απάντηση

Η μονάδα μέτρησης του χρόνου είναι το δευτερόλεπτο (συμβολίζεται με s)

Πολλαπλάσια:

- 1 λεπτό (min) $1min = 60 s$

- 1 ώρα (h) $1 h = 60 min = 3.600 s$

- 1 ημέρα $1 \text{ ημέρα} = 24 h = 1.440 min = 86.400 s$

37. Ποια είναι η βασική μονάδα μέτρησης μάζας; Ποιες είναι οι υποδιαιρέσεις, ποια τα πολλαπλάσιά της και με ποιες σχέσεις συνδέονται;

Απάντηση

Η βασική μονάδα μέτρησης μάζας είναι το χιλιόγραμμο ή κιλό (συμβολίζεται με Kg)

Υποδιαιρέσεις του κιλού:

- 1 γραμμάριο (g) $1 g = 0,001 Kg$

- 1 χιλιοστόγραμμο (mg) $1mg = 0,001g = 0,000001 Kg$

Πολλαπλάσια του κιλού: $1 t = 1000Kg$

Βασικές ασκήσεις

39. Ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει ακμές μήκους $a = 3,1 m$, $\beta = 4,2 m$ και $\gamma = 2,3m$. Να υπολογίσεις το μήκος των ακμών του σε mm και να το γράψεις σε τυποποιημένη μορφή.

40. Γράψε τα παρακάτω μήκη σε αύξουσα σειρά: 986 m, 0,023 Km, 456 cm, 678 dm.

41. Συμπλήρωσε τα κενά: (α) $56 Km^2 = \dots\dots\dots m^2$
(β) 0,987 στρέμματα = $\dots\dots\dots m^2$, (γ) 350 στρέμματα = $\dots\dots\dots m^2$.

42. Ένας οινοπαραγωγός έχει αποθηκεύσει το κρασί του σε 3 ίσες δεξαμενές, σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου, με διαστάσεις 3 m, 2 m και 5 m. Αν

πουλήσει το κρασί του προς 4 € το λίτρο, πόσα χρήματα θα εισπράξει;

43. Συμπλήρωσε τα κενά: (α) 4h 52min = min
(β) 3h 12min = min = s (γ) 5h 20min 30s = min = s
44. Σε μια πολυκατοικία θέλουν να κατασκευάσουν μια δεξαμενή που να χωράει 3 t πετρέλαιο και να έχει μήκος 2,5 m και πλάτος 1 m. Αν γνωρίζεις ότι ο 1 t πετρελαίου έχει όγκο 1200 lt, υπολόγισε το ύψος της δεξαμενής και πόσα lt πετρελαίου αντιστοιχούν σε κάθε cm ύψους;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο – Εξισώσεις και προβλήματα

A.4.1. Η έννοια της εξίσωσης

Οι εξισώσεις: $a + x = \beta$, $x - a = \beta$, $a - x = \beta$, $ax = \beta$,
 $a : x = \beta$ και $x : a = \beta$

38. Τι ονομάζουμε εξίσωση; Τι ονομάζουμε εξίσωση με έναν άγνωστο;
Απάντηση

Εξίσωση ονομάζουμε κάθε ισότητα που περιέχει γράμματα και αριθμούς.
Εξίσωση με έναν άγνωστο ονομάζουμε κάθε ισότητα που περιέχει αριθμούς και ένα γράμμα (άγνωστος)

39. Τι ονομάζουμε λύση μιας εξίσωσης; Τι ονομάζουμε επίλυση της εξίσωσης;
Απάντηση

Λύση ή ρίζα της εξίσωσης είναι ο αριθμός που, όταν αντικαταστήσει τον άγνωστο επαληθεύει την ισότητα.
Η διαδικασία, μέσω της οποίας βρίσκουμε τη λύση της εξίσωσης, λέγεται επίλυση της εξίσωσης.

40. Πότε μια εξίσωση λέγεται ταυτότητα ή αόριστη και πότε αδύνατη;
Απάντηση

Μια εξίσωση λέγεται ταυτότητα ή αόριστη, όταν όλοι οι αριθμοί είναι λύσεις της.
Μια εξίσωση λέγεται αδύνατη, όταν κανένας αριθμός δεν την επαληθεύει.

Βασικές ασκήσεις

45. Διατύπωσε με λόγια τις ακόλουθες μαθηματικές εκφράσεις:

(α) $3 \cdot x + 25$, (β) $\left(\frac{1}{2}\right) \cdot x - 7 = 2$

46. Η πλευρά ενός τετραγώνου είναι a . Πόση είναι η περίμετρος του και πόσο το εμβαδόν του;

47. Γράψε με απλούστερο τρόπο τις μαθηματικές εκφράσεις:

(α) $x + x$, (β) $a + a + a$, (γ) $3 \cdot a + 52 \cdot a$,

(δ) $2 \cdot \beta + \beta + 3 \cdot \alpha + 2 \cdot \alpha$, (ε) $4 \cdot x + 8 \cdot x - 3 \cdot x$

48. Στην εξίσωση $2 + \alpha = x$, το α και το x είναι φυσικοί αριθμοί. Ποια από τις τιμές 0, 3, 1 μπορεί να πάρει το x ;

49. Να εξετάσεις, αν ο αριθμός 12 είναι η λύση της εξίσωσης: $x + 13 = 25$.

50. Ποιος αριθμός επαληθεύει κάθε μία από τις παρακάτω εξισώσεις;

(α) $x + 4,9 = 15,83$ (β) $40,4 + x = 93,19$ (γ) $53,404 - x = 4,19$ (δ) $38 - x = 7,1$

51. Ποια είναι η τιμή του x για να ισχύει: α) $\frac{3}{x} = \frac{12}{20}$ β) $\frac{5}{7} = \frac{15}{x}$ γ) $\frac{49}{5} = x + \frac{4}{5}$

52. Βρες τη τιμή του φυσικού αριθμού x : α) $\frac{x+3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{7}{4}$ β) $\frac{3}{5} + \frac{x+2}{10} = 1$

53. Ποιον αριθμό πρέπει να προσθέσεις στον 4, για να προκύψει ο αντίστροφος του $\frac{5}{21}$;

A.4.2. Επίλυση προβλημάτων

41. Τι ονομάζουμε πρόβλημα, τι λύση και τι επίλυση του προβλήματος;

Απάντηση

Πρόβλημα ονομάζουμε την κατάσταση, που δημιουργείται, όταν αντιμετωπίζουμε εμπόδια και δυσκολίες στην προσπάθειά μας να φτάσουμε σε ένα συγκεκριμένο στόχο.

Λύση ενός προβλήματος είναι η επίτευξη του στόχου.

Επίλυση ενός προβλήματος ονομάζεται η διαδικασία, με την οποία επιτυγχάνεται η λύση του.

A.4.3. Παραδείγματα επίλυσης προβλημάτων

Βασικές ασκήσεις

54. Να βρεις τρεις διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς που έχουν άθροισμα 1533.

55. Σε ένα διαγώνισμα, κάθε μαθητής πρέπει να απαντήσει σε 100 ερωτήσεις. Θα πάρει 3 μονάδες, για κάθε σωστή απάντηση και μόνο 1 μονάδα, για κάθε λανθασμένη. Ένας μαθητής πήρε συνολικά 220 μονάδες. Σε πόσες ερωτήσεις απάντησε σωστά;

56. Τρία αδέρφια μοιράζονται, εξίσου, μια κληρονομιά, που είναι ένα χωράφι και ένα διαμέρισμα. Ο πρώτος παίρνει το χωράφι. Ο δεύτερος παίρνει το διαμέρισμα, αλλά δίνει στον πρώτο 600 € και στον τρίτο 15.000 €. Ποια ήταν η αξία του χωραφιού και ποια του διαμερίσματος;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο – Ποσοστά

A.5.1. Ποσοστά

42. Πως ονομάζεται το σύμβολο α% και πως το α%; Τι εκφράζει το α% του β;

Απάντηση

Το σύμβολο α% ονομάζεται ποσοστό επί τοις εκατό ή απλούστερα ποσοστό και είναι ίσο με το $\frac{\alpha}{100}$.

Χρησιμοποιούμε ακόμη το ποσοστό α % που διαβάζεται ποσοστό επί τοις χιλίοις και είναι ίσο με το $\frac{\alpha}{1000}$.

Το ποσοστό α% του β είναι $\frac{\alpha}{100} \cdot \beta$.

Βασικές ασκήσεις

57. Να μετατρέψεις σε ποσοστά επί τοις εκατό, τους δεκαδικούς αριθμούς:
(α) 0,52 (β) 3,41 (γ) 0,19 (δ) 0,03 (ε) 0,07.
58. Υπολόγισε: (α) το 10% των 3000€, (β) το 45% της 1 ώρας, (γ) το 20% του λίτρου, (δ) το 50 % των 500 γραμμαρίων, (ε) το 25% του 1 κιλού.
59. Βρες τι ποσοστό είναι: (α) τα 50 € για τα 1.000 € (β) οι 30 ημέρες για 1 έτος (γ) τα 50 στρέμματα για τα 2.500 στρέμματα (δ) οι 3 παλάμες για τα 10 μέτρα.
60. Ένα μπουκάλι με οινόπνευμα παρέμεινε ανοικτό και εξατμίσθηκε το 22% του όγκου του. Το μπουκάλι περιείχε αρχικά 0,610 lt. Πόσα lt οινόπνευματος εξατμίσθηκαν;

A.5.2. Προβλήματα με ποσοστά

Βασικές ασκήσεις

61. Κεφάλαιο 80.000 € κατατέθηκε, σε λογαριασμό ταμειευτηρίου, με επιτόκιο 4,5% το χρόνο. (α) Ποιος θα είναι ο τόκος στο τέλος του πρώτου έτους; (β) Ποιος θα είναι ο τόκος στο τέλος του δεύτερου έτους, αν ο τόκος του πρώτου έτους κεφαλαιοποιηθεί;
62. Ένα καινούριο αυτοκίνητο κόστιζε 20.000 €. Το αγόρασε κάποιος και μετά από 1 χρόνο ήθελε να το πουλήσει, κατά 30% λιγότερο, από όσο το αγόρασε. Ο υποψήφιος αγοραστής έμαθε, ότι το ίδιο ακριβώς μοντέλο, καινούριο, κόστιζε 25.000 €. (α) Σε ποια τιμή θα αγόραζε το μεταχειρισμένο αυτοκίνητο; (β) Τι ποσοστό της τιμής του καινούριου αυτοκινήτου είναι η τιμή του μεταχειρισμένου; (γ) Αν ένα μαγαζί που πουλάει μεταχειρισμένα αυτοκίνητα δίνει το ίδιο μοντέλο σε τιμή 40% φτηνότερα από την τρέχουσα τιμή του καινούριου, από ποιον συμφέρει να αγοράσει το μεταχειρισμένο αυτοκίνητο ο υποψήφιος αγοραστής;
63. Ένας έμπορος αγόρασε διάφορα εμπορεύματα συνολικής αξίας 30.000 €.

Πλήρωσε τοις μετρητοίς το 40% και τα υπόλοιπα με συναλλαγματικές, σε 4 μηνιαίες δόσεις με τόκο 1% τον μήνα. Να υπολογίσεις: (α) Το συνολικό ποσό της επιβάρυνσης από τους τόκους που θα πληρώσει. (β) Το ποσοστό της επιβάρυνσης αυτής, επί της αρχικής αξίας των εμπορευμάτων.

64. Ένας τεχνικός είχε έσοδα σε ένα τρίμηνο 8.330 €. Πόσο ΦΠΑ (19%) πρέπει να αποδώσει στην εφορία;
65. Ένα ψυγείο κοστίζει, τοις μετρητοίς, 1.200 € χωρίς το ΦΠΑ 19%. Κάποιος το αγόρασε με 50% προκαταβολή και το υπόλοιπο, σε 6 μηνιαίες δόσεις με τόκο 3% το μήνα. (α) Να υπολογίσεις πόσα χρήματα έδωσε, ως προκαταβολή, αν μαζί με αυτήν κατέβαλε και ολόκληρο το ποσό του ΦΠΑ. (β) Ποιο ήταν το ποσό της κάθε δόσης; (γ) Πόσο του στοίχισε συνολικά το ψυγείο;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6ο – *Ανάλογα ποσά – Αντιστρόφως ανάλογα ποσά*

A.6.1. Παράσταση σημείων στο επίπεδο

43. Πώς μπορούμε να προσδιορίσουμε τη θέση ενός σημείου στο επίπεδο; Τι είναι ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων; Τι είναι η τετμημένη και η τεταγμένη ενός σημείου;

Απάντηση

Προκειμένου να προσδιορίσουμε τη θέση ενός σημείου στο επίπεδο: Σχεδιάζουμε δύο κάθετες μεταξύ τους ημιευθείες Ox και Oy . Πάνω σε κάθε μια απ' αυτές ορίζουμε την ίδια μονάδα μέτρησης. Αυτές οι ημιευθείες αποτελούν ένα σύστημα ημιάξονων. Ο ημιάξονας Ox λέγεται ημιάξονας των τετμημένων ή ημιάξονας των x . Ο ημιάξονας Oy λέγεται ημιάξονας των τεταγμένων ή ημιάξονας των y . Το σημείο O ονομάζεται αρχή των ημιάξονων.

44. Πως καθορίζουμε τη θέση ενός σημείου A στο επίπεδο;

Απάντηση

Ένα σημείο πάνω στο καρτεσιανό επίπεδο προσδιορίζεται μοναδικά από ένα ζεύγος αριθμών, την τετμημένη και την τεταγμένη. Η τετμημένη είναι η απόσταση του σημείου από τον άξονα y και η τεταγμένη είναι η απόσταση του σημείου από τον άξονα x . Η τετμημένη και η τεταγμένη αποτελούν τις συντεταγμένες του σημείου. Με αυτή τη βάση, η αρχή των αξόνων ταυτίζεται με το σημείο $(0,0)$

Βασικές ασκήσεις

66. Να σχεδιάσεις ένα ορθοκανονικό σύστημα ημιάξονων, με μονάδα το 1 cm και να τοποθετήσεις τα σημεία $A(2,3)$, $B(3,2)$, $\Gamma(4,5)$, $\Delta(5,5)$, $E(1,4)$, $Z(7,3)$, $H(7,2)$, $\Theta(6,2)$, $1(6,0)$, $K(0,5)$. Τι παρατηρείς για τα σημεία I και K ; Πού βρίσκονται αυτά; Μπορείς να γενικεύσεις τις παρατηρήσεις σου για τα σημεία που έχουν τετμημένη ή τεταγμένη το μηδέν;
67. Σε ορθοκανονικό σύστημα ημιάξονων να τοποθετήσεις τα σημεία $A(2,1)$, $B(1,2)$, $\Gamma(2,3)$ και $\Delta(3,2)$. Τι σχήμα είναι το $AB\Gamma A$; Αν τα ευθύγραμμα τμήματα $A\Gamma$ και $B\Delta$ τέμνονται στο σημείο K , ποιες είναι οι συντεταγμένες του;

A.6.2. Λόγος δύο αριθμών – Αναλογία

45. Τι ονομάζουμε λόγο δύο ομοειδών μεγεθών και τι αναλογία;

Απάντηση

Λόγος δύο ομοειδών μεγεθών, που εκφράζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης, είναι το πηλίκο των μέτρων τους.
Η ιδιότητα λόγων ονομάζεται αναλογία.

46. Πότε δύο σχήματα λέγονται όμοια;

Απάντηση

Δύο σχήματα λέγονται όμοια όταν το ένα αποτελεί σμίκρυνση ή μεγέθυνση του άλλου.

47. Τι ονομάζεται κλίμακα;

Απάντηση

Ο λόγος της απόστασης δύο σημείων μιας εικόνας ενός αντικειμένου προς την πραγματική απόσταση των δύο αντίστοιχων σημείων του αντικειμένου, ονομάζεται κλίμακα.

Βασικές ασκήσεις

68. Ένας προβολέας διαφανειών προβάλλει το κείμενο μιας διαφάνειας στον απέναντι τοίχο. Αν ένα "Α" έχει ύψος 7 mm στη διαφάνεια και 4,2 cm στον τοίχο, ποια είναι η μεγέθυνση που δίνει ο προβολέας;

69. Να συμπληρώσεις τον πίνακα:

<i>Κλίμακα</i>	1 : 5	3 : 8	1 : 30		1 : 100
<i>Μήκος σε σχέδιο</i>	4 cm		12 cm	2 cm	3,5 cm
<i>Πραγματικό μήκος</i>		24 cm		10 cm	

A.6.3. Ανάλογα ποσά - Ιδιότητες ανάλογων ποσών

48. Πότε δύο ποσά λέγονται ανάλογα;

Απάντηση

Δύο ποσά λέγονται ανάλογα, εάν μεταβάλλονται με τέτοιο τρόπο, που όταν οι τιμές του ενός πολλαπλασιάζονται με έναν αριθμό, τότε και οι αντίστοιχες τιμές του άλλου να πολλαπλασιάζονται με τον ίδιο αριθμό.

49. Ποια σχέση συνδέει δύο ανάλογα ποσά x και y και γιατί; Τι λέγεται συντελεστής αναλογίας;

Απάντηση

Δύο ποσά x και y είναι ανάλογα όταν οι αντίστοιχες τιμές τους δίνουν πάντα το ίδιο πηλίκο, δηλαδή $\frac{y}{x} = a$. Το πηλίκο a λέγεται συντελεστής αναλογίας. Τα ανάλογα ποσά x και y συνδέονται με τη σχέση $y = a \cdot x$.

Βασικές ασκήσεις

70. Εξέτασε αν τα ποσά που δίνονται στους παρακάτω πίνακες είναι ανάλογα:

α)

x	3	5	7
y	8	10	12

β)

x	3	4	6	11
y	0,9	1,2	1,8	3,3

71. Μια συνταγή για κέικ αναφέρει: «4 αυγά, 1 πακέτο φαρίνα, του μισού κιλού, 250 gr βουτύρου, 2 φλιτζάνια ζάχαρη, 1 βανίλια, 1 φλιτζάνι γάλα». Βρες πώς θα γίνει η συνταγή αν θέλεις να φτιάξεις μεγαλύτερη δόση και έχεις 7 αυγά;

A.6.4. Γραφική παράσταση σχέσης αναλογίας

50. Τι γνωρίζετε για τη γραφική παράσταση δύο αναλόγων ποσών x και y ;

Απάντηση

Τα σημεία που αντιστοιχούν στα ζεύγη τιμών (x, y) δύο αναλόγων ποσών βρίσκονται πάνω σε μία ημιευθεία με αρχή την αρχή $O(0,0)$ των ημιαξόνων.

Βασικές ασκήσεις

72. Ένας καταστηματάρχης αθλητικών ειδών διαθέτει 12.000 € για να αγοράσει φόρμες γυμναστικής, μαγιό και αθλητικά παπούτσια. Κάθε φόρμα κοστίζει 40 €, κάθε μαγιό 20 € και κάθε ζευγάρι παπούτσια 50 €.

α) Να βρεις τις σχέσεις αναλογίας "χρήματα - κομμάτια από κάθε είδος" και να τις παραστήσεις γραφικά στο ίδιο σύστημα ορθογωνίων αξόνων.

β) Ο καταστηματάρχης αποφάσισε να διαθέσει το ίδιο ποσό, για κάθε είδος. Βρες πόσα κομμάτια από κάθε είδος θα αγοράσει με τα χρήματα που διαθέτει, χρησιμοποιώντας μόνο τη γραφική παράσταση των σχέσεων που δημιούργησες στο πρώτο ερώτημα της άσκησης.

A.6.5. Προβλήματα αναλογιών

Βασικές ασκήσεις

73. Από 100 Kg σταφύλια βγαίνουν 80 Kg μούστος. Ένας αμπελουργός θέλει να γεμίσει με μούστο 6 βαρέλια, των 350 Kg το καθένα. Πόσα Kg σταφύλια, της ίδιας ποιότητας, πρέπει να πατήσει;

74. Δύο εργάτες δούλεψαν σε μια οικοδομή και πήραν μαζί 270 €. Ο πρώτος δούλεψε 4 ημέρες και ο δεύτερος 5 ημέρες. Πόσα χρήματα αντιστοιχούν στον καθένα.

75. Αν ψήσουμε 2,5 Kg ωμό κρέας θα μείνει 1,9 Kg ψημένο κρέας.

- (α) Πόσο είναι το ποσοστό απώλειας που έχουμε;
(β) Πόσο κρέας πρέπει να ψήσουμε για να έχουμε 2,3 Kg ψημένο κρέας;

A.6.6. Αντιστρόφως ανάλογα ποσά

51. Πότε δύο μεγέθη είναι αντιστρόφως ανάλογα ποσά;

Απάντηση

Δύο μεγέθη είναι αντιστρόφως ανάλογα, στην περίπτωση, που η μεταβολή τους είναι τέτοια, ώστε: όταν το ένα μέγεθος πολλαπλασιάζεται επί έναν αριθμό, το άλλο διαιρείται με τον ίδιο αριθμό.

52. Ποια σχέση συνδέει δύο αντιστρόφως ανάλογα ποσά και γιατί;

Απάντηση

Όταν δύο ποσά x και y είναι αντιστρόφως ανάλογα, το γινόμενο των αντίστοιχων τιμών τους παραμένει σταθερό: $y \cdot x = \alpha$, $\alpha \neq 0$

53. Πότε δύο αριθμοί λέγονται αντίστροφοι;

Απάντηση

Δύο αριθμοί λέγονται αντίστροφοι όταν το γινόμενό τους είναι ίσο με 1.

54. Ποια είναι η γραφική παράσταση δύο αντιστρόφως ανάλογων ποσών x και y και τι γνωρίζεται γι αυτήν;

Απάντηση

Τα σημεία που παριστούν τα ζεύγη (x, y) βρίσκονται σε μία καμπύλη γραμμή. Η καμπύλη αυτή ονομάζεται υπερβολή. Η υπερβολή δεν τέμνει ποτέ τους ημιάξονες Ox και Oy , διότι οι συντεταγμένες των σημείων της δεν παίρνουν ποτέ την τιμή 0.

Βασικές ασκήσεις

76. Για την αναδάσωση μιας πλαγιάς, εργάστηκαν 20 εργάτες για 10 ημέρες. Πόσοι εργάτες, ίδιας απόδοσης, χρειάζονται για να αναδασώσουν την έκταση αυτή, σε 8 ημέρες;
77. Σε ένα αγρόκτημα, τοποθέτησαν ντομάτες σε 50 καφάσια, των 12 Kg το καθένα. Πόσα καφάσια των 20 Kg θα χρειαζόντουσαν για να τοποθετήσουν τις ντομάτες. Αν κάθε καφάσι των 12 Kg στοιχίζει 0,28 € και κάθε καφάσι των 20 Kg 0,46 €, ποια συσκευασία τους συμφέρει, ώστε να ελαχιστοποιηθεί το κόστος συσκευασίας του προϊόντος τους;
78. Το πετρέλαιο που υπάρχει στη δεξαμενή μιας πολυκατοικίας, επαρκεί για 30 ημέρες, όταν καταναλώνονται 80 lt την ημέρα. Όταν το κρύο δυναμώνει, η ημερήσια κατανάλωση αυξάνεται, κατά 20%. Για πόσες ημέρες θα φτάσει το πετρέλαιο;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6ο – **Θετικοί και αρνητικοί αριθμοί**

A.7.1. Θετικοί και Αρνητικοί Αριθμοί (Ρητοί αριθμοί) - Η ευθεία των ρητών - Τετμημένη σημείου

55. Πώς ονομάζονται τα σύμβολα “+” και “-” και ποιος είναι ο ρόλος τους;
Απάντηση

Τα σύμβολα « + » και « - » λέγονται πρόσημα. Γράφονται πριν από τους αριθμούς και τους χαρακτηρίζουν, αντίστοιχα, ως θετικούς ή αρνητικούς.

56. Το μηδέν είναι θετικός ή αρνητικός αριθμός;
Απάντηση

Το μηδέν δεν είναι ούτε θετικός ούτε αρνητικός αριθμός.

57. Ποιοι αριθμοί λέγονται ομόσημοι και ποιοι ετερόσημοι;
Απάντηση

Ομόσημοι λέγονται οι αριθμοί που έχουν το ίδιο πρόσημο.
Ετερόσημοι λέγονται οι αριθμοί που έχουν διαφορετικό πρόσημο.

58. Ποιοι είναι οι ακέραιοι και ποιοι οι ρητοί αριθμοί;
Απάντηση

Ακέραιοι αριθμοί είναι οι φυσικοί αριθμοί μαζί με τους αντίστοιχους αρνητικούς αριθμούς.

Ρητοί αριθμοί είναι όλοι οι γνωστοί μας έως τώρα αριθμοί: φυσικοί, κλάσματα και δεκαδικοί μαζί με τους αντίστοιχους αρνητικούς αριθμούς.

Βασικές ασκήσεις

79. Στα ζεύγη αριθμών που ακολουθούν να βρεις ποιοι αριθμοί είναι ομόσημοι και ποιοι είναι ετερόσημοι: (α) 3 και +3, (β) 0 και 5, (γ) -2 και -4, (δ) 7 και +9, (ε) -2 και 1.

80. Τα σημεία A και B έχουν τετμημένες α και β , αντίστοιχα. Να βρεθεί η τετμημένη του μέσου M του τμήματος AB όταν: (α) $\alpha = +5$ και $\beta = +8$, (β) $\alpha = -4$ και $\beta = -13$.

A.7.2. Απόλυτη τιμή ρητού - Αντίθετοι ρητοί - Σύγκριση ρητών

59. Τι εκφράζει η απόλυτη τιμή ενός ρητού αριθμού a ;
Απάντηση

Η απόλυτη τιμή ενός ρητού αριθμού a εκφράζει την απόσταση του σημείου με τετμημένη a από την αρχή O του άξονα και συμβολίζεται με $|a|$.

60. Ποιοι αριθμοί ονομάζονται αντίθετοι;

Απάντηση

Αντίθετοι ονομάζονται δύο αριθμοί που είναι ετερόσημοι και έχουν την ίδια απόλυτη τιμή.

61. Πως συγκρίνουμε δύο ρητούς αριθμούς;

Απάντηση

Ο μεγαλύτερος από δύο ρητούς αριθμούς είναι εκείνος που βρίσκεται δεξιότερα από τον άλλο πάνω στον άξονα.

Κάθε θετικός ρητός είναι μεγαλύτερος από κάθε αρνητικό ρητό αριθμό.

Το μηδέν είναι μικρότερο από κάθε θετικό αριθμό και μεγαλύτερο από κάθε αρνητικό αριθμό.

Βασικές ασκήσεις

81. Τοποθέτησε στον άξονα x'Ox τα σημεία με τετμημένες: -9, -5,5, +8, -3, -7,25, +1, +12, +3, +9. Ποια από αυτά είναι συμμετρικά ως προς την αρχή του άξονα;
82. Να συμπληρώσεις με το κατάλληλο σύμβολο: <, > ή = τα κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς σχέσεις: (α) -3 ... -8, (β) -4 ... 10, (γ) 0 ... -1, (δ) +3 ... 0, (ε) -5 ... -|-5|, (στ) -5 ... -(+5), (ζ) |+7| ... |-7|, (η) -(8) ... -8, (θ) +3 ... -(+4), (ι) 0 ... -|-4|.
83. Το x παριστάνει έναν ακέραιο αριθμό. Για ποιες τιμές του x θα ισχύουν οι σχέσεις: (α) $-13 < x < -8$, (β) $-4 > x > -5$.

A.7.3. Πρόσθεση ρητών αριθμών

62. Πως προσθέτουμε δύο ομόσημους ρητούς αριθμούς και πως δύο ετερόσημους;

Απάντηση

Για να προσθέσουμε δύο ομόσημους ρητούς αριθμούς, προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο άθροισμα βάζουμε το πρόσημό τους.

Για να προσθέσουμε δύο ετερόσημους ρητούς αριθμούς, αφαιρούμε από τη μεγαλύτερη τη μικρότερη απόλυτη τιμή και στη διαφορά βάζουμε το πρόσημο του ρητού με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

63. Ποιες είναι οι ιδιότητες της πρόσθεσης ρητών αριθμών;

Απάντηση

- Αντιμεταθετική ιδιότητα: $a+b = b+a$
- Προσεταιριστική ιδιότητα: $a+(b+\gamma) = (a+b)+\gamma$
- Το 0 όταν προστεθεί σε ένα ρητό δεν τον μεταβάλλει.
- Το άθροισμα δύο αντίθετων αριθμών είναι μηδέν.

Βασικές ασκήσεις

84. Τοποθέτησε στα κενά τα κατάλληλα πρόσημα, ώστε να προκύψουν αληθείς ισότητες: α) $(\dots 6) + (-8) = -2$, β) $(+5) + (\dots 5) = 0$
γ) $(+7) + (\dots 9) = +16$ δ) $(\dots 9) + (\dots 8) = -17$
85. Υπολόγισε τα αθροίσματα:
α) $(-3,8) + (+2,8) + (-5,4) + (+8,2)$ και
β) $(-3,5) + (-9,99) + (+2,5) + (-15,75) + (+20,75) + (+9,99)$
86. Υπολόγισε τα αθροίσματα:
α) $\left(+\frac{9}{4}\right) + \left(-\frac{5}{4}\right) + \left(+\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{5}{3}\right) + \left(+\frac{7}{13}\right) + \left(-\frac{20}{13}\right)$ β) $\left(+\frac{1}{7}\right) + \left(-\frac{5}{7}\right) + \left(+\frac{3}{5}\right) + \left(-\frac{1}{35}\right)$

A.7.4. Αφαίρεση ρητών αριθμών

64. Πως αφαιρούμε δύο ρητούς αριθμούς α και β;

Απάντηση

Για να αφαιρέσουμε από τον αριθμό α τον αριθμό β, προσθέτουμε στον α τον αντίθετο του β. $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$.

65. Πως απαλείφουμε μια παρένθεση;

Απάντηση

Όταν μια παρένθεση έχει μπροστά της το + (ή δεν έχει πρόσημο), μπορούμε να την απαλείψουμε μαζί με το + (αν έχει) και να γράψουμε τους όρους που περιέχει με τα πρόσημά τους.

Όταν μια παρένθεση έχει μπροστά της το -, μπορούμε να την απαλείψουμε μαζί με το - και να γράψουμε τους όρους που περιέχει με αντίθετα πρόσημα.

Βασικές ασκήσεις

87. Υπολόγισε τις διαφορές:
α) $5 - (-7)$ β) $-8 - (+8)$ γ) $-2 - (15,2)$ δ) $14,55 - 18,45$ ε) $-\frac{2}{7} - \left(-\frac{2}{7}\right)$
88. Κάνε τις πράξεις:
α) $(+5) - (+3) + (+8)$, β) $(-25) + (-4) - (-10)$, γ) $(+12) + (+2) - (-8)$.
89. Να λύσεις τις εξισώσεις: α) $x + (-8) = -18$, β) $x + 12 = -14$, γ) $x + 5/4 = 7/8$, δ) $x - 5/4 = 2$
90. Υπολόγισε την τιμή των παραστάσεων με δύο τρόπους:
α) $11 - (12 - 2) + (10 - 5) - (8 + 5)$, β) $\frac{1}{6} - \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{4}\right) - \left(\frac{7}{12} + \frac{5}{6}\right)$

A.7.5 Πολλαπλασιασμός ρητών αριθμών

66. Πως πολλαπλασιάζουμε δύο ομόσημους και πώς δύο ετερόσημους ρητούς αριθμούς;

Απάντηση

Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ομόσημους ρητούς αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο βάζουμε το πρόσημο «+».

Δηλαδή: $+ \cdot + = +$ και $- \cdot - = +$

Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ετερόσημους ρητούς αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο βάζουμε το πρόσημο «-».

Δηλαδή: $+ \cdot - = -$ και $- \cdot + = -$

67. Ποιες είναι οι ιδιότητες του πολλαπλασιασμού ρητών αριθμών;

Απάντηση

- Αντιμεταθετική ιδιότητα: $a \cdot b = b \cdot a$
- Προσεταιριστική ιδιότητα: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
- Όταν ένας ρητός πολλαπλασιάζεται με το 1 δεν μεταβάλλεται. $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$
- Επιμεριστική ιδιότητα: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ και $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$
- Όταν ένας ρητός πολλαπλασιάζεται με το 0 μηδενίζεται. $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$

68. Πότε δύο ρητοί αριθμοί λέγονται αντίστροφοι;

Απάντηση

Δύο ρητοί αριθμοί λέγονται αντίστροφοι όταν το γινόμενό τους είναι ίσο με 1.

69. Πως υπολογίζουμε ένα γινόμενο πολλών παραγόντων;

Απάντηση

Για να υπολογίσουμε ένα γινόμενο πολλών παραγόντων (που κανένας δεν είναι μηδέν), πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο βάζουμε:

- ο Το πρόσημο +, αν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι άρτιο (ζυγό).
- ο Το πρόσημο -, αν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι περιττό (μονό).

Αν τουλάχιστον ένας παράγοντας είναι μηδέν, τότε και το γινόμενο είναι ίσο με μηδέν. Το σημείο του πολλαπλασιασμού «·» μεταξύ των γραμμάτων και των παρενθέσεων παραλείπεται.

Βασικές ασκήσεις

91. Κάνε τις πράξεις:

$$\alpha) -7(-8+10-5) \quad \beta) (0,25-0,05)\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right) \quad \gamma) -10-6\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$$

92. Κάνε τις πράξεις:

$$\alpha) (5+a)(2+\beta), \quad \beta) (a+7)(a-7), \quad \gamma) (a-3)(\beta-3)$$

93. Υπολόγισε τα γινόμενα: α) $(-1)(-1)$, β) $(-1)(-1)(-1)$, γ) $(-1)(-1)(-1)(-1)$

94. Υπολόγισε την τιμή των παραστάσεων:

$$A = (a-1)(a+1)(a-2)(a+2), \quad \text{όταν } a = 3$$

$$B = \beta(\beta-3)(\beta+3)(\beta-5)(\beta+5), \quad \text{όταν } \beta = 2$$

$$\Gamma = \gamma(2\gamma-1)(3\gamma+1)(4\gamma-2)(\gamma+2)(\gamma-2), \quad \text{όταν } \gamma = 0,5$$

A.7.6. Διαίρεση ρητών αριθμών

70. Πως διαιρούμε δύο ρητούς αριθμούς;

Απάντηση

Για να διαιρέσουμε δύο ρητούς αριθμούς, διαιρούμε τις απόλυτες τιμές τους και στο πηλίκο βάζουμε:

- το πρόσημο +, αν είναι ομόσημοι. Δηλαδή: $+: + = +$ και $-: - = +$
- το πρόσημο -, αν είναι ετερόσημοι. Δηλαδή: $+: - = -$ και $-: + = -$

Βασικές ασκήσεις

95. Κάνε τις διαιρέσεις:

$$\alpha) (+15,15) : (+3), \quad \beta) (-4,5) : (-1,5), \quad \gamma) (-81) : (+0,9), \quad \delta) 49 : (-7)$$

$$96. \text{ Κάνε τις πράξεις: } \alpha) \frac{-1}{3} + \frac{2}{-6} - \frac{12}{-15} \quad \beta) \frac{(-2)(-5)(-1)}{-10} \quad \gamma) \left(\frac{-7}{3} - \frac{5}{-3} \right) : \left(\frac{-3}{2} \right)$$

A.7.8. Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη φυσικό

71. Πως ορίζεται μια δύναμη με βάση ρητό αριθμό και εκθέτη φυσικό αριθμό;

Απάντηση

Το γινόμενο $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_v \text{ παράγοντες}$ (είτε ο a είναι θετικός είτε ο a είναι αρνητικός ρητός),

συμβολίζεται με το a^v και λέγεται δύναμη με βάση το a και εκθέτη το φυσικό αριθμό $v > 1$.

- Για $v = 1$, γράφουμε $a^1 = a$
- Η δύναμη a^v διαβάζεται και νιοστή δύναμη του a .
- Η δύναμη a^2 λέγεται και τετράγωνο του a ή a στο τετράγωνο.
- Η δύναμη a^3 λέγεται κύβος του a ή a στον κύβο.

72. Τι πρόσημο έχει μια δύναμη με βάση ακέραιο αριθμό και εκθέτη φυσικό αριθμό;

Απάντηση

- Δύναμη με βάση θετικό αριθμό είναι θετικός αριθμός.
Αν $a > 0$, τότε $a^v > 0$
- Δύναμη με βάση αρνητικό αριθμό και εκθέτη άρτιο είναι θετικός αριθμός.
Αν $a < 0$ και v άρτιος, τότε $a^v > 0$
- Δύναμη με βάση αρνητικό αριθμό και εκθέτη περιττό είναι αρνητικός αριθμός.
Αν $a < 0$ και v περιττός, τότε $a^v < 0$

73. Ποιες είναι οι ιδιότητες των δυνάμεων ρητών με εκθέτη φυσικό αριθμό;

Απάντηση

- Για να πολλαπλασιάσουμε δυνάμεις με την ίδια βάση, αφήνουμε την ίδια βάση και βάζουμε εκθέτη το άθροισμα των εκθετών. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- Για να διαιρέσουμε δυνάμεις με την ίδια βάση, αφήνουμε την ίδια βάση και βάζουμε εκθέτη τη διαφορά του εκθέτη του διαιρέτη από τον εκθέτη του διαιρετέου. $a^m : a^n = a^{m-n}$
- Για να υψώσουμε ένα γινόμενο σε εκθέτη, υψώνουμε κάθε παράγοντα του γινομένου στον εκθέτη αυτό. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- Για να υψώσουμε ένα πηλίκο σε έναν εκθέτη, υψώνουμε καθένα από τους όρους του πηλίκου στον εκθέτη αυτό. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
- Για να υψώσουμε μία δύναμη σε έναν εκθέτη, υψώνουμε τη βάση της δύναμης στο γινόμενο των εκθετών. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Βασικές ασκήσεις

97. Υπολόγισε τις τιμές των παραστάσεων: $A = (-1)1 + (-1)2 + (-1)3 + (-1)4 + (-1)5$,

$$B = 32 \cdot 5^4 - 25 - 4^5 + 87,5 \cdot 4^3, \quad \Gamma = -\frac{(-6)^5}{3^5} - \frac{8^4}{(-4)^4} + \frac{10^3}{(-5)^3}$$

A.7.9. Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη ακέραιο

74. Πώς ορίζεται μια δύναμη με βάση ρητό αριθμό και εκθέτη αρνητικό;

Απάντηση

Η δύναμη κάθε αριθμού, διάφορου του μηδενός, με εκθέτη αρνητικό είναι ίση με κλάσμα που έχει αριθμητή τη μονάδα και παρονομαστή τη δύναμη του αριθμού αυτού

με αντίθετο εκθέτη. $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$

Επειδή τα $\frac{a}{b}$ και $\frac{b}{a}$ είναι αντίστροφοι αριθμοί, όπως και τα a και $\frac{1}{a}$ στην

προηγούμενη σχέση, εξάγουμε το συμπέρασμα ότι ισχύει: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

Βασικές ασκήσεις

98. Συμπλήρωσε τον πίνακα:

a	b	γ	$(a+b)^2$	$(ab)^2$	$\left(\frac{a}{b}\right)^2$	$(-a)^{-2}$	$(\gamma b)^{-1}$
$\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{1}{5}$					
10	-10	0,001					

Γεωμετρία

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο – Βασικές γεωμετρικές έννοιες

B.1.1. Σημείο – Ευθύγραμμο τμήμα – Ευθεία – Ημιευθεία – Επίπεδο – Ημιεπίπεδο άξονα

75. Πως ορίζεται η ευθεία; Από ένα σημείο πόσες ευθείες διέρχονται; Από δύο σημεία πόσες ευθείες διέρχονται;

Απάντηση

Εάν προεκτείνουμε απεριόριστα ένα ευθύγραμμο τμήμα AB, τότε το νέο σχήμα, που δεν έχει ούτε αρχή ούτε τέλος, λέγεται ευθεία.

Από ένα σημείο διέρχονται άπειρες ευθείες.

Από δύο σημεία διέρχεται μια μόνο ευθεία.

76. Τι ονομάζουμε ημιευθεία; Ποιες ημιευθείες λέγονται αντικείμενες;

Απάντηση

Εάν προεκτείνουμε απεριόριστα ένα ευθύγραμμο τμήμα AB πέρα από το ένα μόνο άκρο του, π.χ. το B, τότε το νέο σχήμα, που έχει αρχή το A αλλά δεν έχει τέλος, λέγεται ημιευθεία.

Εάν O είναι ένα σημείο της ευθείας $x'x$, τότε με αρχή το O ορίζονται δύο ημιευθείες Ox και Ox' , οι οποίες λέγονται αντικείμενες ημιευθείες.

77. Τι είναι το επίπεδο και ποιες ιδιότητες έχει;

Απάντηση

Επίπεδο είναι μια επιφάνεια, πάνω στην οποία εφαρμόζει παντού η ευθεία γραμμή.

- Ένα επίπεδο επεκτείνεται απεριόριστα.
- Από τρία μη συνευθειακά σημεία διέρχεται ένα μοναδικό επίπεδο, ενώ από ένα ή δύο σημεία διέρχονται άπειρα επίπεδα.
- Κάθε επίπεδο χωρίζει το χώρο σε δύο μέρη, ώστε, αν θέλουμε να περάσουμε από το ένα μέρος του χώρου στο άλλο, πρέπει να διαπεράσουμε το επίπεδο.

B.1.2. Γωνία – Γραμμή – Επίπεδα σχήματα – Ευθύγραμμα σχήματα – Ισα σχήματα

78. Τι ονομάζεται γωνία;

Απάντηση

Γωνία ονομάζεται κάθε μια από τις περιοχές που ορίζουν δύο ημιευθείες με κοινή αρχή.

79. Τι είναι η τεθλασμένη γραμμή; Τι ονομάζουμε ευθύγραμμο σχήμα; Πότε μια τεθλασμένη γραμμή λέγεται κυρτή και πότε μη κυρτή;

Απάντηση

- Τεθλασμένη γραμμή είναι μια πολυγωνική γραμμή, που αποτελείται από διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα, τα οποία δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία.
- Ευθύγραμμο σχήμα ονομάζεται κάθε τεθλασμένη γραμμή, της οποίας τα άκρα συμπίπτουν.
- Μια τεθλασμένη γραμμή ονομάζεται κυρτή, όταν η προέκταση κάθε πλευράς της αφήνει όλες τις άλλες πλευρές στο ίδιο ημιεπίπεδο. Διαφορετικά λέγεται μη κυρτή.

80. Πότε δύο ευθύγραμμα σχήματα λέγονται ίσα; Τι ονομάζουμε αντίστοιχα στοιχεία τους;

Απάντηση

Δύο ευθύγραμμα σχήματα λέγονται ίσα, αν συμπίπτουν, όταν τοποθετηθούν το ένα επάνω στο άλλο με κατάλληλο τρόπο.

Στα ίσα σχήματα, τα στοιχεία που συμπίπτουν, δηλαδή οι κορυφές, οι πλευρές και οι γωνίες, ονομάζονται αντίστοιχα στοιχεία των σχημάτων αυτών.

81. Τι ονομάζουμε απόσταση δύο σημείων A και B; Τι ονομάζουμε μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB;

Απάντηση

Απόσταση δύο σημείων A και B λέγεται το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB, που τα ενώνει.

Μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος AB ονομάζουμε το σημείο M του τμήματος, που απέχει εξίσου από τα άκρα του.

Βασικές ασκήσεις

99. Ένας αγρότης θέλει να περιφράξει έναν αγρό σχήματος τετραγώνου και πλευράς 15,3 m. Διαθέτει συρματόπλεγμα, μήκους 60 m 3 dm 18 cm. Να βρεθεί, αν θα του φτάσει το συρματόπλεγμα ή αν πρέπει να αγοράσει και άλλο.
100. Σχεδίασε δύο αντικείμενες ημιευθείες Ax και Ax'. Να βρεις πάνω στην ημιευθεία Ax δύο σημεία B και Γ, έτσι ώστε $AB = 3$ cm και $AG = 3,8$ cm. Επίσης στην ημιευθεία Ax' να πάρεις ένα σημείο Δ έτσι, ώστε $AD = 3$ cm. Να συγκρίνεις (α) τα ευθύγραμμα τμήματα AG και AD και (β) τα ευθύγραμμα τμήματα AB και AD.
101. Το μέσο O ευθύγραμμου τμήματος AB απέχει 4,2 cm από το άκρο A. Πόσο είναι το μήκος του AB;

B.1.4. Πρόσθεση και αφαίρεση ευθυγράμμων τμημάτων

82. Πως προσθέτουμε ευθύγραμμο τμήματα; Πως αφαιρούμε δύο ευθύγραμμο τμήματα;

Απάντηση

- Για να προσθέσουμε ευθύγραμμο τμήματα, τα τοποθετούμε διαδοχικά πάνω σε μια ευθεία. Το τμήμα που έχει άκρα την αρχή του πρώτου και το τέλος του τελευταίου είναι το άθροισμά τους.
- Για να αφαιρέσουμε δύο ευθύγραμμο τμήματα, τα τοποθετούμε με κοινή αρχή στην ίδια ημιευθεία. Το τμήμα που αρχίζει από το τέλος του μικρότερου και καταλήγει στο τέλος του μεγαλύτερου αποτελεί τη διαφορά τους.

83. Τι ονομάζουμε περίμετρο ενός σχήματος;

Απάντηση

Το άθροισμα των πλευρών ενός ευθύγραμμου σχήματος, θα το λέμε περίμετρο του σχήματος.

Βασικές ασκήσεις

102. Δίνεται ένα τρίγωνο ΑΒΓ με όλες τις πλευρές ίσες, με 2,5 cm. Βρες στην ημιευθεία ΒΓ, με αρχή το σημείο Β, ένα σημείο Ε έτσι, ώστε το μήκος ΒΕ να ισούται με την περίμετρο του τριγώνου.
103. Να πάρεις σε μια ευθεία με τη σειρά τα σημεία Κ, Λ, Μ και Ν έτσι, ώστε: ΚΛ = 6 cm, ΚΜ = 16 cm και ΚΝ = 20 cm. Να βρεις τα μήκη των τμημάτων ΛΜ, ΛΝ και ΜΝ.
104. Δίνεται ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 4,5 cm. Πάνω στην ευθεία ΑΒ πάρε ένα σημείο Κ, τέτοιο ώστε ΑΚ = 3 cm και ένα άλλο σημείο Λ, τέτοιο, ώστε να είναι ΒΛ = 3,5 cm. (α) Να βρεις το μήκος του ΚΛ, (β) Σε ποια περίπτωση συμβαίνει να είναι ΚΛ = 11 cm; (γ) Να διερευνήσεις, σε ποιες περιπτώσεις το ΚΛ είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από 11 cm.

B.1.5. Μέτρηση, σύγκριση και ισότητα γωνιών – Διχοτόμος γωνίας

84. Ποια είναι η μονάδα μέτρησης γωνιών και ποιες είναι οι υποδιαιρέσεις της; Πότε δύο γωνίες είναι ίσες;

Απάντηση

Μονάδα μέτρησης των γωνιών είναι η μοίρα, που γράφεται: 1° .

Είναι: $1^\circ = 60'$ (πρώτα λεπτά) και $1' = 60''$ (δεύτερα λεπτά).

Αν δύο γωνίες έχουν το ίδιο μέτρο είναι ίσες.

85. Τι ονομάζεται διχοτόμος γωνίας;

Απάντηση

Διχοτόμος γωνίας ονομάζεται η ημιευθεία που έχει αρχή την κορυφή της γωνίας και τη χωρίζει σε δύο ίσες γωνίες.

B.1.6. Είδη γωνιών – Κάθετες ευθείες

86. Ποια γωνία λέγεται ορθή, ποια οξεία και ποια αμβλεία;

Απάντηση

- Ορθή γωνία λέγεται η γωνία της οποίας το μέτρο είναι ίσο με 90° .
- Οξεία γωνία λέγεται κάθε γωνία με μέτρο μικρότερο των 90° .
- Αμβλεία γωνία λέγεται κάθε γωνία με μέτρο μεγαλύτερο των 90° και μικρότερο των 180° .

87. Ποια γωνία λέγεται ευθεία και ποια μη κυρτή;

Απάντηση

Ευθεία γωνία λέγεται η γωνία της οποίας το μέτρο είναι ίσο με 180° .
Μη κυρτή γωνία λέγεται κάθε γωνία με μέτρο μεγαλύτερο των 180° και μικρότερο των 360° .

88. Ποια γωνία λέγεται μηδενική και ποια πλήρης;

Απάντηση

- Πλήρης γωνία λέγεται η γωνία της οποίας το μέτρο είναι ίσο με 360° .
- Μηδενική γωνία λέγεται η γωνία της οποίας το μέτρο είναι ίσο με 0° .

B.1.7. Εφεξής και διαδοχικές γωνίες – Άθροισμα γωνιών

89. Ποιες γωνίες λέγονται εφεξής και ποιες διαδοχικές;

Απάντηση

- Εφεξής γωνίες ονομάζονται δύο γωνίες που έχουν την ίδια κορυφή, μία κοινή πλευρά και δεν έχουν κανένα άλλο κοινό σημείο.
- Διαδοχικές γωνίες λέγονται περισσότερες από δύο γωνίες, που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και καθεμιά από αυτές είναι εφεξής γωνία με την προηγούμενη ή την επόμενη της.

B.1.8. Παραπληρωματικές και Συμπληρωματικές γωνίες – Κατά κορυφήν γωνίες

90. Ποιες γωνίες λέγονται παραπληρωματικές και ποιες συμπληρωματικές;

Απάντηση

- Παραπληρωματικές γωνίες ονομάζονται δύο γωνίες που έχουν άθροισμα 180° . Η κάθε μία από αυτές λέγεται παραπληρωματική της άλλης.
- Συμπληρωματικές γωνίες ονομάζονται δύο γωνίες που έχουν άθροισμα 90° . Η κάθε μία από αυτές λέγεται συμπληρωματική της άλλης.

91. Ποιες γωνίες λέγονται κατακορυφήν;

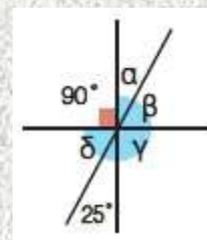
Απάντηση

Κατακορυφήν γωνίες ονομάζονται δύο γωνίες που έχουν την κορυφή τους κοινή και τις πλευρές τους αντικείμενες ημιευθείες.

Βασικές ασκήσεις

105. Να βρεις τι είδους γωνία είναι η παραπληρωματική (α) μιας αμβλείας, (β) μιας ορθής και (γ) μιας οξείας γωνίας.

106. Εάν γνωρίζεις ότι η μία γωνία από τις τέσσερις, που σχηματίζουν δύο τεμνόμενες ευθείες είναι 57° υπολόγισε τις υπόλοιπες γωνίες.



107. Να υπολογίσεις τις γωνίες του διπλανού σχήματος (χωρίς μοιρογνωμόνιο).

B.1.9. Θέσεις ευθειών στο επίπεδο

92. Πότε δύο ευθείες του ίδιου επιπέδου λέγονται παράλληλες και πότε τεμνόμενες;

Απάντηση

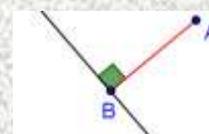
- Δύο ευθείες του ίδιου επιπέδου λέγονται παράλληλες, αν δεν έχουν κοινό σημείο όσο κι αν προεκταθούν.
- Δύο ευθείες του ίδιου επιπέδου που έχουν ένα κοινό σημείο ονομάζονται τεμνόμενες και το κοινό τους σημείο λέγεται σημείο τομής των δύο ευθειών.

B.1.10. Απόσταση σημείου από ευθεία - Απόσταση παραλλήλων

93. Τι ονομάζεται απόσταση ενός σημείου A από μια ευθεία ϵ ;

Απάντηση

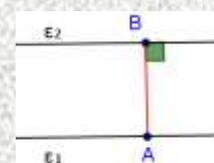
Απόσταση του σημείου A από την ευθεία ϵ ονομάζεται το μήκος του κάθετου ευθυγράμμου τμήματος AB από το σημείο A προς την ευθεία ϵ .



94. Τι ονομάζεται απόσταση δύο παραλλήλων ευθειών;

Απάντηση

Απόσταση δύο παραλλήλων ευθειών λέγεται το μήκος οποιουδήποτε ευθυγράμμου τμήματος που είναι κάθετο στις δύο παράλληλες ευθείες και έχει τα άκρα του σ' αυτές, π.χ. το AB.



Βασική άσκηση

108. Να σχεδιάσεις δύο παράλληλες ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 των οποίων η απόσταση να είναι 35 mm. Να βρεις πέντε σημεία A, B, Γ, Δ και E, που να ισαπέχουν από τις ϵ_1 και ϵ_2 . Να σχεδιάσεις μια ευθεία ϵ από το A παράλληλη προς τις ϵ_1 και ϵ_2 . Τα σημεία B, Γ, Δ και E ανήκουν ή όχι στην ϵ ;

B.1.11. Κύκλος και στοιχεία του κύκλου

95. Τι λέγεται κύκλος, τι ακτίνα και τι κέντρο του; Πότε δύο κύκλοι είναι ίσοι;

Απάντηση

Κύκλος λέγεται το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου που απέχουν την ίδια απόσταση από ένα σταθερό σημείο O. Η απόσταση αυτή συμβολίζεται με ρ και λέγεται ακτίνα του κύκλου. Το σημείο O λέγεται κέντρο του κύκλου.

Ενας κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ , συμβολίζεται με συντομία (O, ρ).

Δύο κύκλοι με ακτίνες ίσες είναι ίσοι.

96. Τι λέγεται χορδή του κύκλου; Τι λέγεται διάμετρος του κύκλου και τι γνωρίζετε γι αυτή;

Απάντηση

Το ευθύγραμμο τμήμα AB, που συνδέει δύο σημεία A και B του κύκλου, λέγεται χορδή του κύκλου.

Η χορδή που περνάει από το κέντρο του κύκλου λέγεται διάμετρος του κύκλου.

Η διάμετρος είναι η μεγαλύτερη χορδή του κύκλου, είναι διπλάσια από την ακτίνα του κύκλου και χωρίζει τον κύκλο σε δύο ίσα μέρη (ημικύκλια).

97. Τι λέγεται τόξο κύκλου;

Απάντηση

Δύο σημεία A και B του κύκλου τον χωρίζουν σε δύο μέρη που το καθένα λέγεται τόξο του κύκλου με άκρα τα A και B.

98. Τι είναι ο κυκλικός δίσκος και ποια ιδιότητα έχουν τα σημεία του;

Απάντηση

Κυκλικός δίσκος (O, ρ) είναι ο κύκλος (O, ρ) μαζί με το μέρος του επιπέδου που περικλείει.

Όλα τα σημεία του κυκλικού δίσκου απέχουν από το κέντρο O απόσταση μικρότερη ή ίση με την ακτίνα ρ .

B.1.12. Επίκεντρη γωνία – Σχέση επίκεντρης γωνίας και του αντίστοιχου τόξου – Μέτρηση τόξου

99. Ποια γωνία λέγεται επίκεντρη; Ποιο είναι το αντίστοιχο τόξο μιας επίκεντρης γωνίας; Ποια σχέση συνδέει μια επίκεντρη γωνία με το αντίστοιχο τόξο της; Πως ορίζεται το μέτρο ενός τόξου;

Απάντηση

Κατασκευάζουμε έναν κύκλο (O, ρ) και μια γωνία $\chi O \gamma$, της οποίας η κορυφή συμπίπτει με το κέντρο O του κύκλου. Η γωνία αυτή λέγεται επίκεντρη γωνία.

Το τόξο του κύκλου που βρίσκεται στο εσωτερικό της επίκεντρης γωνίας λέγεται αντίστοιχο τόξο της.

Ως μέτρο ενός τόξου ορίζεται το μέτρο της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας, δηλαδή το μέτρο ενός τόξου το μετράμε σε μοίρες.

B.1.13. Θέσεις ευθείας και κύκλου

100. Ποιες είναι οι σχετικές θέσεις ενός κύκλου με μια ευθεία; Τι γνωρίζετε για την απόστασή τους σε κάθε περίπτωση;

Απάντηση

- Όταν ευθεία και κύκλος δεν έχουν κανένα κοινό σημείο λέμε ότι η ευθεία είναι εξωτερική του κύκλου. Η απόσταση OM του κέντρου O από την ευθεία ϵ στη περίπτωση αυτή είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα ρ ($OM > \rho$).
- Όταν ευθεία και κύκλος έχουν ένα μόνο κοινό σημείο M , η ευθεία λέγεται εφαπτόμενη του κύκλου στο σημείο M . Η απόσταση OM του κέντρου O από την ευθεία ϵ στη περίπτωση αυτή, είναι ίση με την ακτίνα ρ ($OM = \rho$).
- Όταν ευθεία και κύκλος έχουν δύο κοινά σημεία A και B , η ευθεία λέγεται τέμνουσα του κύκλου ή λέμε ότι η ευθεία τέμνει τον κύκλο στα A και B . Η απόσταση OM του κέντρου O από την ευθεία ϵ στη περίπτωση αυτή, είναι μικρότερη από την ακτίνα ρ ($OM < \rho$).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο – Συμμετρία

B.2.1. Συμμετρία ως προς άξονα

101. Πότε δύο σημεία A και B είναι συμμετρικά ως προς μια ευθεία ϵ ; Πότε δύο σχήματα είναι συμμετρικά ως προς μια ευθεία ϵ ; Τι σχέση έχουν τα δύο συμμετρικά σχήματα;

Απάντηση

Δύο σημεία A και B είναι συμμετρικά ως προς μια ευθεία ϵ , όταν διπλώσουμε το φύλλο κατά μήκος της ευθείας τα σημεία A και B να συμπίπτουν.

Δύο σχήματα (Σ_1) και (Σ_2) λέγονται συμμετρικά ως προς μία ευθεία ϵ , όταν καθένα αποτελείται από τα συμμετρικά σημεία του άλλου ως προς την ϵ .

Τα συμμετρικά ως προς ευθεία σχήματα είναι ίσα.

B.2.2. Άξονας συμμετρίας

102. Πότε μια ευθεία ονομάζεται άξονας συμμετρίας ενός σχήματος;

Απάντηση

Άξονας συμμετρίας σχήματος ονομάζεται η ευθεία που χωρίζει το σχήμα σε δύο μέρη, τα οποία συμπίπτουν όταν διπλωθεί το σχήμα κατά μήκος της ευθείας. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το σχήμα έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία αυτή.

B.2.3. Μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος

103. Τι ονομάζεται μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος και ποια είναι η βασική της ιδιότητα;

Απάντηση

Μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος λέγεται η ευθεία που είναι κάθετη προς αυτό και διέρχεται από το μέσον του.

Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος έχει ίσες αποστάσεις (ισαπέχει) από τα άκρα του.

Βασικές ασκήσεις

109. Σχεδιάσε ένα τρίγωνο και βρες με ακρίβεια τα μέσα των πλευρών του.

110. Σχεδιάσε έναν κύκλο με κέντρο K και μια χορδή του AB . Να κατασκευάσεις τη μεσοκάθετο της χορδής AB και να ονομάσεις M και N τα σημεία στα οποία τέμνει τον κύκλο. (α) Σύγκρινε τις χορδές MA και MB και δικαιολόγησε το αποτέλεσμα της σύγκρισης, (β) κάνε το ίδιο και για τις χορδές NA και NB , (γ) βρες εάν το κέντρο K του κύκλου είναι σημείο της μεσοκαθέτου και δικαιολόγησε την απάντησή σου.

B.2.4. Συμμετρία ως προς σημείο

104. Πότε δύο σημεία M και M' λέγονται συμμετρικά ως προς σημείο O ; Πότε δύο σχήματα λέγονται συμμετρικά ως προς σημείο O ; Τι σχέση έχουν τα συμμετρικά σχήματα;

Απάντηση

Δύο σημεία M και M' είναι συμμετρικά ως προς σημείο O , όταν το O είναι μέσο του τμήματος MM' .

Δύο σχήματα λέγονται συμμετρικά ως προς σημείο O , όταν κάθε σημείο του ενός είναι συμμετρικό ενός σημείου του άλλου ως προς το O .

Τα συμμετρικά ως προς σημείο σχήματα είναι ίσα.

B.2.5. Κέντρο συμμετρίας

105. Πότε ένα σημείο είναι κέντρο συμμετρίας ενός σχήματος;

Απάντηση

Κέντρο συμμετρίας σχήματος ονομάζεται ένα σημείο του O , γύρω από το οποίο αν περιστραφεί το σχήμα κατά 180° , συμπίπτει με το αρχικό. Στην περίπτωση που υπάρχει τέτοιο σημείο, λέμε ότι το σχήμα έχει κέντρο συμμετρίας το σημείο O .

106. Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από μια τρίτη ευθεία τότε:

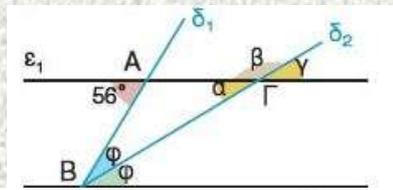
- α) Οι εντός εναλλάξ γωνίες τι σχέση έχουν;
- β) Οι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες τι σχέση έχουν;
- γ) Οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες τι σχέση έχουν;

Απάντηση

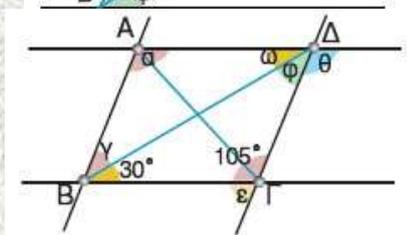
- α) Οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες.
- β) Οι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες είναι ίσες.
- γ) Οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες είναι παραπληρωματικές.

Βασικές ασκήσεις

111. Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι παράλληλες και η ημιευθεία $B\delta_2$ είναι διχοτόμος της γωνίας B. Να υπολογίσεις τις γωνίες α , β και γ του σχήματος.



112. Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος είναι: $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $AD \parallel B\Gamma$. Να υπολογίσεις όλες τις σημειωμένες γωνίες.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο – Τρίγωνα – Παραλληλόγραμμο - Τραπεζία

Β.3.1. Στοιχεία τριγώνου - Είδη τριγώνων

107. Ποια είναι τα κύρια στοιχεία ενός τριγώνου;
Απάντηση

Τα κύρια στοιχεία ενός τριγώνου είναι οι πλευρές και οι γωνίες του.

108. Ποια είναι τα είδη τριγώνων με βάση τις γωνίες τους και τι γνωρίζετε γι'αυτά;
Απάντηση

Είναι το ορθογώνιο, το αμβλυγώνιο και το οξυγώνιο.
Το ορθογώνιο έχει μια ορθή γωνία, το αμβλυγώνιο έχει μια αμβλεία γωνία και στο οξυγώνιο τρίγωνο όλες του οι γωνίες είναι οξείες.

109. Ποια είναι τα είδη τριγώνων με βάση τις πλευρές τους και τι γνωρίζετε γι'αυτά;
Απάντηση

Είναι το ισόπλευρο το ισοσκελές και το σκαληνό.
Το ισόπλευρο έχει και τις τρεις πλευρές του ίσες. Στο ισοσκελές δύο πλευρές είναι ίσες και στο σκαληνό όλες οι πλευρές είναι άνισες.

110. Ποια είναι τα δευτερεύοντα στοιχεία ενός τριγώνου και τι γνωρίζετε γι'αυτά;
Απάντηση

Τα δευτερεύοντα στοιχεία ενός τριγώνου είναι η διάμεσος, το ύψος και η διχοτόμος.

Διάμεσος είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή του τριγώνου με το μέσο της απέναντι πλευράς.

Ύψος είναι το ευθύγραμμο τμήμα που φέρνουμε από μια κορυφή κάθετα στην ευθεία της απέναντι πλευράς.

Διχοτόμος είναι το ευθύγραμμο τμήμα της διχοτόμου μιας γωνίας του τριγώνου που φέρνουμε από μια κορυφή και καταλήγει στην απέναντι πλευρά.

B.3.2. Άθροισμα γωνιών τριγώνου - Ιδιότητες ισοσκελούς τριγώνου

111. Με τι είναι ίσο το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου;

Απάντηση

Σε κάθε τρίγωνο το άθροισμα των γωνιών του είναι ίσο με 180° .

112. Ποιες είναι οι ιδιότητες του ισοσκελούς τριγώνου;

Απάντηση

Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο ισχύει ότι:

- Η ευθεία της διαμέσου, που αντιστοιχεί στη βάση είναι άξονας συμμετρίας του ισοσκελούς τριγώνου.
- Η διάμεσος, που αντιστοιχεί στη βάση είναι ύψος και διχοτόμος.
- Οι προσκείμενες γωνίες στη βάση του ισοσκελούς είναι ίσες.

113. Ποιες είναι οι ιδιότητες του ισόπλευρου τριγώνου;

Απάντηση

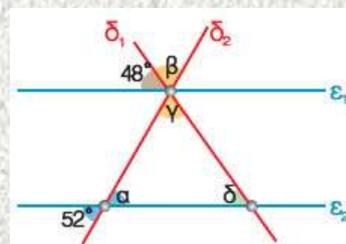
Σε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο ισχύει ότι:

- Οι ευθείες των διαμέσων είναι άξονες συμμετρίας του ισοπλεύρου τριγώνου.
- Κάθε διάμεσος είναι ύψος και διχοτόμος.
- Όλες οι πλευρές και όλες οι γωνίες του ισοπλεύρου τριγώνου είναι ίσες.

Βασικές ασκήσεις

113. Στο διπλανό σχήμα είναι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

Να υπολογίσεις τις γωνίες α , β , γ και δ .



114. Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο, η γωνία που είναι απέναντι από τη βάση είναι 74° . Να υπολογίσεις τις υπόλοιπες γωνίες.

115. Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $A = 36^\circ$ και η γωνία B είναι διπλάσια από τη Γ .

Υπολόγισε τις γωνίες B και Γ .

B.3.3. Παραλληλόγραμμο - Ορθογώνιο - Ρόμβος - Τετράγωνο - Τραπεζίο - Ισοσκελές τραπέζιο

114. Ποιο τετράπλευρο λέγεται παραλληλόγραμμο; Τι λέγεται ύψος του;
Απάντηση

Παραλληλόγραμμο λέγεται το τετράπλευρο ΑΒΓΔ που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, δηλαδή ΑΒ//ΓΔ και ΑΔ//ΒΓ.

Η απόσταση της βάσης από την απέναντι πλευρά λέγεται ύψος του παραλληλογράμμου.

115. Ποιο τετράπλευρο λέγεται ορθογώνιο, ποιο ρόμβος και ποιο τετράγωνο;
Απάντηση

Ένα παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις γωνίες του ορθές λέγεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ή απλά ορθογώνιο.

Ένα παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις πλευρές του ίσες λέγεται ρόμβος.

Ένα παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις γωνίες του ορθές και όλες τις πλευρές του ίσες λέγεται τετράγωνο.

116. Ποιο τετράπλευρο λέγεται τραπέζιο; Τι ονομάζεται ύψος του τραpezίου; Ποιο τραπέζιο λέγεται ισοσκελές;
Απάντηση

Το τετράπλευρο του οποίου μόνο δύο πλευρές είναι παράλληλες λέγεται τραπέζιο. Οι παράλληλες λέγονται βάσεις του και η απόστασή τους λέγεται ύψος του τραpezίου. Αν οι μη παράλληλες πλευρές του τραpezίου είναι ίσες, τότε λέγεται ισοσκελές τραπέζιο.

B.3.4. Ιδιότητες Παραλληλογράμμου - Ορθογωνίου - Ρόμβου - Τετραγώνου - Τραπεζίου - Ισοσκελούς τραpezίου

117. Ποιες είναι οι ιδιότητες του ορθογωνίου και του πλάγιου παραλληλογράμμου; Ποιες επιπλέον ιδιότητες έχει το ορθογώνιο;
Απάντηση

Σε κάθε παραλληλόγραμμο το σημείο τομής των διαγωνίων του είναι κέντρο συμμετρίας του.

- Οι διαγωνίες του διχοτομούνται (κάθε μία περνάει από το μέσον της άλλης).
- Οι απέναντι πλευρές είναι ίσες.
- Οι απέναντι γωνίες είναι ίσες.

Στο ορθογώνιο:

- Οι μεσοκάθετοι των πλευρών του είναι άξονες συμμετρίας.
- Οι διαγωνίες του είναι ίσες και διχοτομούνται.

118. Ποιες είναι οι ιδιότητες του ρόμβου;
Απάντηση

Εκτός των ιδιοτήτων του παραλληλογράμμου έχει ακόμα και τις εξής:

- Οι ευθείες των διαγωνίων είναι άξονες συμμετρίας.
- Οι διαγώνιες είναι κάθετες (και διχοτομούνται).
- Οι διαγώνιές του είναι και διχοτόμοι των γωνιών του.

119. Ποιες είναι οι ιδιότητες του τετραγώνου;

Απάντηση

Εκτός των ιδιοτήτων του παραλληλογράμμου έχει ακόμα και τις εξής:

- Οι ευθείες των διαγωνίων του και οι μεσοκάθετοι των πλευρών του είναι άξονες συμμετρίας.
- Οι διαγώνιές του είναι ίσες, κάθετες (και διχοτομούνται).
- Οι διαγώνιές του είναι και διχοτόμοι των γωνιών του.

120. Ποιες είναι οι ιδιότητες του ισοσκελούς τραπεζίου;

Απάντηση

- Η ευθεία που διέρχεται από τα μέσα των βάσεων είναι άξονας συμμετρίας και μεσοκάθετος στις βάσεις του.
- Οι προσκείμενες σε κάθε βάση γωνίες του είναι ίσες.

Επαναληπτικές Ασκήσεις

116. Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης:

$$A = 2^5 \cdot (2^3 : 2^2 - 2^4 : 4^2) - (7^2 - 6 \cdot 8)^{10} \cdot 3^2 - 4^3 : 2^4$$

117. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\alpha) (2^5 - 3^3) \cdot [2(4 \cdot 9 - 6^2) + 3 \cdot 1^{111}] \quad \beta) 2 \cdot (3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 5) + 3(4^3 - 6 \cdot 3^2)$$

118. Αν $x = 4$, $y = 3$ και $\omega = 2$ να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$$\alpha. (x+3) \cdot y + 2 \cdot x \cdot y \cdot \omega \quad \beta. (x-y)^2 \cdot \omega \quad \gamma. x^2 - 2 \cdot \omega \cdot x + \omega^2$$

119. Να βρείτε το αποτέλεσμα των πράξεων $2 \cdot 5^2 - 3 \left[70 - (4^2 - 2^3)^2 \right] + (2^6 : 4^2) : 2$

120. Αν $\alpha = 2$, $\beta = 3$ και $\gamma = 4$, να υπολογίσετε τη τιμή των παρακάτω παραστάσεων

$$A = \alpha(\beta^3 - \gamma^2) - \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^3 + (5\beta - 3\alpha)^2 \quad \text{και} \quad B = \alpha^2\beta\gamma - (3\alpha^2 - 4\beta) \cdot \gamma^{2013} + [3\gamma - 2(\beta - \alpha)^2]^2$$

121. Ένα κατάστημα κάνει έκπτωση σε όλα τα είδη του ίση με το $\frac{1}{4}$ της αρχικής αξίας

τους. Πληρώσαμε για ένα ζευγάρι παπούτσια 72€ στην περίοδο των εκπτώσεων.

Να υπολογίσετε:

- Ποιο μέρος της αρχικής αξίας είναι τα 72€.
- Πόσα ευρώ ήταν η έκπτωση.
- Πόσο κόστιζαν τα παπούτσια πριν αρχίσουν οι εκπτώσεις;

122. Κάποιος είχε μαζί του στην αρχή της ημέρας 160€. Ξόδεψε τα $\frac{5}{6}$ των χρημάτων

του για επισκευή του αυτοκινήτου του και με τα $\frac{2}{3}$ των υπολοίπων χρημάτων

κέρασε τους φίλους του. Πόσα χρήματα ξόδεψε για τους φίλους του;;

123. Σ' ένα Γυμνάσιο, για την ανάδειξη προέδρου του 15μελούς, ψήφισαν 200 μαθητές. Ο υποψήφιος Α πήρε το 40% των ψήφων, ο υποψήφιος Β πήρε 90 ψήφους ενώ τα υπόλοιπα ψηφοδέλτια ήταν άκυρα και λευκά.

- Πόσες ψήφους πήρε ο υποψήφιος Α;
- Τι ποσοστό πήρε ο υποψήφιος Β και τι ποσοστό πήραν τα άκυρα και λευκά ψηφοδέλτια;

124. Ένα Γυμνάσιο έχει 270 μαθητές. Από αυτούς τα $\frac{3}{10}$ πηγαίνουν στην Α τάξη τα

$\frac{2}{5}$ στην Β τάξη και οι υπόλοιποι στην Γ τάξη.

- Πόσοι μαθητές πηγαίνουν σε κάθε τάξη;
- Να βρεθεί το ποσοστό % των μαθητών που πηγαίνουν στην Γ τάξη.

125. Ένας έμπορος αγόρασε εμπορεύματα αξίας 12.000€. Από αυτά πλήρωσε το 30% μετρητοίς και το υπόλοιπο σε 6 μηνιαίες δόσεις με τόκο 1% κάθε μήνα. Να

υπολογίσετε:

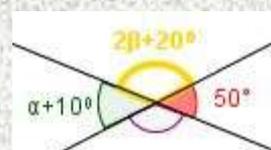
- α) Τι ποσό πλήρωσε για κάθε δόση;
- β) Πόσο στοιχίσαν τελικά τα εμπορεύματα;
- γ) Ποιο ήταν το ποσοστό επιβάρυνσής του από τόκους σε σχέση με την αρχική αξία των εμπορευμάτων;

126. Ένα προϊόν κοστίζει σε ένα κατάστημα 75 ευρώ. Το κατάστημα την εποχή των εκπτώσεων το πουλά με έκπτωση 30%. Μετά το πέρας αυτής της περιόδου, αυξάνει την προηγούμενη τιμή πώλησης κατά ίσο ποσοστό. Θα επανέλθει η τιμή του προϊόντος στην προηγούμενη του αξία των 75 ευρώ; Ποια είναι η ποσοστιαία διαφορά της τελικής από την αρχική τιμή πώλησης του προϊόντος;

127. Ένα κουτί που περιέχει 15 ίδιες σφαίρες έχει βάρος 1,7kg. Το απόβαρο του κουτιού είναι 425g. Ποιο είναι το βάρος καθεμιάς από τις 15 ίδιες σφαίρες;

128. Να υπολογίσετε πόσα τετραγωνικά πλακάκια πλευράς 18cm θα χρειαστούν για να καλύψουν ένα ορθογώνιο δάπεδο που έχει διαστάσεις 1,44m και 8,64m.

129. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ του διπλανού σχήματος.



130. Να βρείτε τη γωνία που είναι πενταπλάσια από την παραπληρωματική της.

131. Σ' ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) η μία κάθετη πλευρά AB έχει μήκος 6cm, η υποτείνουσα $B\Gamma$ έχει μήκος 10cm και το ύψος AK που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα έχει μήκος 4,8 cm.

- α. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.
- β. Πόσο μήκος έχει η δεύτερη κάθετη πλευρά $A\Gamma$;

132. Δίνεται τραπέζιο ισεμβαδικό με τετράγωνο πλευράς 10m. Αν η μία βάση του τραπέζιου είναι 10 m και η άλλη 60 dm μικρότερη από την πρώτη, να βρεθεί το ύψος του τραπέζιου.

133. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ότι οι ευθείες και ϵ_2 είναι παράλληλες και ότι η ευθεία ζ τις τέμνει. Να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας.

- α) Ισχύει $\omega = \theta$;
- β) Αν η γωνία θ είναι ίση με 25° :
 - i) Να βρείτε τη γωνία ω .
 - ii) Να βρείτε τη γωνία ϕ .

