

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΘΕΜΑ 4

ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΥ Γ.

Έστω $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συναρτήσεις για τις οποίες :

- $xf'(x) + 1 = 2xe^{-f(x)}$ για κάθε $x > 0$,
- $f(1) = \lim_{x \rightarrow 0} [(e^{2x-x} - 1) \ln(2\eta x)]$,
- $g(x) = \begin{cases} xf(x), & 0 < x \leq 1 \\ \frac{f(x)}{x}, & x > 1 \end{cases}$.

- i. Να δείξετε ότι $f(1) = 0$.
- ii. Να δείξετε ότι $f(x) = \ln x$, για κάθε $x > 0$.
- iii. Να βρείτε το $\lim_{t \rightarrow \infty} [f(e^t + 1) - x]$.
- iv. Να εξετάσετε αν η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.
- v. Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- vi. Να προσδιορίσετε, αν υπάρχουν τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g .
- vii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης g .
- viii. Να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της g και της ευθείας (ε): $y = \alpha^2 + 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
- ix. Να μελετήσετε την g ως προς την κυρτότητα και να εξετάσετε αν παρουσιάζει σημεία καμπής.
- x. Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου το οποίο περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g , τον άξονα x' και τις ευθείες $x = \sqrt{2}$ και $x = e$.
- xi. Να γίνει πίνακας μεταβολής και με τη βοήθειά του η γραφική παράσταση της g . Στο σχήμα αυτό, να γραμμοσκιάσετε το εμβαδό του χωρίου του προηγούμενου ερωτήματος.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΘΕΜΑ 4

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε:

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [(e^{2\ln x} - 1) \cdot \ln(2\ln x)] \stackrel{x \rightarrow 0^+}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} [(e^u - 1) \ln u] = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\ln u}{\frac{1}{e^u - 1}} \stackrel{\infty/\infty}{=} \text{DLH.}$$

$$= - \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{(e^u - 1)^2}{ue^u} \stackrel{\infty/\infty}{=} - \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{2e^u(e^u - 1)}{e^u(u + 1)} = - 2 \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{e^u - 1}{u + 1} = - 2 \cdot \frac{e^0 - 1}{0 + 1} = - 2 \cdot \frac{1 - 1}{1} = 0 \Rightarrow$$

$$\rightarrow f(1) = 0.$$

ii) $\forall x > 0$ έχουμε:

$$xf'(x) + 1 = 2xe^{-f(x)} \stackrel{-e^{-f(x)}}{\iff} xe^{f(x)} \cdot f'(x) + e^{f(x)} = 2x \Leftrightarrow (x \cdot e^{f(x)})' = (x^2)' \Leftrightarrow xe^{f(x)} = x^2 + c, c \in \mathbb{R} \stackrel{x \neq 0}{\iff} e^{f(x)} = x + \frac{c}{x}, c \in \mathbb{R}$$

Εξαλλού: $e^{f(1)} = 1 + c = e^0 \Leftrightarrow c = 0$. Οποτε, $e^{f(x)} = x, \forall x > 0$. Άρα:

$$f(x) = \ln x, x > 0.$$

iii) Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(e^x + 1) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(e^x + 1) - \ln e^x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{e^x + 1}{e^x} \right) \quad (1)$$

$$\text{Όμως: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{e^x} \stackrel{\infty/\infty}{=} \text{DLH.} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1. \text{ Άρα, } \text{η (1)} \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(e^x + 1) - x] = \ln 1 = 0.$$

iv) Είναι: $g(x) = \begin{cases} x \cdot \ln x, & 0 < x \leq 1 \\ \frac{\ln x}{x}, & x > 1 \end{cases}$. Έχουμε:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x \ln x - 0}{x - 1} \stackrel{\infty/\infty}{=} \text{DLH.} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln x + 1}{1} = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{\ln x}{x} - 0}{x - 1} \stackrel{\infty/\infty}{=} \text{DLH.} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1 - \ln x}{x^2}}{1} = 1$$

Άρα, η g είναι παραγωγήσιμη στο $x_0 = 1$.

v) Η g είναι παραγωγήσιμη στο $(0, 1)$ ως γινόμενο παραγωγήσιμων συναρτήσεων, παραγωγήσιμη στο $(1, +\infty)$ ως πολικό παραγωγήσιμων και παραγωγήσιμη στο $x_0 = 1$. Άρα, η g είναι παραγωγήσιμη (άρα και συνεχής) στο $(0, +\infty)$ με:

$$g'(x) = \begin{cases} \ln x + 1, & 0 < x \leq 1 \\ \frac{1 - \ln x}{x^2}, & x > 1 \end{cases} \quad 0, \text{ ρίζες και το πρώτο μέρος της } g' \text{ και το μονοτο-$$

νία της g φαίνονται στον πίνακα:

x	0	$1/e$	1	e	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+	0	-
$g(x)$	↑↑	↑↑	↑↑	↑↑	↑↑

vi) Η g είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, οπότε εξετάζουμε για κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x_0 = 0$. Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\infty/\infty}{\text{DLH.}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x^2} = 0.$$

Άρα, η C_g δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

• Εξετάζουμε για ασύμπτωτη στο $+\infty$. Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\infty/\infty}{\text{DLH.}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{1} = 0.$$

Άρα, η C_g έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ τον άξονα x' ($y=0$).

vii) Η g είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$. Έχουμε:

$$\bullet g((0, e^{-1})) \stackrel{g:\mathbb{R}}{=} [g(e^{-1}), \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)] = [-e^{-1}, 0]$$

$$\bullet g([e^{-1}, e]) \stackrel{g:\mathbb{R}}{=} [g(e^{-1}), g(e)] = [-e^{-1}, e^{-1}]$$

$$\bullet g([e, +\infty)) \stackrel{g:\mathbb{R}}{=} (\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x), g(e)) = (0, e^{-1}).$$

Άρα, $g(D_g) = [-e^{-1}, e^{-1}]$.

viii) $\forall a \in \mathbb{R}$ ισχύει: $a^2 + 1 \geq 1$. Ακομη, $\forall x \in (0, +\infty)$ ισχύει: $-e^{-1} \leq g(x) \leq e^{-1}$.

Οπότε, η εξίσωση $f(x) = a^2 + 1$ έχει αδύνατα $\forall a \in \mathbb{R}$. Άρα, η ευθεία $y = a^2 + 1$, $a \in \mathbb{R}$, δεν τέμνει την C_g .

ix) Έχουμε:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{g'(x) - g'(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln x + x - 1}{x - 1} \stackrel{0/0}{\text{DLH.}} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1/x + 1}{1} = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g'(x) - g'(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1 - \ln x}{x^2} - 1}{x - 1} \stackrel{0/0}{\text{DLH.}} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1 - \ln x}{x^2} - 1}{x^2} = -3.$$

Άρα, η g' δεν είναι παραγωγήσιμη στο $x_0 = 1$.

Η g' είναι παραγωγήσιμη στο $(0, 1)$ και στο $(1, +\infty)$ ως πολικό παραγωγήσιμη συναρτήσεων με:

$$g''(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < x < 1 \\ \frac{1 - \ln x - 3}{x^3}, & x > 1 \end{cases} \quad \text{Οι ρίζες και το πρόσημο της } g'' \text{ και τα}$$

κοιλα των C_g φαίνονται στον πίνακα:

x	0	1	$e^{3/2}$	$+\infty$
$g''(x)$	+	-	0	+
$g(x)$	U	I	U	

I.K. I.K.

x) Η g είναι συνεχής και λογική: $\sqrt{2} \leq x \leq e \xrightarrow{g \text{ is } C^1} g(\sqrt{2}) \leq g(x) \leq g(e) \Rightarrow g(x) > 0$.

Για το γνωστόμενο εμβαδόν έχουμε:

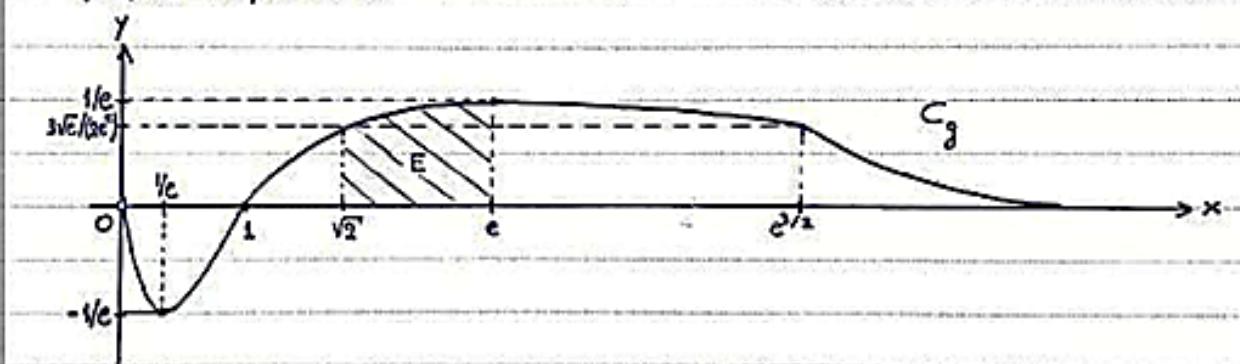
$$E = \int_{\sqrt{2}}^e |g(x)| dx = \int_{\sqrt{2}}^e \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} \cdot \int_{\sqrt{2}}^e 2 \cdot (\ln x) \cdot (\ln x)' dx = \frac{1}{2} \cdot \int_{\sqrt{2}}^e (\ln^2 x)' dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot [\ln^2 x]_{\sqrt{2}}^e = \frac{1}{2} (\ln^2 e - \ln^2 \sqrt{2}) \Rightarrow E = \frac{4 - \ln^2 2}{8} \text{ τ.μ.}$$

xi) • Πίνακας μεταβολών

x	0	\sqrt{e}	1	e	$e^{3/2}$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+	+	0	-
$g''(x)$	+	+	-	-	0	+
$g(x)$	0	$-\frac{1}{e}$	0	$\frac{1}{e}$	$\frac{3\sqrt{e}}{2e^2}$	0

• Γραφική παράσταση



Επιμέλεια Αύσω: Ελευθερίου Ν.