Μαθηματικά Γενικής Παιδείας Γ΄ Λυκείου
Διαγώνισμα στη Στατιστική

Θέμα Α

Α 1. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις με **Σωστό** (Σ), αν είναι σωστή, ή με **Λάθος** (Λ), αν είναι λανθασμένη.

α) Ας υποθέσουμε ότι x_1, x_2, ...,$x_κ$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής Χ, που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους ν, $κ \le ν$.Για τη σχετική συχνότητα f_i ισχύει ότι $f_i > 1$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, k$.

β) Η συχνότητα της τιμής x_i μιας μεταβλητής Χ είναι αρνητικός αριθμός.

γ) Στη περίπτωση των ποσοτικών μεταβλητών, εκτός από τις συχνότητες f_i και $ν_i$, χρησιμοποιούνται και οι λεγόμενες αθροιστικές συχνότητες F_i, N_i .

δ) Οι τιμές μιας ποιοτικής μεταβλητής είναι αριθμοί.

ε) Σε μια ομαδοποιημένη κατανομή με κλάσεις ίσου πλάτους οι διαδοχικές κεντρικές τιμές των κλάσεων διαφέρουν μεταξύ τους όσο και το πλάτος κάθε κλάσης.

στ) Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής.

ζ) $N_i = N_{i-1} + ν_{i-1}$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$ με $i > 1$.

η) Σε ένα ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με 1.

θ) Σε μια ομαδοποιημένη κατανομή με κλάσεις ίσου πλάτους το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το μέγεθος ν του δείγματος.

ι) Αν οι τιμές $x_1, x_2, \ldots, x_k$ μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ είναι σε αύξουσα διάταξη και οι αντίστοιχες απόλυτες συχνότητες τους είναι $ν_1, ν_2, \ldots, ν_k$, τότε η αθροιστική συχνότητα της τιμής x_i είναι $N_i = ν_1 + ν_2 + \ldots + ν_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

κ) Το εύρος είναι μέτρο θέσης.

λ) Σε ένα δείγμα τιμών μιας οιασδήποτε μεταβλητής Χ το εύρος R ορίζεται από τη σχέση: R= μεγαλύτερη παρατήρηση + μικρότερη παρατήρηση.

μ) Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται μόνο για τη γραφική παράσταση των ποσοτικών μεταβλητών.

ν) Η διακύμανση εκφράζεται με τις ίδιες μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις.

ξ) Σε μια κατανομή συχνοτήτων η μέση τιμή $\bar{x}$ ορίζεται από τη σχέση: $\bar{x} = \frac{1}{ν}\sum_{i=1}^{k} x_i ν_i$

ο) Ο συντελεστής μεταβολής CV ορίζεται (για $\bar{x} \neq 0$) από το λόγο: $CV = \frac{\text{τυπική απόκλιση}}{\text{μέση τιμή}}$.

π) Σε πίνακα συχνοτήτων η διακύμανση (ή διασπορά) της μεταβλητής Χ ορίζεται από τη σχέση:

$$s^2 = \frac{1}{ν}\sum_{i=1}^{ν}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 ν_i$$

ρ) Η διάμεσος ενός δείγματος ν παρατηρήσεων δεν είναι μέτρο θέσης.

σ) Η διακύμανση των τιμών μιας μεταβλητής Χ είναι μέτρο θέσης.

τ) Η μέση τιμή ενός συνόλου ν παρατηρήσεων είναι ένα μέτρο θέσης.

μ 20x0,5

Α 2. α) Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου ενός δείγματος ν παρατηρήσεων.

β) Αν $t_1, t_2, ..., t_\nu$ είναι οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής Χ σε δείγμα μεγέθους ν, να ορίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ των παρατηρήσεων.

γ) Αν $x_1, x_2, ..., x_\nu$ είναι οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ ενός δείγματος μεγέθους ν και $w_1, w_2, ..., w_\nu$ είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές στάθμισης(βαρύτητας), να ορίσετε το σταθμικό μέσο της μεταβλητής Χ.

δ) Τι ονομάζουμε (απόλυτη) συχνότητα ν_i της τιμής x_i όπου $i = 1, 2, \ldots \kappa$;

ε) Τι ονομάζουμε σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i όπου $i = 1, 2, \ldots, \kappa$;

μ 5x2

Α 3. α) Αν $f_1, f_2, ... f_\kappa$ είναι οι σχετικές συχνότητες των τιμών $x_1, x_2, ..., x_\kappa$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι: $f_1 + f_2 + \ldots + f_\kappa = 1$

β) Εστω $t_1, t_2, ..., t_\nu$ οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ ενός δείγματος μεγέθους ν, που έχουν μέση τιμή $\bar{x}$. Σχηματίζουμε τις διαφορές $t_1 - \bar{x}, t_2 - \bar{x}, ..., t_\nu - \bar{x}$. Να αποδείξετε ότι ο αριθμητικός μέσος των διαφορών αυτών είναι ίσος με μηδέν.

μ 2x4

Θέμα Β

Εστω ότι οι τιμές μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ έχουν ομαδοποιηθεί σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους c όπως φαίνεται στο διπλανό πίνακα.

Κλάσεις $[...-...)$	Κεντική τιμή x_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική σχετική συχνότητα $F_i\%$
0 - ..		α	
... - ...		β	
... - ...	5	γ	55
... - ...			δ
... - ...		ε	

Β 1. Να αποδείξετε ότι c = 2 και να συμπληρώσετε τις κλάσεις. μ 5

Β 2. Αν η σχετική συχνότητα της τέταρτης κλάσης είναι ίση με αυτή της πρώτης κλάσης,η διάμεσος είναι το 5 και η μέση τιμή του δείγματος είναι 5,1 να αποδείξετε ότι:
$\alpha = 20$, $\beta = \varepsilon = 25$, $\gamma = 10$ και $\delta = 75$ μ 10

Β 3. Να σχεδιάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων. μ 4

Β 4. Να βρείτε το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες από το 6,2. μ 6

Β 5. Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες του 8 είναι 3,8. μ 6

Β 6. Αν στη πρώτη κλάση αντιστοιχούν 20 παρατηρήσεις, να βρείτε πόσες παρατηρήσεις πρέπει να προσθέσουμε στη τελευταία κλάση ώστε η μέση τιμή του δείγματος να είναι 6. μ 6

Θέμα Γ

Εστω Χ μια ποσοτική μεταβλητή με τιμές 2, 4, 6, 8.

Γ 1. Να βρείτε τη τη μέση τιμή, τη διάμεσο και τη τυπική απόκλιση των τιμών της υπόθεσης. μ 4

Γ 2. Αν οι τιμές 2, 4, 6, 8 έχουν αντίστοιχες βαρύτητες 1, 2, 3, 1 αντίστοιχα, να βρείτε το σταθμικό μέσο. μ 4

Εστω $10 = x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$ άλλες 5 τιμές της μεταβλητής Χ με μέση τιμή 14 και τυπική απόκλιση 2

Γ 3. Να βρείτε τη διάμεσο όλου του δείγματος τιμών. μ 6

Γ 4. Να αποδείξετε ότι το συνολικό δείγμα έχει μέση τιμή 10 και τυπική απόκλιση $\frac{2\sqrt{55}}{3}$. μ 7

Γ 5. Να αποδείξετε ότι $12 \le x_i \le 16$, $i = 2,3,4,5$ μ 8

Γ 6. Να αποδείξετε ότι $x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = \frac{1}{15}\left(x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2\right)$ μ 6

Καλή Επιτυχία στις πανελλαδικές εξετάσεις

Στέλιος Μιχαήλογλου

www.askisopolis.gr

Λύσεις

Θέμα Α

Α 1. α) Λ β) Λ γ) Σ δ) Λ ε) Σ στ) Σ ζ) Λ η) Σ θ) Λ ι) Σ κ) Λ λ) Λ μ) Λ ν) Λ ξ) Σ ο) Λ π) Λ ρ) Λ σ) Λ τ) Σ

Α 2. α) Διάμεσος (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση, όταν το ν είναι περιττός αριθμός, ή ο μέσος όρος (ημιάθροισμα) των δύο μεσαίων παρατηρήσεων όταν το ν είναι άρτιος αριθμός.

Η διάμεσος είναι η τιμή που χωρίζει ένα σύνολο παρατηρήσεων σε δύο ίσα μέρη όταν οι παρατηρήσεις αυτές τοποθετηθούν με σειρά τάξης μεγέθους. Ακριβέστερα, η διάμεσος είναι η τιμή για την οποία το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτήν και το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από την τιμή αυτήν.

β) $\bar{x}=\dfrac{t_1+t_2+\ldots+t_\nu}{\nu}=\dfrac{\sum_{i=1}^{\nu}t_i}{\nu}=\dfrac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}t_i$

γ) $\bar{x}=\dfrac{x_1w_1+x_2w_2+\ldots+x_\nu w_\nu}{w_1+w_2+\ldots+w_\nu}=\dfrac{\sum_{i=1}^{\nu}x_iw_i}{\sum_{i=1}^{\nu}w_i}$

δ) Ας υποθέσουμε ότι $x_1,x_2,\ldots,x_\kappa$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής Χ, που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους ν, $\kappa\le\nu$. Στην τιμή x_i αντιστοιχίζεται η (απόλυτη) συχνότητα ν_i, δηλαδή ο φυσικός αριθμός που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή x_i της εξεταζόμενης μεταβλητής Χ στο σύνολο των παρατηρήσεων.

ε) Αν διαιρέσουμε τη συχνότητα ν_i με το μέγεθος ν του δείγματος, προκύπτει η σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i, δηλαδή $f_i=\dfrac{\nu_i}{\nu}$, $i=1,2,\ldots,\kappa$.

Α3. α) $f_1+f_2+\ldots+f_\kappa=\dfrac{\nu_1}{\nu}+\dfrac{\nu_2}{\nu}+\ldots+\dfrac{\nu_\kappa}{\nu}=\dfrac{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_\kappa}{\nu}=\dfrac{\nu}{\nu}=1$

β) Ο αριθμός όμως αυτός είναι ίσος με μηδέν, αφού

$$\frac{(t_1-\bar{x})+(t_2-\bar{x})+\ldots+(t_v-\bar{x})}{v}=\frac{t_1+t_2+\ldots+t_v}{v}-\frac{v\bar{x}}{v}=\bar{x}-\bar{x}=0.$$

Ο αριθμητικό μέσος των διαφορών αυτών, δηλαδή ο αριθμός:

$$\frac{(t_1-\bar{x})+(t_2-\bar{x})+\ldots+(t_v-\bar{x})}{v}=\frac{\sum_{i=1}^{v}(t_i-\bar{x})}{v}.$$

Θέμα Β

Β 1. Η πρώτη κλάση είναι η $[0,c)$, η δεύτερη $[c,2c)$ και η τρίτη $[2c,3c)$. Επειδή το κέντρο της 3ης κλάσης είναι το 5, ισχύει ότι: $\dfrac{2c+3c}{2}=5\Leftrightarrow 5c=10\Leftrightarrow c=2$.

Κλάσεις $[\ldots-\ldots)$	x_i	$f_i\%$	$F_i\%$
0 - 2	1	α	
2 - 4	3	β	
4 - 6	5	γ	55
6 - 8	7		δ
8 - 10	9	ε	

Β 2. Είναι $f_1\%=f_4\%=\alpha$

Επειδή οι τιμές είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες στις κλάσεις καιη διάμεσος είναι το 5, ισχύει ότι:

$\alpha+\beta+\dfrac{\gamma}{2}=50$ (1) και $\dfrac{\gamma}{2}+\alpha+\varepsilon=50$ (2)

Είναι $F_3\%=55\Leftrightarrow\alpha+\beta+\gamma=55\Leftrightarrow\alpha+\beta=55-\gamma$ και από τη σχέση (1) έχουμε:

$55-\gamma+\frac{\gamma}{2}=50 \Leftrightarrow \gamma=10$. Τότε $\alpha+\beta=55-10=45 \Leftrightarrow \beta=45-\alpha$ (3) και

από τη (2) $\Rightarrow 5+\alpha+\varepsilon=50 \Leftrightarrow \alpha+\varepsilon=45 \Leftrightarrow \varepsilon=45-\alpha$ (4)

Επειδή η μέση τιμή του δείγματος είναι 5,1 έχουμε:

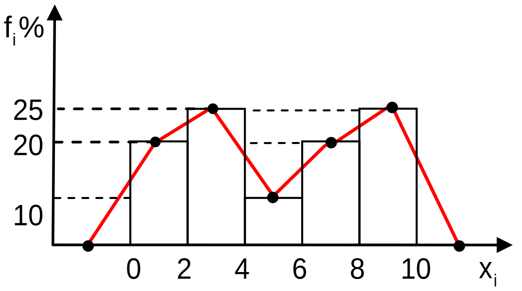
$$\bar{x}=5{,}1 \Leftrightarrow 1\cdot\frac{\alpha}{100}+3\cdot\frac{\beta}{100}+5\cdot\frac{10}{100}+7\cdot\frac{\alpha}{100}+9\cdot\frac{\varepsilon}{100}=5{,}1 \Leftrightarrow$$

$$\alpha+3\beta+50+7\alpha+9\varepsilon=510 \overset{(3),(4)}{\Rightarrow} \alpha+3(45-\alpha)+7\alpha+9(45-\alpha)=460 \Leftrightarrow$$

$$\alpha+135-3\alpha+7\alpha+405-9\alpha=460 \Leftrightarrow -4\alpha=-80 \Leftrightarrow \alpha=20$$

Τότε $\beta=25=\varepsilon$ και $\delta=F_3\%+f_4\%=55+20=75$

B 3.



Κλάσεις [...−...)	x_i	$f_i\%$	$F_i\%$
0 - 2	1	20	20
2 - 4	3	25	45
4 - 6	5	10	55
6 - 8	7	20	75
8 - 10	9	25	100

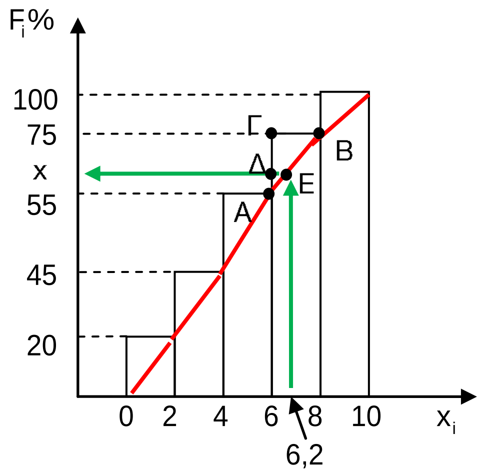
B 4. Κατασκευάζουμε το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων και έστω ότι η παρατήρηση 6,2 αντιστοιχεί στην αθροιστική x%.

Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια, οπότε:

$$\frac{A\Delta}{A\Gamma}=\frac{\Delta E}{B\Gamma} \Leftrightarrow \frac{x-55}{75-55}=\frac{6{,}2-6}{8-6} \Leftrightarrow \frac{x-55}{20}=0{,}1 \Leftrightarrow$$

$x-55=2 \Leftrightarrow x=57$

Επομένως το 57% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από το 6,2.



B 5. Εστω ν το σύνολο των παρατηρήσεων, τότε

$f_1=\frac{\nu_1}{\nu}=0{,}2 \Leftrightarrow \nu_1=0{,}2\nu$ και όμοια

$\nu_2=0{,}25\nu,\ \nu_3=0{,}10\nu$ και $\nu_4=0{,}20\nu$

Κλάσεις [...−...)	x_i	ν_i
0 - 2	1	0,20ν
2 - 4	3	0,25ν
4 - 6	5	0,10ν
6 - 8	7	0,20ν
Σύνολο		0,75ν

Για τη μέση τιμή των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες του 8 έχουμε:

$$\bar{x}'=\frac{1\cdot 0{,}20\nu+3\cdot 0{,}25\nu+5\cdot 0{,}10\nu+7\cdot 0{,}20\nu}{0{,}75\nu}=\frac{2{,}85\cancel{\nu}}{0{,}75\cancel{\nu}}=3{,}80$$

B 6. Αν ν_1=20, τότε $\nu=\frac{\nu_1}{f_1}=\frac{20}{0{,}2}=100$, ν_2=25, ν_3=10, ν_4= 20 και ν_5=25

Κλάσεις [...−...)	x_i	ν_i
0 - 2	1	20
2 - 4	3	25
4 - 6	5	10
6 - 8	7	20
8 - 10	9	25
Σύνολο		100

Εστω ότι στην 5η κλάση θα προσθέσουμε x τιμές. Τότε ν_5=25 + x και ν =100+x. Η νέα μέση τιμή είναι:

$$\frac{1\cdot 20+3\cdot 25+5\cdot 10+7\cdot 20+9(25+x)}{100+x}=6 \Leftrightarrow x$$

$510+9x=600+6x \Leftrightarrow 3x=90 \Leftrightarrow x=30$

Θέμα Γ

Γ 1. $\bar{x}_1 = \frac{2+4+6+8}{4} = 5$ και $s_1^2 = \frac{1}{4}\left[(2-5)^2 + (4-5)^2 + (6-5)^2 + (8-5)^2\right] = 5 \Leftrightarrow s_1 = \sqrt{5}$

$\delta = \frac{4+6}{2} = 5$

Γ 2. $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{\kappa} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{\nu} w_i} = \frac{2\cdot1 + 4\cdot2 + 6\cdot3 + 8\cdot1}{1+2+3+1} = \frac{36}{7}$

Γ 3. Οι τιμές σε αύξουσα σειρά είναι: $2 < 4 < 6 < 8 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$

Επειδή συνολικά οι τιμές είναι 9, η διάμεσος είναι η 5η παρατήρηση, άρα $\delta = x_1 = 10$

Γ 4. Είναι $\bar{x}_2 = 14 \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{5} = 14 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{5} x_i = 70$

Η συνολική μέση τιμή είναι: $\bar{x} = \frac{2+4+6+8+\sum_{i=1}^{5} x_i}{9} = \frac{20+70}{9} = 10$

Είναι $s_2 = 2 \Leftrightarrow s_2^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{5}\left(\sum_{i=1}^{5} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{5} x_i\right)^2}{5}\right) = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i^2 - \bar{x}_2^2 = 4 \Leftrightarrow$

$\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{2} x_i^2 = 4 + 14^2 = 200 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 1000$

Για τη τυπική απόκλιση s του συνόλου, έχουμε:

$s^2 = \frac{1}{9}\left(\sum_{i=1}^{9} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{9} x_i\right)^2}{\nu}\right) = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} x_i^2 - \bar{x}^2$. Όμως $\sum_{i=1}^{9} x_i^2 = 2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + \sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 120 + 1000 = 1120$

άρα $s^2 = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{9}\cdot 1120 - 10^2 = \frac{220}{9} \Leftrightarrow s = \frac{2\sqrt{55}}{3}$

Γ 5. Είναι $s_2^2 = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x}_2)^2 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{5}(x_i - 14)^2 = 20 \Leftrightarrow (10-14)^2 + \sum_{i=2}^{5}(x_i - 14)^2 = 20 \Leftrightarrow \sum_{i=2}^{5}(x_i - 14)^2 = 4$

$(x_i - 14)^2 \le \sum_{i=2}^{5}(x_i - 14)^2 = 4 \Leftrightarrow |x_i - 14| \le 2 \Leftrightarrow -2 \le x_i - 14 \le 2 \Leftrightarrow 12 \le x_i \le 16$

Γ 6. $\sum_{i=1}^{5} x_i = 70 \Leftrightarrow 10 + \sum_{i=2}^{5} x_i = 70 \Leftrightarrow x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 60$

$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 1000 \Leftrightarrow 10^2 + \sum_{i=2}^{5} x_i^2 = 1000 \Leftrightarrow \sum_{i=2}^{5} x_i^2 = 900 \Leftrightarrow x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 900 \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{15}\left(x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2\right)=\frac{900}{15}=60=x_2+x_3+x_4+x_5$$