ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2020

Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 07/11/2020 *Ώρα Εξέτασης: 10:00-12:00*

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1

Έστω η παράσταση

$$A = (3^4)^2 + 3^{10} : 9 + 3^5 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^9$$

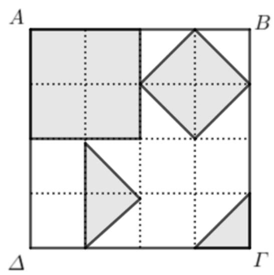
(α) Να γράψετε την παράσταση A ως δύναμη του 3.
(β) Να γράψετε την παράσταση A ως δύναμη του 9.

Πρόβλημα 2

(α) Δύο διψήφιοι θετικοί ακέραιοι οι οποίοι είναι πολλαπλάσια του 5, έχουν γινόμενο 4675. Ποιο είναι το άθροισμα αυτών των δύο αριθμών;
(β) Να βρείτε τον μικρότερο θετικό ακέραιο κ, ώστε το γινόμενο 7000κ να ισούται με κάποιον ακέραιο αριθμό στο τετράγωνο.

Πρόβλημα 3

Στο διπλανό σχήμα το $ΑΒΓΔ$ είναι ένα τετράγωνο χωρισμένο σε μικρότερα τετραγωνάκια. Το εμβαδόν του σκιασμένου χώρου ισούται με 30 cm^2. Να υπολογίσετε την περίμετρο του τετραγώνου $ΑΒΓΔ$.



Πρόβλημα 4

Από τους 120 μαθητές της Β΄ Γυμνασίου οι 70 μαθητές προήχθησαν και οι υπόλοιποι έμειναν ανεξεταστέοι. Αναλυτικά έμειναν ανεξεταστέοι:

- 30 στα Νέα Ελληνικά
- 35 στα Μαθηματικά
- 40 στην Ιστορία

Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός μαθητών που έχει σίγουρα μείνει ανεξεταστέοι και στα τρία μαθήματα;

	ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ **ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ** **ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2020** **Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ** *Ημερομηνία: 07/11/2020* *Ώρα Εξέτασης: 10:00-12:00*

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1

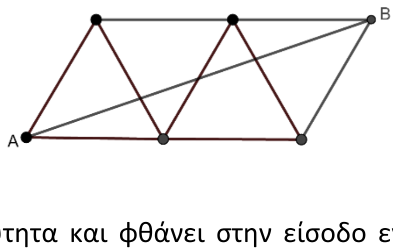
(α) Έστω η παράσταση
$$A=(3^4)^2+3^{10}:9+3^5\cdot 3^3-2\cdot 3^9$$
Να γράψετε την παράσταση A ως δύναμη του (-3).
(β) Έστω η παράσταση
$$B=2^3+2^3+2^4+2^5+2^6$$
Να γράψετε την παράσταση B ως δύναμη του 2.
(γ) Να υπολογίσετε την παράσταση
$$\Gamma=2^{100}-(2^3+2^3+2^4+2^5+\cdots+2^{99})$$
Σημείωση: Μέσα στην παρένθεση εμφανίζεται δύο φορές το 2^3 και από μία φορά κάθε ένα από τα $2^4, 2^5, \cdots, 2^{99}$.

Πρόβλημα 2

Ο Γιώργος έγραψε τον αριθμό 7200 στη μορφή $2^\alpha\cdot 3^\beta\cdot 4^\gamma\cdot 5^\delta$ όπου $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ θετικοί ακέραιοι, έτσι ώστε $\alpha+\beta+\gamma+\delta=8$. Να βρείτε τις πιθανές τιμές του γ.

Πρόβλημα 3

Στο πιο κάτω σχήμα τα τέσσερα τρίγωνα είναι ισόπλευρα με πλευρά μήκους 2 cm. Να βρείτε το μήκος του τμήματος AB.



Πρόβλημα 4

Ένα τρένο τρέχει με σταθερή ταχύτητα και φθάνει στην είσοδο ενός τούνελ μήκους 3,3 km. Θα χρειαστεί ακριβώς ένα λεπτό από αυτή τη στιγμή για να εξέλθει πλήρως από το τούνελ αλλά θα χρειαστεί μόλις πέντε δευτερόλεπτα για να εισέλθει πλήρως μέσα στο τούνελ.

Να υπολογίσετε το μήκος του τρένου.

	ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ **ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ** **ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2020** **Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ** *Ημερομηνία: 07/11/2020* *Ώρα Εξέτασης: 10:00-12:00*

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1

Αν $0 < \beta < \alpha$ και $\alpha^2 + \beta^2 = 6\alpha\beta$ να υπολογίσετε την παράσταση $\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$.

Πρόβλημα 2

Στο μάθημα των Μαθηματικών, το 60% των αγοριών και το 70% των κοριτσιών, πέρασαν την Β΄ Τάξη. Αν ο αριθμός των επιτυχόντων αγοριών, είναι ίσος με τον αριθμό των επιτυχουσών κοριτσιών, να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που πέρασαν την Β΄ τάξη.

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ = 15$ cm, $ΒΓ = 8$ cm και $ΓΑ = 17$ cm. Σημείο P βρίσκεται μέσα στο τρίγωνο έτσι ώστε η απόστασή του από την πλευρά $ΑΒ$ να είναι 4 cm και από την πλευρά $ΒΓ$ να είναι 5 cm. Να βρείτε την απόσταση του σημείου P από την πλευρά $ΑΓ$.

Πρόβλημα 4

Να βρείτε δύο θετικούς ακέραιους αριθμούς α, β, ώστε να ισχύουν όλα τα πιο κάτω:

- Ο α είναι τέλειο τετράγωνο.
- $\alpha \geq \beta + 2$
- $\beta \geq 10$
- Το πηλίκο της διαίρεσης του α με το β ισούται με το τετράγωνο του υπολοίπου της ίδιας διαίρεσης.

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2020

Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 07/11/2020 *Ώρα Εξέτασης: 10:00-12:00*

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1

Έστω η παράσταση

$$A = (3^4)^2 + 3^{10} : 9 + 3^5 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^9$$

(α) Να γράψετε την παράσταση A ως δύναμη του 3.

(β) Να γράψετε την παράσταση A ως δύναμη του 9.

Προτεινόμενη Λύση

(α) Είναι

$$\begin{aligned} A &= (3^4)^2 + 3^{10} : 9 + 3^5 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^9 \\ &= 3^8 + 3^{10} : 3^2 + 3^8 + 2 \cdot 3^9 \\ &= 3^8 + 3^8 + 3^8 + 2 \cdot 3^9 \\ &= 3 \cdot 3^8 + 2 \cdot 3^9 \\ &= 3^9 + 2 \cdot 3^9 = 3 \cdot 3^9 = 3^{10} \end{aligned}$$

(β) Είναι $A = 3^{10} = 3^{2 \cdot 5} = (3^2)^5 = 9^5$

Πρόβλημα 2

(α) Δύο διψήφιοι θετικοί ακέραιοι οι οποίοι είναι πολλαπλάσια του 5, έχουν γινόμενο 4675. Ποιο είναι το άθροισμα αυτών των δύο αριθμών;

(β) Να βρείτε τον μικρότερο θετικό ακέραιο κ, ώστε το γινόμενο 7000κ να ισούται με κάποιον ακέραιο αριθμό στο τετράγωνο.

Προτεινόμενη Λύση

(α) Είναι

$$4675 = 5 \cdot 935 = 5 \cdot 5 \cdot 187 = 5 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 17.$$

Επειδή οι δύο ακέραιοι είναι διψήφιοι και πολλαπλάσια του 5, ο ένας είναι ο $5 \cdot 11 = 55$ και ο άλλος είναι ο $5 \cdot 17 = 85$. Το άθροισμά τους είναι $55 + 85 = 140$.

(β) Είναι

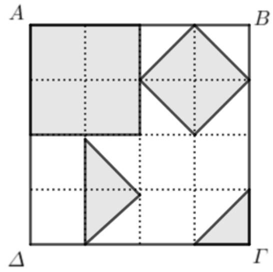
$$7000\kappa = 7 \cdot 1000\kappa = 7 \cdot 2^3 \cdot 5^3\kappa = 2^2 \cdot 5^2(2 \cdot 5 \cdot 7\kappa)$$

Πρέπει $2 \cdot 5 \cdot 7\kappa$ να είναι τέλειο τετράγωνο. Ο μικρότερος κ ώστε να είναι τέλειο τετράγωνο είναι ο

$$\kappa = 2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$$

Πρόβλημα 3

Στο διπλανό σχήμα το $ΑΒΓΔ$ είναι ένα τετράγωνο χωρισμένο σε μικρότερα τετραγωνάκια. Το εμβαδόν του σκιασμένου χώρου ισούται με 30 cm^2. Να υπολογίσετε την περίμετρο του τετραγώνου $ΑΒΓΔ$.



Προτεινόμενη Λύση

Πρώτος Τρόπος:

Από τα 16 τετραγωνάκια στα οποία είναι χωρισμένο το τετράγωνο είναι σκιασμένα τα
$$4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} = 7\frac{1}{2} = \frac{15}{2}$$
Δηλαδή είναι σκιασμένα τα
$$\frac{15/2}{16} = \frac{15}{32}$$
του τετραγώνου. Αν E το εμβαδόν του τετραγώνου, τότε
$$\frac{15}{32}E = 30 \Rightarrow E = 64\ \text{cm}^2$$
Αν x το μήκος της πλευράς του τετραγώνου τότε $x^2 = 64 \Rightarrow x = 8\ \text{cm}$. Άρα η περίμετρος του τετραγώνου ισούται με $4 \cdot 8 = 32\ \text{cm}$.

Δεύτερος Τρόπος:

Το ποσοστό του σκιασμένου τετραγώνου ισούται με
$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{8 + 4 + 2 + 1}{32} = \frac{15}{32}$$
Από εδώ μπορούμε να συνεχίσουμε όπως και στον πρώτο τρόπο επίλυσης.

Πρόβλημα 4

Από τους 120 μαθητές της Β΄ Γυμνασίου οι 70 μαθητές προήχθησαν και οι υπόλοιποι έμειναν ανεξεταστέοι. Αναλυτικά έμειναν ανεξεταστέοι:

- 30 στα Νέα Ελληνικά
- 35 στα Μαθηματικά
- 40 στην Ιστορία

Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός μαθητών που έχουν σίγουρα μείνει ανεξεταστέοι και στα τρία μαθήματα;

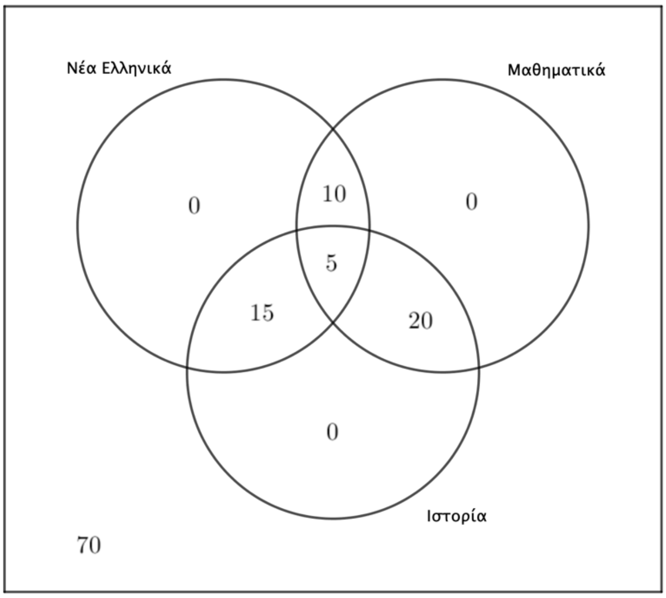
Προτεινόμενη Λύση

Ανεξεταστέοι έμειναν $120 - 70 = 50$ μαθητές.

Επειδή $30 + 35 = 65$, τότε $65 - 50 = 15$ μαθητές έμειναν σίγουρα ανεξεταστέοι και στα Νέα Ελληνικά και στα Μαθηματικά.

Επειδή $15 + 40 = 55$, τότε $55 - 50 = 5$ μαθητές έμειναν σίγουρα ανεξεταστέοι και στα τρία μαθήματα.

Στο πιο κάτω διάγραμμα Venn φαίνεται παράδειγμα όπου δεν έμειναν ανεξεταστέοι περισσότεροι από 5 μαθητές.


Νέα Ελληνικά
Μαθηματικά
0
10
0
5
15
20
0
Ιστορία
70

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2020

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 07/11/2020 *Ώρα Εξέτασης: 10:00-12:00*

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1

(α) Έστω η παράσταση
$$A=(3^4)^2+3^{10}:9+3^5\cdot 3^3-2\cdot 3^9$$
Να γράψετε την παράσταση A ως δύναμη του (-3).
(β) Έστω η παράσταση
$$B=2^3+2^3+2^4+2^5+2^6$$
Να γράψετε την παράσταση B ως δύναμη του 2.
(γ) Να υπολογίσετε την παράσταση
$$\Gamma=2^{100}-(2^3+2^3+2^4+2^5+\cdots+2^{99})$$
Σημείωση: Μέσα στην παρένθεση εμφανίζεται δύο φορές το 2^3 και από μία φορά κάθε ένα από τα $2^4,2^5,\cdots,2^{99}$.

Προτεινόμενη Λύση

(α) Είναι
$$\begin{aligned}A&=(3^4)^2+3^{10}:9+3^5\cdot 3^3-2\cdot 3^9\\&=3^8+3^{10}:3^2+3^8-2\cdot 3^9\\&=3^8+3^8+3^8-2\cdot 3^9\\&=3\cdot 3^8-2\cdot 3^9\\&=3^9-2\cdot 3^9=-3^9=(-3)^9\end{aligned}$$

(β) Πρώτος Τρόπος:

Είναι
$$B=8+8+16+32+64=128=2^7$$

Δεύτερος Τρόπος:
$$\begin{aligned}B&=(2^3+2^3)+2^4+2^5+2^6\\&=2^4+2^4+2^5+2^6\\&=2^5+2^5+2^6\\&=2^6+2^6=2^7\end{aligned}$$
(γ) Όπως στο (β) έχουμε:
$$2^3+2^3+2^4+2^5+\cdots+2^{99}=2^{100}$$
Άρα $\Gamma=2^{100}-2^{100}=0$.

Πρόβλημα 2

Ο Γιώργος έγραψε τον αριθμό 7200 στη μορφή $2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} \cdot 4^{\gamma} \cdot 5^{\delta}$ όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ θετικοί ακέραιοι, έτσι ώστε $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 8$. Να βρείτε τις πιθανές τιμές του γ.

Προτεινόμενη Λύση

Είναι

$$7200 = 8 \cdot 9 \cdot 100 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 2^2 \cdot 5^2 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2$$

Επίσης

$$2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} \cdot 4^{\gamma} \cdot 5^{\delta} = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} \cdot 2^{2\gamma} \cdot 5^{\delta} = 2^{\alpha+2\gamma} \cdot 3^{\beta} \cdot 5^{\delta}$$

Πρέπει λοιπόν

$$\alpha + 2\gamma = 5, \beta = 2, \delta = 2$$

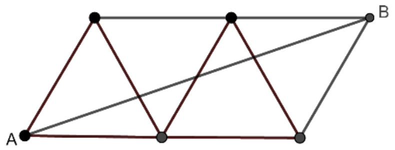
Επίσης $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 8$ άρα $\alpha + \gamma = 4$.

Αφού $\alpha + \gamma = 4$ και $\alpha + 2\gamma = 5$ τότε $5 = \alpha + 2\gamma = (\alpha + \gamma) + \gamma = 4 + \gamma$.

Άρα μοναδική πιθανή για το γ είναι η $\gamma = 1$.

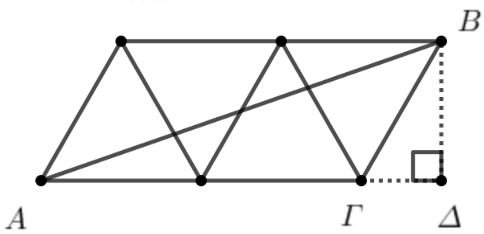
Πρόβλημα 3

Στο πιο κάτω σχήμα τα τέσσερα τρίγωνα είναι ισόπλευρα με πλευρά μήκους 2 cm. Να βρείτε το μήκος του τμήματος AB.



Προτεινόμενη Λύση

Έστω σημεία Γ, Δ όπως φαίνονται στο σχήμα



Είναι $\Gamma\Delta = 1$ cm και $B\Gamma = 2$ cm οπότε από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε

$$B\Delta^2 = B\Gamma^2 - \Gamma\Delta^2 = 4 - 1 = 3$$

Επίσης $A\Delta = 5$ cm οπότε πάλι από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε

$$AB^2 = A\Delta^2 + B\Delta^2 = 25 + 3 = 28$$

Δηλαδή $AB = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$ cm.

Πρόβλημα 4
Ένα τρένο τρέχει με σταθερή ταχύτητα και φθάνει στην είσοδο ενός τούνελ μήκους 3,3 km. Θα χρειαστεί ακριβώς ένα λεπτό από αυτή τη στιγμή για να εξέλθει πλήρως από το τούνελ αλλά θα χρειαστεί μόλις πέντε δευτερόλεπτα για να εισέλθει πλήρως μέσα στο τούνελ.

Να υπολογίσετε το μήκος του τρένου.

Προτεινόμενη Λύση

Πρώτος Τρόπος:

Κάθε πέντε δευτερόλεπτα το πίσω μέρος του τρένου φτάνει εκεί που ήταν η αρχή του τρένου. Από τη στιγμή που το τρένο θα μπει πλήρως μέσα στο τούνελ, χρειάζεται $60-5=55$ δευτερόλεπτα μέχρι να βγει πλήρως από το τούνελ. Δηλαδή το τούνελ έχει μήκος όσο και $\frac{55}{5}=11$ τρένα. Άρα το τρένο έχει μήκος ίσο με $\frac{3300}{11}=300\text{ m}$.

Δεύτερος Τρόπος:

Έστω v η ταχύτητα του τρένου σε μέτρα ανά δευτερόλεπτο, και έστω L το μήκος του τρένου σε μέτρα. Τότε έχουμε

$$v=\frac{L+3300}{60}=\frac{L}{5}$$

Άρα $L+3300=12L.$ Επομένως $L=\frac{3300}{11}=300\text{ m}$.

Σημείωση: Το $L+3300$ είναι η συνολική απόσταση που ταξιδεύει το τρένο σε ένα λεπτό (για να μπει πλήρως μέσα στο τούνελ και μετά να βγει πλήρως από αυτό).

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2020

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 07/11/2020 *Ώρα Εξέτασης: 10:00-12:00*

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1

Αν $0 < \beta < \alpha$ και $\alpha^2 + \beta^2 = 6\alpha\beta$ να υπολογίσετε την παράσταση $\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$.

Προτεινόμενη Λύση

Πρώτος Τρόπος:

Θεωρούμε $A = \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$. Τότε

$$A^2 = \frac{(\alpha+\beta)^2}{(\alpha-\beta)^2} = \frac{\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2}{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2} = \frac{(\alpha^2+\beta^2) + 2\alpha\beta}{(\alpha^2+\beta^2) - 2\alpha\beta} = \frac{6\alpha\beta + 2\alpha\beta}{6\alpha\beta - 2\alpha\beta} = \frac{8\alpha\beta}{4\alpha\beta} = 2$$

Συνεπώς $A = \sqrt{2}$ αφού από τις συνθήκες είναι $A > 0$.

Δεύτερος Τρόπος:

Διαιρώντας και τα δύο μέλη της $\alpha^2 + \beta^2 = 6\alpha\beta$ με β^2 παίρνουμε

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + 1 = 6\frac{\alpha}{\beta}$$

Θέτουμε λοιπόν $x = \frac{\alpha}{\beta}$ και παίρνουμε

$$x^2 + 1 = 6x \Longrightarrow x^2 - 6x + 1 = 0 \Longrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{32}}{2} = 3 \pm \sqrt{8}$$

Επειδή όμως $a > b$, τότε $x > 1$, άρα $x = 3 + \sqrt{8}$ αφού $3 - \sqrt{8} < 3 - 2 = 1$.

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} = \frac{x+1}{x-1} = \frac{4+\sqrt{8}}{2+\sqrt{8}} = \frac{(4+\sqrt{8})}{(2+\sqrt{8})} \cdot \frac{(2-\sqrt{8})}{(2-\sqrt{8})} = \frac{8 - 8 - 4\sqrt{8} + 2\sqrt{8}}{4-8} = \frac{-2\sqrt{8}}{-4} = \frac{\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2}$$

Πρόβλημα 2

Στο μάθημα των Μαθηματικών, το 60% των αγοριών και το 70% των κοριτσιών, πέρασαν την Β΄ Τάξη. Αν ο αριθμός των επιτυχόντων αγοριών, είναι ίσος με τον αριθμό των επιτυχουσών κοριτσιών, να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που πέρασαν την Β΄ τάξη.

Προτεινόμενη Λύση

Έστω α ο αριθμός των αγοριών και κ ο αριθμός των κοριτσιών. Τότε πέρασαν

$\frac{60}{100}\alpha = \frac{6\alpha}{10}$ αγόρια και $\frac{70}{100}\kappa = \frac{7\kappa}{10}$ κορίτσια

Είναι

$$\frac{6\alpha}{10} = \frac{7\kappa}{10} \Longrightarrow \kappa = \frac{6\alpha}{7}$$

Όλα τα παιδιά που πέρασαν είναι

$$\frac{6\alpha}{10} + \frac{6\alpha}{10} = \frac{12\alpha}{10}$$

Όλα τα παιδιά της τάξης είναι

$$\alpha + \kappa = \alpha + \frac{6\alpha}{7} = \frac{13\alpha}{7}$$

Το ποσοστό των παιδιών που πέρασαν είναι

$$\frac{12\alpha/10}{13\alpha/7} \times 100\% = \frac{840}{13}\% \approx 64{,}6\%$$

Πρόβλημα 3

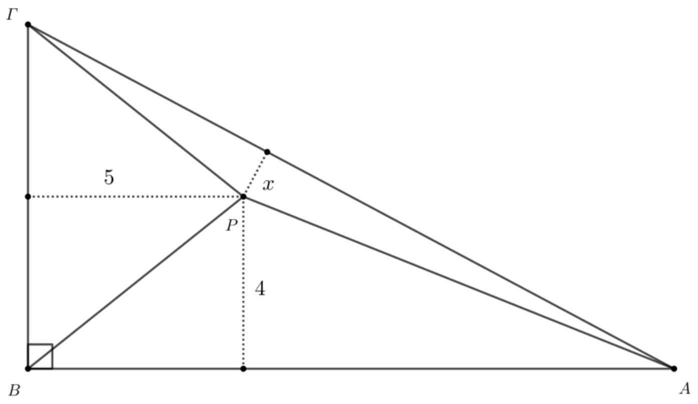
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 15$ cm, $B\Gamma = 8$ cm και $\Gamma A = 17$ cm. Σημείο P βρίσκεται μέσα στο τρίγωνο έτσι ώστε η απόστασή του από την πλευρά AB να είναι 4 cm και από την πλευρά $B\Gamma$ να είναι 5 cm. Να βρείτε την απόσταση του σημείου P από την πλευρά $A\Gamma$.

Προτεινόμενη Λύση

Ισχύει ότι

$$AB^2 + B\Gamma^2 = 15^2 + 8^2 = 225 + 64 = 289 = 17^2 = A\Gamma^2$$

Επομένως το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.



Έστω x η απόσταση του σημείου P από την πλευρά ΓA. Τότε

$$E_{AB\Gamma} = E_{PAB} + E_{PA\Gamma} + E_{PB\Gamma} = \frac{15 \cdot 4}{2} + \frac{8 \cdot 5}{2} + \frac{17x}{2} = \frac{100 + 17x}{2}$$

Όμως

$$E_{AB\Gamma} = \frac{15 \cdot 8}{2} = 60 \Longrightarrow 100 + 17x = 120 \Longrightarrow 17x = 20 \Longrightarrow x = \frac{20}{17} \text{ cm}$$

Πρόβλημα 4

Να βρείτε δύο θετικούς ακέραιους αριθμούς α, β, ώστε να ισχύουν όλα τα πιο κάτω:

- Ο α είναι τέλειο τετράγωνο.
- $\alpha \geq \beta + 2$
- $\beta \geq 10$
- Το πηλίκο της διαίρεσης του α με το β ισούται με το τετράγωνο του υπολοίπου της ίδιας διαίρεσης.

Προτεινόμενη Λύση

Έστω π και υ το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης αντίστοιχα. Τότε $\pi = \upsilon^2$ και

$$\alpha = \pi\beta + \upsilon = \upsilon^2\beta + \upsilon = \upsilon(\upsilon\beta + 1)$$

Δοκιμάζουμε $\upsilon = 4$. Τότε $\alpha = 4(4\beta + 1)$ οπότε θέλουμε το $4\beta + 1$ να είναι τέλειο τετράγωνο. Μπορούμε π.χ. να πάρουμε $\beta = 12$. Τότε $\alpha = 4 \cdot 49 = (2 \cdot 7)^2 = 14^2 = 196$.

Έλεγχος: Αν $\alpha = 196$ και $\beta = 12$ τότε $196 = 16 \cdot 12 + 4$ άρα $\pi = 16$ και $\upsilon = 4$. Εύκολα τώρα βλέπουμε ότι όλες οι συνθήκες ικανοποιούνται.

Σημείωση: Υπάρχουν και άλλες αποδεικτές λύσεις. Σε όλες, το υπόλοιπο υ θα είναι αναγκαστικά τέλειο τετράγωνο.