19η Άσκηση

Δίνεται πολυώνυμο $P(x)$ το οποίο διαιρούμενο με το $x-\rho_1$ δίνει πηλίκο x^2-4 και υπόλοιπο 2, ενώ διαιρούμενο με το $x-\rho_2$ δίνει πηλίκο x^2+x-2 και υπόλοιπο υ.

α) Να δείξετε ότι $P(x)=x^3-x^2-4x+6$.

β) Να δείξετε ότι το $x-2$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $Q(x)=P(P(P(x)))-x$.

γ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=P(x)+P(-x)$ είναι άρτια ενώ η $g(x)=P(x)-P(-x)$ είναι περιττή.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=4-g(x)$.

ε) Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ για τα οποία το πολυώνυμο $A(x)=P(x)+(\alpha+1)x^2+(\beta+4)x+3\alpha-4$ έχει παράγοντα το $(x-2)^2$.

Στέλιος Μιχαήλογλου

Λύση

α) Από τον τύπο της Ευκλείδειας διαίρεσης ισχύει ότι: $P(x)=(x-\rho_1)(x^2-4)+2 \Leftrightarrow$

$P(x)=x^3-4x-\rho_1 x^2+4\rho_1+2=x^3-\rho_1 x^2-4x+4\rho_1+2$ (1).

Επίσης $P(x)=(x-\rho_2)(x^2+x-2)+\upsilon=x^3+x^2-2x-\rho_2 x^2-\rho_2 x+2\rho_2+\upsilon \Leftrightarrow$

$P(x)=x^3+(1-\rho_2)x^2-(2+\rho_2)x+2\rho_2+\upsilon$ (2) .

Από τις (1),(2) προκύπτει ότι: $\begin{cases}-\rho_1=1-\rho_2\\ 4=2+\rho_2\\ 4\rho_1+2=2\rho_2+\upsilon\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\rho_1=1-2\\ 2=\rho_2\\ 4\rho_1+2=4+\upsilon\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\rho_1=1\\ 2=\rho_2\\ 4+2=4+\upsilon\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\rho_1=1\\ 2=\rho_2\\ 2=\upsilon\end{cases}$.

Άρα $P(x)=x^3-x^2-4x+4+2=x^3-x^2-4x+6$

β) Είναι $P(2)=2^3-2^2-4\cdot 2+6=2$ και $Q(2)=P\Bigg(P\bigg(\underbrace{P(2)}_{2}\bigg)\Bigg)-2=P\bigg(\underbrace{P(2)}_{2}\bigg)-2=P(2)-2=2-2=0$

άρα το $x-2$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $Q(x)$.

γ) Η f και η g έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $-x\in\mathbb{R}$.

Είναι $f(-x)=P(-x)+P(x)=f(x)$ οπότε η f είναι άρτια και $g(-x)=P(-x)-P(x)=-g(x)$ άρα η g είναι περιττή.

δ) $f(x)=4-g(x)\Leftrightarrow f(x)+g(x)-4=0\Leftrightarrow P(x)+P(-x)+P(x)-P(-x)-4=0\Leftrightarrow$

$2P(x)-4=0\Leftrightarrow P(x)-2=0\Leftrightarrow x^3-x^2-4x+6-2=0\Leftrightarrow x^3-x^2-4x+4=0\Leftrightarrow$

$x^2(x-1)-4(x-1)=0\Leftrightarrow(x-1)(x^2-4)=0\Leftrightarrow x=1$ ή $x^2=4\Leftrightarrow x=\pm 2$

ε) Είναι $A(x)=x^3-x^2-4x+6+(\alpha+1)x^2+(\beta+4)x+3\alpha-4=x^3+\alpha x^2+\beta x+3\alpha+2$

Αρχικά πρέπει το $x-2$ να είναι παράγοντας του $A(x)$, οπότε

$A(2)=0\Leftrightarrow 8+4\alpha+2\beta+3\alpha+2=0\Leftrightarrow 7\alpha+2\beta+10=0\Leftrightarrow \beta=\dfrac{-7\alpha-10}{2}$ (3)

1	α	β	3α+2	ρ=2
	2	2α+4	4α+2β+8	
1	α+2	2α+β+4	0	

Από το σχήμα Horner προκύπτει ότι $A(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+3\alpha+2=(x-2)\left(x^2+(\alpha+2)x+2\alpha+\beta+4\right)$

Έστω $\pi(x)=x^2+(\alpha+2)x+2\alpha+\beta+4$.

Το $(x-2)^2$ είναι παράγοντας του $A(x)$ αν και μόνο αν το $x-2$ είναι παράγοντας του $\pi(x)$, οπότε

$\pi(2)=0\Leftrightarrow 4+2(\alpha+2)+2\alpha+\beta+4=0\Leftrightarrow 4+2\alpha+4+2\alpha+\beta+4=0\Leftrightarrow \beta=-4\alpha-12$ (4)

Από τις (3),(4) $\Rightarrow \dfrac{-7\alpha-10}{2}=-4\alpha-12\Leftrightarrow -7\alpha-10=-8\alpha-24\Leftrightarrow \alpha=-14$ και

από την $(4)\Rightarrow \beta=-4(-14)-12=44$