ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ
ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 4 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2019
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

Μονάδες 7

Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$. Έτσι έχουμε $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(\alpha,x_0]$. (1)

Επειδή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(x_0,\beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0,\beta)$. Έτσι έχουμε: $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in[x_0,\beta)$. (2)

Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει: $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α,β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

Α2. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζετε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ;

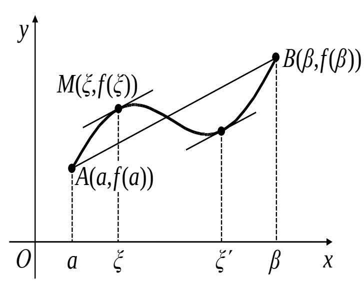
Μονάδες 4

Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $F'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Μέσης τιμής και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 4

Αν μια συνάρτηση f είναι:



- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας ΑΒ.

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα x΄x , των τμημάτων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται κάτω από αυτόν τον άξονα.

β) Για κάθε συνεχή συνάρτηση f στο $[\alpha,\beta]$, ισχύει:

Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$ τότε $f(x)=0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

γ) Ένα τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης f μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο της f.

δ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$, τότε $f(x)>0$ για x κοντά στο x_0 .

ε) Μια πολυωνυμική συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 10

α) Σ β) Λ γ) Σ δ) Σ ε) Σ

Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x^2+1$ και $g:[2,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\sqrt{x-2}$.

Β1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g\circ f$ έχει πεδίο ορισμού το $A=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ και τύπο $(g\circ f)(x)=\sqrt{x^2-1}$.

Μονάδες 5

Β2. Να βρείτε την ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $g\circ f$ στο $+\infty$.

Μονάδες 6

Β3. Να εξετάσετε εάν υπάρχει το όριο στο $x_0=2$ της συνάρτησης $h:A-\{2\}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$h(x)=\frac{(g\circ f)(x)}{x-2} .$$

Μονάδες 6

Β4. Έστω η συνάρτηση $\varphi(x)=\begin{cases}(g\circ f)(x), & x\in A\\ 1-x^2, & x\in(-1,1)\end{cases}$.

Να εξετάσετε αν πληρούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για τη συνάρτηση $t(x)=\varphi(x)\cdot \eta\mu(\pi x)$ στο διάστημα $[0,2]$.

Μονάδες 8

Β1. Είναι $D_f=\mathbb{R}$ και $D_g=[2,+\infty)$.

Για να ορίζεται η $g\circ f$ πρέπει: $\begin{cases}x\in D_f\\ f(x)\in D_g\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\in\mathbb{R}\\ x^2+1\geq 2\end{cases} \Leftrightarrow x^2\geq 1 \Leftrightarrow |x|\geq 1 \Leftrightarrow x\leq -1$ ή $x\geq 1$, άρα

$D_{g\circ f}=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

Είναι $(g\circ f)(x)=g(f(x))=\sqrt{x^2+1-2}=\sqrt{x^2-1}$.

Β2. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(g\circ f)(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{\cancel{x}}=1$ και

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\left(g\circ f\right)(x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)}{\sqrt{x^2-1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}-1-\cancel{x^2}}{x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+1\right)}=0\ ,$$

άρα η ευθεία $y=x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Β3. $\lim\limits_{x\to2}h(x)=\lim\limits_{x\to2}\left(\sqrt{x^2-1}\,\dfrac{1}{x-2}\right)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to2}\sqrt{x^2-1}=\sqrt{3}>0$, $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{1}{x-2}\overset{x-2=u}{\underset{\substack{\text{όταν } x<2\\ \text{είναι } u<0}}{=}}\lim\limits_{u\to0^-}\dfrac{1}{u}=-\infty$ άρα $\lim\limits_{x\to2^-}h(x)=-\infty$ και

$\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{1}{x-2}\overset{x-2=u}{\underset{\substack{\text{όταν } >2\\ \text{είναι } u>0}}{=}}\lim\limits_{u\to0^+}\dfrac{1}{u}=+\infty$ άρα $\lim\limits_{x\to2^+}h(x)=+\infty$, οπότε δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to2}h(x)$.

Β4. Είναι $\varphi(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-1}, & x\in A\\ 1-x^2, & x\in(-1,1)\end{cases}$ και $t(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-1}\cdot\eta\mu(\pi x), & x\in A\\ \left(1-x^2\right)\cdot\eta\mu(\pi x), & x\in(-1,1)\end{cases}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to1^-}t(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\left(1-x^2\right)\cdot\eta\mu(\pi x)=0$, $\lim\limits_{x\to1^+}t(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\left(\sqrt{x^2-1}\right)\cdot\eta\mu(\pi x)=0=t(1)$ οπότε η t είναι συνεχής στο $x=1$.

Επιπλέον η t είναι συνεχής και στα $[0,1)$, και στο $(1,2]$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων , η t είναι συνεχής στο $[0,2]$.

Η t είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $t'(x)=-2x\cdot\eta\mu(\pi x)+\left(1-x^2\right)\cdot\pi\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi x)$.

Η t είναι παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ με $t'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}\cdot\eta\mu(\pi x)+\sqrt{x^2-1}\cdot\pi\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi x)$.

Στο $x=1$ είναι: $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{t(x)-t(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\left(1-x^2\right)\cdot\eta\mu(\pi x)}{x-1}\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{-\cancel{(x-1)}(x+1)\cdot\eta\mu(\pi x)}{\cancel{x-1}}=0$,

$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{t(x)-t(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{x^2-1}\cdot\eta\mu(\pi x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\sqrt{x^2-1}\cdot\dfrac{\eta\mu(\pi x)}{x-1}=0\cdot(-\pi)=0$ αφού

$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\eta\mu(\pi x)}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\pi\sigma\upsilon\nu(\pi x)}{1}=-\pi$, οπότε η t είναι παραγωγίσιμη στο $x=1$, οπότε είναι παραγωγίσιμη και στο $(0,2)$.

Επίσης $t(0)=0=t(2)$ οπότε εφαρμόζεται για την t το θεώρημα Rolle στο $[0,2]$.

Θέμα Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι $f(x)f'(x)=\dfrac{1}{2}$ για κάθε $x>0$ και της οποίας η γραφική παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο Μ(1, 1). Έστω το σημείο $A\left(\dfrac{3}{2},0\right)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sqrt{x}$, $x\in[0,+\infty)$.

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ είναι το μοναδικό σημείο της C_f που απέχει από το σημείο Α τη μικρότερη απόσταση.

Μονάδες 6

Γ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , την εφαπτομένη της C_f στο

σημείο Μ και τον άξονα x΄x .

Μονάδες 7

Γ4. Δίνεται επιπλέον μια συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $0<g(x)<1$ για κάθε $x\geq 0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=g(x)$ έχει μοναδική ρίζα x_0 , η οποία ανήκει στο $(0,1)$.

Μονάδες 6

Γ1. $f(x)f'(x)=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 2f(x)f'(x)=1\Leftrightarrow\left(f^2(x)\right)'=(x)'\Leftrightarrow f^2(x)=x+c,\ c\in\mathbb{R}$.

Είναι $f(1)=1\Leftrightarrow c=0$ οπότε $f^2(x)=x>0$ (1) .

Επειδή $f^2(x)>0$, είναι $f(x)\neq 0$ για κάθε $x>0$ και επειδή η f είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επειδή $f(1)=1$, είναι $f(x)>0$ για κάθε $x>0$, οπότε από την (1) έχουμε: $f(x)=\sqrt{x},\ x>0$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, είναι συνεχής στο $x=0$, οπότε $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}=0$.

Άρα $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}=\sqrt{x},\ x\geq 0$.

Γ2. Έστω $K(x,\sqrt{x}),\ x\geq 0$ σημείο της C_f . Είναι $(AK)=\sqrt{\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(\sqrt{x}-0\right)^2}=\sqrt{x^2-2x+\dfrac{9}{4}}$.

Έστω $d(x)=\sqrt{x^2-2x+\dfrac{9}{4}},\ x\geq 0$.

Η d είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $d'(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+\dfrac{9}{4}}}$.

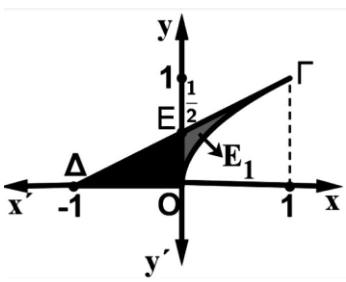
Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $d'(x)<0$ και επειδή η d είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$.

Για κάθε $x>1$ είναι $d'(x)>0$ και επειδή η d είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Η d παρουσιάζει ελάχιστο για $x=1$, οπότε το σημείο Μ είναι το μοναδικό σημείο της C_f που απέχει από το Α τη μικρότερη απόσταση.

Γ3. Η εφαπτομένη της C_f στο Γ έχει εξίσωση: $y-1=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$.

Παρατηρούμε ότι το ζητούμενο χωρίο αποτελείται από το τρίγωνο ΟΔΕ και το χωρίο με εμβαδόν E_1 .



Για $y=0$ είναι $\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}=0\Leftrightarrow x=-1$ και για $x=0$ είναι $y=\dfrac{1}{2}$, άρα $\Delta(-1,0)$ και $E\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$.

Είναι $(O\Delta E)=\dfrac{1}{2}(O\Delta)(OE)=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$ τ.μ. και

$$E_1=\int_0^1\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}-\sqrt{x}\right)dx=\left[\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}-\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{1}{12}\text{ τ.μ.}$$

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι: $E=(O\Delta E)+E_1=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{3}$ τ.μ.

Γ4. Έστω $h(x)=f(x)-g(x),\ x\in[0,1]$.

Είναι $h(0)=f(0)-g(0)=-g(0)<0,\ h(1)=f(1)-g(1)=1-g(1)>0$, δηλαδή $h(0)h(1)<0$ και επειδή η h είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, λόγω του Θ.Bolzano , η εξίσωση $h(x)=0\Leftrightarrow f(x)=g(x)$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$.

Έστω $0\le x_1<x_2$, τότε $f(x_1)<f(x_2)$ (2), $g(x_1)>g(x_2)\Leftrightarrow -g(x_1)<-g(x_2)$ (3) και από $(2)+(3)\Rightarrow$ $f(x_1)-g(x_1)<f(x_2)-g(x_2)\Leftrightarrow h(x_1)<h(x_2)\Leftrightarrow h\nearrow[0,+\infty)$, οπότε η εξίσωση $h(x)=0\Leftrightarrow f(x)=g(x)$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,1)$.

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με τύπο $f(x)=\dfrac{x^3}{3x^2-3x+1}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 4

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f(x)+f(1-x)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (*μονάδες 2*) και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα xx' και την ευθεία $x=1$ ισούται με $\frac{1}{2}$ (*μονάδες 4*) .

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 2f^2(x)dx<1$

Μονάδες 6

Δ4. Να λύσετε στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ την εξίσωση

$$f(\eta\mu^2x)+f(\sigma\upsilon\nu^2x)=f\left(\varepsilon\varphi x\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}\right)$$

Μονάδες 9

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=\dfrac{3x^2(x-1)^2}{(3x^2-3x+1)^2}$.

Είναι $f'(x)>0$ για κάθε $x\neq0$ και $x\neq1$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ2. Είναι $f(1-x)=\dfrac{(1-x)^3}{3(1-x)^2-3(1-x)+1}=\dfrac{1-3x+3x^2-x^3}{\cancel{3}-6x+3x^2-\cancel{3}+3x+1}=\dfrac{1-3x+3x^2-x^3}{3x^2-3x+1}$, οπότε

$$f(x)+f(1-x)=\frac{x^3}{3x^2-3x+1}+\frac{1-3x+3x^2-x^3}{3x^2-3x+1}=\frac{\cancel{x^3}+1-3x+3x^2-\cancel{x^3}}{3x^2-3x+1}=1$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και $f(x)\ge0$ για κάθε $x\in[0,1]$, το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$E=\int_0^1 f(x)dx$.

Είναι $f(x)+f(1-x)=1$, οπότε και $\int_0^1[f(x)+f(1-x)]dx=\int_0^1 1dx\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 f(1-x)dx=1$ (1)

Θέτουμε $1-x=u\Leftrightarrow x=1-u$ και $dx=-du$. Για $x=0$ είναι $u=1$ και για $x=1$ είναι $u=0$. Τότε από τη σχέση (1) έχουμε: $\int_0^1 f(x)dx+\int_1^0 f(u)(-du)=1 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 f(u)du=1 \Leftrightarrow$

$2\int_0^1 f(x)dx=1 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2} \Leftrightarrow E=\frac{1}{2}$

Δ3. $\int_0^1 2f^2(x)dx<1 \Leftrightarrow 2\int_0^1 f^2(x)dx<1 \Leftrightarrow \int_0^1 f^2(x)dx<\frac{1}{2} \Leftrightarrow \int_0^1 f^2(x)dx<\int_0^1 f(x)dx \Leftrightarrow$

$\int_0^1 f^2(x)dx-\int_0^1 f(x)dx<0 \Leftrightarrow \int_0^1\left[f^2(x)-f(x)\right]dx<0 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\left[f(x)-1\right]dx<0$

Για κάθε $0\le x\le 1 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(0)\le f(x)\le f(1) \Leftrightarrow 0\le f(x)\le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\ge 0 \\ f(x)-1\le 0 \end{cases}$, άρα

$f(x)\left(f(x)-1\right)\le 0$ και επειδή η ισότητα δεν ισχύει για κάθε $x\in[0,1]$, είναι: $\int_0^1 f(x)\left[f(x)-1\right]dx<0$

Δ4. $f\left(ημ^2x\right)+f\left(συν^2x\right)=f\left(εφx e^{συνx-ημx}\right) \Leftrightarrow$

$f\left(ημ^2x\right)+f\left(1-ημ^2x\right)=f\left(εφx e^{συνx-ημx}\right) \Leftrightarrow$ (Είναι $f(x)+f(1-x)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$)

$1=f\left(εφx e^{συνx-ημx}\right) \Leftrightarrow$

$f\left(εφx e^{συνx-ημx}\right)=f(1) \overset{1-1}{\Leftrightarrow}$

$εφx e^{συνx-ημx}=1 \Leftrightarrow$

$e^{συνx-ημx}=\frac{1}{εφx} \Leftrightarrow$

$e^{συνx-ημx}=\frac{συνx}{ημx} \Leftrightarrow$

$\ln e^{συνx-ημx}=\ln\frac{συνx}{ημx} \Leftrightarrow$

$συνx-ημx=\ln(συνx)-\ln(ημx) \Leftrightarrow$

$\ln(ημx)-ημx=\ln(συνx)-συνx$ (2)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\ln x-x,\ x\in(0,1)$.

Είναι $g'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}>0 \Rightarrow g\nearrow(0,1)$, οπότε η (2) γίνεται:

$g(ημx)=g(συνx) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} ημx=συνx \Leftrightarrow εφx=1 \overset{x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)}{\Leftrightarrow} x=\frac{\pi}{4}$

Σ.Μιχαήλογλου –Δ.Πατσιμάς