Άλγεβρα και Μαθηματικά Κατεύθυνσης
Β΄ Λυκείου

14ο Λύκειο Περιστερίου

Σχολικό έτος 2022-23

Το βιβλίο αυτό δημιουργήθηκε για να χρησιμοποιηθεί
συμπληρωματικά στο σχολικό βιβλίο

Χ.Δεστούνης
Σ. Μιχαήλογλου
Α. Μπλιάς
Δ. Πατσιμάς

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Γραμμικές Εξισώσεις

Κάθε εξίσωση 1ου βαθμού με 2 αγνώστους ονομάζεται γραμμική.
Η γενική της μορφή είναι $\alpha x+\beta y=\gamma$, $\alpha\neq 0$ ***ή*** $\beta\neq 0$ ***και παριστάνει μια ευθεία γραμμή.***

Σύστημα 2 γραμμικών εξισώσεων

Όταν έχουμε δύο γραμμικές εξισώσεις $\alpha x+\beta y=\gamma$ ***και*** $\alpha' x+\beta' y=\gamma'$ ***και ζητάμε τις κοινές λύσεις αυτών, τότε λέμε ότι έχουμε να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους ή, πιο σύντομα, ένα γραμμικό σύστημα 2 x 2 και γράφουμε*** $\begin{cases}\alpha x+\beta y=\gamma\\ \alpha' x+\beta' y=\gamma'\end{cases}$.
Κάθε ζεύγος αριθμών που επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις του συστήματος λέγεται λύση του συστήματος.

Επίλυση Γραμμικού Συστήματος 2x2

Γραφική επίλυση

Σχεδιάζουμε τις ευθείες που αντιπροσωπεύουν οι εξισώσεις του συστήματος. Αν:

-οι δύο ευθείες τέμνονται, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση (x_0, y_0)***,που είναι οι συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών.***

-οι δύο ευθείες είναι παράλληλες, τότε το σύστημα είναι αδύνατο, αφού δεν υπάρχει κοινό σημείο του οποίου οι συντεταγμένες να είναι λύση του συστήματος.

-οι ευθείες ταυτίζονται, τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, αφού υπάρχουν άπειρα κοινά σημεία στις δύο ευθείες.

Μέθοδος της Αντικατάστασης

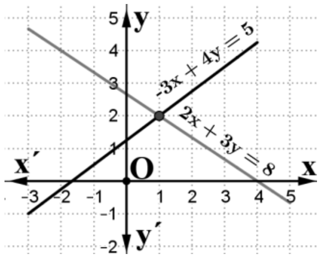
Λύνουμε μία από τις 2 εξισώσεις ως προς τον έναν άγνωστο και αντικαθιστούμε το αποτέλεσμα στην 2η εξίσωση. Έτσι προκύπτει μία εξίσωση με ένα μόνον άγνωστο. Την λύνουμε και τη λύση την αντικαθιστούμε στην 1η εξίσωση.

Μέθοδος των Αντίθετων Συντελεστών

Πολλαπλασιάζουμε και τις δύο εξισώσεις με κατάλληλο αριθμό, ώστε να προκύψουν αντίθετοι συντελεστές σε κάποιον άγνωστο. Στη συνέχεια, προσθέτουμε τις 2 εξισώσεις κατά μέλη και προκύπτει μία εξίσωση με ένα μόνον άγνωστο.

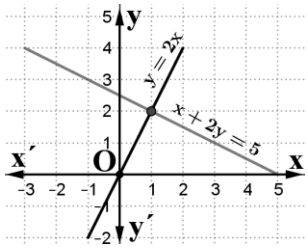
Ασκήσεις

1. Να λύσετε το σύστημα : $\begin{cases} -3x+4y=5 \\ 2x+3y=8 \end{cases}$:



α) με τη βοήθεια του διπλανού σχήματος
β) αλγεβρικά.

2. Να λύσετε το σύστημα : $\begin{cases} x+2y=5 \\ y=2x \end{cases}$:



α) με τη βοήθεια του διπλανού σχήματος
β) αλγεβρικά.

3. Να λυθούν τα συστήματα:

α) $\begin{cases} x+y=-1 \\ x-y=-21 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} 3x-5=2(y+1)-8 \\ 2(x-1)=3(1-2y)+9 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}=1 \\ 3x=2(y+3) \end{cases}$

4. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

α) $\begin{cases} 2x+9y=4 \\ 6x+27y=16 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} 4x-y=5 \\ 3y-12x=-15 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 14x+7y=7 \end{cases}$

5. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

α) $\begin{cases} \dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{4} \\ 2x-y=4 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+5}{7} \\ 3x+y=24 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3} \\ \dfrac{x-3}{5}+\dfrac{2y+4}{7}=5 \end{cases}$

6. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

α) $\begin{cases} \dfrac{2\alpha+1}{3}-\dfrac{\beta+6}{4}=\alpha-\beta \\ \dfrac{\beta-4}{2}-\dfrac{3\alpha+4}{7}=-1-\alpha \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} \dfrac{\beta+\alpha}{12}-3=\dfrac{10+\alpha}{3}-\beta \\ \dfrac{-\beta+12}{5}+\dfrac{\alpha+5}{10}=2 \end{cases}$

7. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

α) $\begin{cases} 2|x|-3|y|=2 \\ |x|+2|y|=8 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=3 \\ \sqrt{x}+3\sqrt{y}=7 \end{cases}$

8. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

α) $\begin{cases} \dfrac{2}{\omega}+\dfrac{9}{\varphi}=4 \\ \dfrac{4}{\omega}+\dfrac{3}{\varphi}=3 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{2}{\sqrt{y}}=0 \\ \dfrac{5}{\sqrt{x}}+\dfrac{4}{\sqrt{y}}=7 \end{cases}$

9. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α,β, αν γνωρίζετε ότι τα ζεύγη (1,1) και (- 1, 5) είναι λύσεις της εξίσωσης $\alpha x+\beta y-9=0$.

10. Στο δημοτικό parking μιας επαρχιακής πόλης στις 10 το πρωί, το σύνολο των δίκυκλων και τετράτροχων οχημάτων που έχουν παρκάρει είναι 830 και το πλήθος των τροχών τους 2700.
α) Να εκφράσετε τα δεδομένα με ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.
β) Να βρείτε τον αριθμό των δίκυκλων καθώς και τον αριθμό των τετράτροχων οχημάτων.

11. Σ’ ένα γκαράζ υπάρχουν συνολικά 50 οχήματα, αυτοκίνητα και ποδήλατα. Αν όλα τα οχήματα έχουν 164 ρόδες, πόσα αυτοκίνητα και πόσα ποδήλατα υπάρχουν στο γκαράζ;

12. Διαθέτουμε 200 χαρτονομίσματα των 5 και 20 ευρώ συνολικής αξίας 1750 ευρώ. Να βρείτε πόσα χαρτονομίσματα των 5 ευρώ και πόσα των 20 ευρώ έχουμε ;

13. Σε μια κάλπη βρίσκονται 100 ψηφοδέλτια δύο συνδικαλιστικών φορέων Α και Β. Αν προστεθούν στην κάλπη 3 ψηφοδέλτια του Α συνδικαλιστικού φορέα και 2 του Β συνδικαλιστικού φορέα τότε τα ψηφοδέλτια του Α θα είναι διπλάσια των ψηφοδελτίων του Β. Πόσα ψηφοδέλτια κάθε συνδικαλιστικού φορέα υπήρχαν αρχικά στην κάλπη;

14. Ένας παππούς μοιράζει ένα ποσό στα δύο εγγόνια του ηλικίας 3 και 7 ετών ανάλογα με την ηλικία τους . Να βρείτε τα ποσά που πήραν τα εγγόνια :
α) Αν το ποσό που μοίρασε είναι 1000€
β) Αν το ποσό που πήρε το εγγόνι με την μεγαλύτερη ηλικία είναι διπλάσιο του ποσού που πήρε το άλλο εγγόνι αυξημένο κατά 100 € .

15. Να βρείτε κλάσμα τέτοια ώστε αν στους δύο όρους του προσθέσουμε το 2 προκύπτει ο αριθμός 2 ενώ αν από τους όρους του αφαιρέσουμε 3 προκύπτει ο αριθμός 3.

16. Να βρείτε κλάσμα τέτοια ώστε αν στους δύο όρους του προσθέσουμε το 2 προκύπτει ο αριθμός 2 ενώ αν από τους όρους του αφαιρέσουμε 3 προκύπτει ο αριθμός 3.

Λύση γραμμικού συστήματος 2x2 με ορίζουσες

Έστω το γραμμικό σύστημα 2x2: $\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$.

Ορίζουσα D του συστήματος ονομάζεται η παράσταση $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = \alpha \cdot \beta' - \alpha' \cdot \beta$

Την ορίζουσα που προκύπτει από την D, αν στη θέση των συντελεστών του x θέσουμε τους σταθερούς όρους, συμβολίζουμε με: $D_x = \begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix} = \gamma \cdot \beta' - \gamma' \cdot \beta$.

Ομοίως, την ορίζουσα που προκύπτει από την D, αν στη θέση των συντελεστών του y θέσουμε τους σταθερούς όρους, συμβολίζουμε με:

$D_y = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix} = \alpha \cdot \gamma' - \alpha' \cdot \gamma$.

- Αν $D \neq 0$***, το σύστημα έχει μοναδική λύση*** (x, y)***, όπου*** $x = \frac{D_x}{D}$ ***και*** $y = \frac{D_y}{D}$

- Αν $D = 0$***, το σύστημα θα είναι αδύνατο ή θα έχει άπειρες λύσεις.***

Ασκήσεις

17.Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

α) $\begin{cases} \left(\sqrt{5}-1\right)x + 4y = 4\left(\sqrt{5}+1\right) \\ x + \left(\sqrt{5}+1\right)y = 6 + 2\sqrt{5} \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} \left(2+\sqrt{3}\right)x + \left(2-\sqrt{3}\right)y = 1 \\ \sqrt{3}x + \left(7\sqrt{3}-12\right)y = 3\sqrt{3} \end{cases}$

18.Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ :

α) $\begin{cases} \lambda x - y = 1 \\ 10x - 2y = \lambda - 1 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} \lambda x + y = \lambda \\ x + y = 2\lambda - 1 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} \alpha x + 2y = 4 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$

δ) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + \lambda^2 y = 1 - \lambda \end{cases}$ **ε)** $\begin{cases} x + (5\lambda - 4)y = \lambda \\ (2\lambda + 1)x + (\lambda - 4)y = 2\lambda \end{cases}$

19.Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ, να βρείτε τα κοινά σημεία των ευθειών:

α) $\varepsilon_1 : \lambda x + 2y = \lambda + 2$ και $\varepsilon_2 : (2\lambda - 1)x + (\lambda + 1)y = 2(\lambda + 1)$

β) $\varepsilon_1 : (\lambda + 2)x + 4y = 8 - 3\lambda$ και $\varepsilon_2 : 2x + (\lambda + 4)y = 8$.

20.Αν το σύστημα $\begin{cases} (\lambda - 1)x + y = 2 \\ 3x + (\lambda + 1)y = 4\lambda - 2 \end{cases}$ έχει άπειρες λύσεις, να αποδείξετε ότι το σύστημα $\begin{cases} \lambda x + (2\lambda + 1)y = 3 \\ 2x - (1 - 3\lambda)y = \lambda \end{cases}$ είναι αδύνατο.

21. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β για τους οποίους τα συστήματα $\Sigma_1 : \begin{cases} (\alpha - 6)\ x - \beta y = 2 \\ \alpha x + y = 0 \end{cases}$ και $\Sigma_2 : \begin{cases} x + 3y = 1 \\ -x + \alpha y = 2 \end{cases}$ είναι συγχρόνως αδύνατα.

22. Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} 2x - 3y = 11 - \lambda \\ x + 5y - \lambda = 7 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι το σύστημα έχει λύση για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό λ.

β) Να βρείτε τη μοναδική λύση .

γ) Για ποια τιμή του λ η λύση (x, y) που βρήκατε στο (β) επαληθεύει τη σχέση: $x + y = \dfrac{59}{13}$.

23. Σε ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους x, y ισχύει: $\begin{cases} D_x + D_y = D \\ D_x - D_y = 3D \end{cases}$. Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση, να βρεθεί η λύση αυτή.

24. Σε ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους x, y ισχύει: $D_x^2 + D_y^2 = 2D_xD_y$ και $D \neq 0$. Αν $x + y = 6$, να βρεθούν τα x, y.

25. Σε ένα γραμμικό σύστημα 2x2 με αγνώστους x,y, για τις ορίζουσες του $D,\ D_x,\ D_y$ ισχύει η σχέση: $2D_x^2 - 2D_xD_y + D_y^2 = 0$. Να βρείτε τη λύση του συστήματος, αν γνωρίζετε ότι είναι μοναδική.

26. Σε ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους x, y ισχύει: $D^2 + D_x^2 + D_y^2 = 4D + 2D_x - 5$

α) Να αποδείξετε ότι: $(D-2)^2 + (D_x - 1)^2 + D_y^2 = 0$.

β) Να βρείτε τη λύση του συστήματος.

27. Δίνονται οι ευθείες ε_1 και ε_2 με εξισώσεις $x + (\lambda + 2)y = 3,\ (\lambda - 2)x + 5y = 3$ αντίστοιχα και $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, να βρείτε τη σχετική θέση των δύο ευθειών.

β) Στην περίπτωση που οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Α των δύο ευθειών.

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ για την οποία το σημείο Α ανήκει στην ευθεία με εξίσωση: $x + 2y = 3$.(τράπεζα θεμάτων)

Γραμμικό σύστημα 3x3

Όταν έχουμε τρεις γραμμικές εξισώσεις με τρεις αγνώστους x,y,z

$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = \delta_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = \delta_2 \\ \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z = \delta_3 \end{cases}$$

και θέλουμε να βρούμε τις κοινές τους λύσεις τότε λέμε ότι έχουμε να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους ή, πιο σύντομα, ένα γραμμικό σύστημα 3x3.
Η πιο συνηθισμένη μέθοδος επίλυσης ενός τέτοιου συστήματος είναι η μέθοδος αντικατάστασης.
Λύνουμε τη μία από τις τρεις εξισώσεις ως προς τον έναν άγνωστο και τον αντικαθιστούμε στις δύο άλλες εξισώσεις. Έτσι οι δύο τελευταίες εξισώσεις μετατρέπονται σε γραμμικό σύστημα 2x2, το οποίο το λύνουμε με έναν από τους προηγούμενους τρόπους. Αφού προσδιορίσουμε τους δύο αγνώστους αντικαθιστούμε τις τιμές τους στην πρώτη εξίσωση απ' όπου υπολογίζουμε την τιμή και του τρίτου αγνώστου.

Ασκήσεις

28. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

α) $\begin{cases} x + y + \omega = 1 \\ 2x + y - \omega = 6 \\ x - y + 2\omega = -5 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} x - y - \omega = -1 \\ x + 2y - \omega = 8 \\ 3x - y + 2\omega = 3 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} 2x + y + \omega = 1 \\ 4x - y + \omega = -5 \\ -x + y + 2\omega = 5 \end{cases}$

29. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

α) $\begin{cases} x + y + \omega = 0 \\ 2x + y - \omega = 0 \\ x - y + 2\omega = 0 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} 2x - y - 3\omega = 0 \\ x + 2y - 4\omega = 0 \\ 8x - 4y - 12\omega = 0 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} 2x + y + \omega = 0 \\ 4x - y + \omega = 0 \\ -x + y + 2\omega = 0 \end{cases}$

30. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

α) $\begin{cases} x + y = 6 \\ y + \omega = -4 \\ \omega + x = 18 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{4} \\ \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{\omega} = 0 \\ \dfrac{1}{\omega} + \dfrac{1}{x} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} \dfrac{5}{x} - \dfrac{3}{y} - \dfrac{4}{\omega} = 0 \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{\omega} = 4 \\ \dfrac{3}{y} + \dfrac{1}{\omega} = -2 \end{cases}$

31. Για τις ηλικίες των μελών μιας τριμελούς οικογένειας ισχύουν τα παρακάτω:
Η ηλικία της μητέρας είναι τριπλάσια από την ηλικία του παιδιού. Ο λόγος της ηλικίας του πατέρα προς την ηλικία του παιδιού ισούται με $\frac{11}{3}$. Επιπλέον το άθροισμα των ηλικιών και των τριών ισούται με 115 χρόνια.

α) Να εκφράσετε τα δεδομένα με ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρείς αγνώστους.

β) Να βρείτε την ηλικία του καθενός.(τράπεζα θεμάτων)

32. Κάποιος μοιράζει με διαθήκη ένα ποσό σε τρεις ανιψιούς του Α, Β, Γ άνισα, ανάλογα προς τους αριθμούς 7, 6 και 5. Στη συνέχεια, με μια δεύτερη διαθήκη, αλλάζει τα μερίδια και διανέμει το ποσό ανάλογα προς τους αριθμούς 6, 5 και 4.

α) Ποιος από τους κληρονόμους κερδίζει με τη νέα μοιρασιά; Ποιος χάνει;

β) Ένας από τους κληρονόμους κερδίζει με τη δεύτερη μοιρασιά 6.000€ περισσότερο απ' ότι κερδίζει με την πρώτη. Πόση ήταν η κληρονομιά και πόσο κάθε μερίδιο με τη δεύτερη μοιρασιά;

33. Να βρείτε τριψήφιο φυσικό αριθμό αν:

α) το άθροισμα των ψηφίων του είναι 24.

β) ο αριθμός ελαττώνεται κατά 9 στην περίπτωση που αλλάξει η θέση των δύο τελευταίων ψηφίων του.

γ) ο αριθμός ελαττώνεται κατά 90 στην περίπτωση που αλλάξει η θέση των δύο πρώτων ψηφίων του.

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

34. Δίνονται οι ευθείες: $\varepsilon_1 : 2x + y = 6$ και $\varepsilon_2 : x - 2y = -2$.

α) Να προσδιορίσετε αλγεβρικά το κοινό τους σημείο Μ.

β) Να δειχθεί ότι η ευθεία $\varepsilon_3 :\ 3x + y = 8$ διέρχεται από το Μ.

35.α) Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} 2x - 4y = -2 \\ 5x - 10y = 3 \end{cases}$.

β) Τι συμπεραίνετε για τη σχετική θέση των ευθειών $\varepsilon_1 : 2x - 4y = -2$ και $\varepsilon_2 : 5x - 10y = 3$;

36. Ο Κώστας καταθέτει σε μια τράπεζα 15 χαρτονομίσματα των 20 € και 50 €. Συμβολίζουμε με x και y το πλήθος των χαρτονομισμάτων των 20 € και 50 € αντίστοιχα.

α) i. Δίνονται οι εξισώσεις: 1. $y = 15 - x$ 2. $y - x = 15$
Να επιλέξετε ποια από τις δύο παραπάνω εξισώσεις περιγράφει την σχέση των x και y. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii. Η συνολική αξία των χρημάτων είναι 480 €.
Δίνονται, ακόμα, οι εξισώσεις:
3. $50y - 20x = 480$ 4. $20x + 50y = 480$

Να επιλέξετε ποια από τις δύο παραπάνω εξισώσεις περιγράφει την συνολική αξία των χρημάτων σε σχέση με τα x και y . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Επιλύοντας το σύστημα των δύο εξισώσεων που επιλέξατε στα ερωτήματα αi) και αii) να βρείτε πόσα χαρτονομίσματα των 20 € και 50 € κατάθεσε ο Κώστας.

37.Δίνεται το γραμμικό σύστημα $\begin{cases} 3x+2y=8 \\ 2x-y=3 \end{cases}$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί το ζεύγος (0,4) δεν αποτελεί λύση του παραπάνω συστήματος .

β) Να λύσετε το παραπάνω σύστημα..

γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών $(\varepsilon_1): 3x+2y=8$ και $(\varepsilon_2): 2x-y=3$.

38.α) Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} 5x-y=-1 \\ 3x+y=2 \end{cases}$.

β) Να σχεδιάσετε τις ευθείες $(\varepsilon_1): 5x-y=-1$ και $(\varepsilon_2): 3x+y=2$ και να ερμηνεύσετε γραφικά το αποτέλεσμα του α) ερωτήματος. (Μονάδες 13)

39.Σε μια συνεστίαση μεταξύ συγγενών παρευρίσκονται οι γονείς με τα παιδιά τους. Στο τραπέζι υπάρχουν 5 παιδιά επιπλέον από τους γονείς. Κάθε γονιός πλήρωσε 12€ και κάθε παιδί τα μισά.

Ο συνολικός λογαριασμός ήταν 300€.

α) Αν x το πλήθος των γονιών και y το πλήθος των παιδιών, να διαλέξετε από τις παρακάτω επιλογές, ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους που εκφράζει τα δεδομένα του παραπάνω προβλήματος.

Α. $\begin{cases} x+y+5=0 \\ 12x+6y=300 \end{cases}$ **Β.** $\begin{cases} x-y=5 \\ 6x+12y=300 \end{cases}$

Γ. $\begin{cases} y=x+5 \\ 12x+6y=300 \end{cases}$ **Δ.** $\begin{cases} y=x+5 \\ 6x+12y=300 \end{cases}$

β) Από τη λύση του συστήματος που επιλέξατε στο α) ερώτημα να βρείτε πόσοι γονείς και πόσα παιδιά υπήρχαν στο τραπέζι.

40. Ο Κώστας έχει τρία παιδιά. Δύο δίδυμα κορίτσια και ένα αγόρι. Στην ερώτηση πόσων χρονών είναι τα παιδιά του απάντησε ως εξής.

1. Το άθροισμα των ηλικιών και των τριών παιδιών είναι 14
2. Το γινόμενο της ηλικίας της κόρης μου επί την ηλικία του γιου μου είναι 24
3. Το άθροισμα των ηλικιών των κοριτσιών είναι μικρότερο από την ηλικία του αγοριού.

α) Να γράψετε τις εξισώσεις που περιγράφουν τα στοιχεία 1. και 2. που έδωσε ο Κώστας.

β) Να βρείτε τις ηλικίες των παιδιών του Κώστα.

41. Μια παρέα τεσσάρων φίλων παραγγέλνει σάντουιτς. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η παραγγελία τους. Τα συστατικά των σάντουιτς είναι βιολογικά και το ψωμί είναι ολικής άλεσης (βιολογικό). Το ψωμί για κάθε σάντουιτς έχει κόστος 0,3 ευρώ. Το πρώτο σάντουιτς έχει 2 φέτες ζαμπόν, 4 φέτες τυρί, δεν έχει γαλοπούλα και κοστίζει 3,8 ευρώ. Το δεύτερο έχει 1 φέτα ζαμπόν, 2 φέτες τυρί, 3 φέτες γαλοπούλα και κοστίζει 3,55 ευρώ. Το τρίτο έχει 3 φέτες ζαμπόν, δεν έχει τυρί, έχει 3 φέτες γαλοπούλα και κοστίζει 4, 05 ευρώ. Ο σερβιτόρος δεν έχει προλάβει να συμπληρώσει το κόστος του τελευταίου σάντουιτς.

σάντουιτς	φέτες ζαμπόν	φέτες τυρί	φέτες γαλοπούλα	ψωμί	κόστος
1ο	2	4	0	0,3€	3,8 €
2ο	1	2	3	0,3€	3,55 €
3ο	3	0	3	0,3€	4,05 €
4ο	2	2	1	0,3€	
				Σύνολο	

α) Να εκφράσετε τα δεδομένα του προβλήματος με ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρείς αγνώστους.

β) Να βρείτε πόσο κοστίζει η μία φέτα τυρί, η μία φέτα γαλοπούλα και η μία φέτα ζαμπόν.

γ) Πόσα χρήματα θα πληρώσουν συνολικά οι τέσσερεις φίλοι για την παραγγελία τους;

ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Μη γραμμικά συστήματα λέγονται τα συστήματα στα οποία μία ή παραπάνω εξισώσεις δεν είναι γραμμικές.
Οι λύσεις ενός μη γραμμικού συστήματος μπορεί να είναι παραπάνω από μία.

Επίλυση μη Γραμμικού Συστήματος

Γραφική επίλυση

Σχεδιάζουμε τις γραμμές που αντιπροσωπεύουν οι εξισώσεις του συστήματος. Αν: οι γραμμές τέμνονται, τότε το σύστημα έχει λύσεις τα σημεία τομής

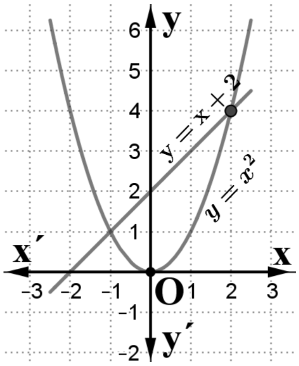
Μέθοδος της Αντικατάστασης

Λύνουμε τη γραμμική εξίσωση (αν υπάρχει) ως προς ένα άγνωστο και αντικαθιστούμε το αποτέλεσμα στην 2η εξίσωση. Έτσι προκύπτει μία εξίσωση με ένα μόνον άγνωστο. Την λύνουμε και τη λύση (τις λύσεις) την αντικαθιστούμε στην 1η εξίσωση.

Ασκήσεις

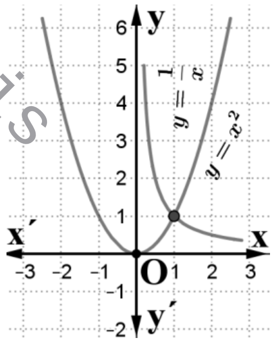
42. Να λύσετε το σύστημα : $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases}$:

α) με τη βοήθεια του διπλανού σχήματος
β) αλγεβρικά.



43. Να λύσετε το σύστημα : $\begin{cases} y = x^2 \\ y = \dfrac{1}{x} \end{cases}$;

α) με τη βοήθεια του διπλανού σχήματος
β) αλγεβρικά.



44. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα και να τα ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

α) $\begin{cases} 2x^2 - y = 0 \\ 6x - y = 4 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x - y = 0 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ xy=1 \end{cases}$ **δ)** $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=42 \\ x^2-y^2+x-y=18 \end{cases}$

45. Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x^2-y^2=7 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} x-y=2 \\ x^2+xy=60 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} x^2-9y^2=16 \\ x+3y=2 \end{cases}$

δ) $\begin{cases} x+y=7 \\ x^2+y^2=2xy \end{cases}$ **ε)** $\begin{cases} 2x^2-y=0 \\ 6x-y=4 \end{cases}$ **στ)** $\begin{cases} x+y=6 \\ x+y+xy=11 \end{cases}$

ζ) $\begin{cases} x^2+y^2=34 \\ x+y=8 \end{cases}$

46. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

α) $\begin{cases} 2x^2+y^2-3x+y=11 \\ 5x-y=2 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} y^2+xy=10 \\ 5x+y=17 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} x^2+xy=3 \\ 3x+2y=7 \end{cases}$

47. Να λυθούν τα συστήματα :

α) $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ xy=6 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} y^2-x^2=3 \\ x\cdot y=2 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} x^2+xy=12 \\ y^2+xy=24 \end{cases}$ **δ)** $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=12 \\ xy-2(x+y)=-4 \end{cases}$

ε) $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^3+xy^2+yx^2+y^3=15 \end{cases}$ **στ)** $\begin{cases} x^2+y^2+3xy=-4 \\ x+y=2 \end{cases}$.

48. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα :

α) $\begin{cases} x+y+x\cdot y=23 \\ xy(x+y)=120 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} xy=2 \\ y\omega=8 \\ x\omega=4 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} x^2+xy=10 \\ y^2+xy=15 \end{cases}$ **δ)** $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{5}{2} \\ x+y=3 \end{cases}$

49. Δίνεται η ευθεία $y=\lambda x-2$ και η παραβολή $y=2x^2$. Να προσδιορίσετε το $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε η ευθεία να έχει με την παραβολή:
α) ένα κοινό σημείο **β)** δύο κοινά σημεία **γ)** κανένα κοινό σημείο.

50.Να βρείτε τις διαστάσεις ορθογωνίου που έχει περίμετρο 14m και εμβαδόν 10m.

51. Να βρείτε το εμβαδόν τετραγώνου που έχει πλευρά ίση με τη βάση ισοσκελούς τριγώνου ,αν γνωρίζουμε ότι το τρίγωνο έχει περίμετρο ίση με 10 m και το γινόμενο δύο άνισων πλευρών του είναι ίσο με 12m.

52.Δίνεται η ευθεία $y=\lambda x-2$ και η παραβολή $y=2x^2$. Να προσδιορίσετε το $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε η ευθεία να έχει με την παραβολή:
α) ένα κοινό σημείο **β)** δύο κοινά σημεία **γ)** κανένα κοινό σημείο.

53.Δύο πραγματικοί αριθμοί α,β έχουν διαφορά 10 και η διαφορά των τετραγώνων τους είναι 200 .Να υπολογίσετε το άθροισμα τους καθώς και τους αριθμούς αυτούς.

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

54.α) Να λύσετε το σύστημα $(\Sigma_1):\begin{cases} xy=6 \\ x^2+y^2=13 \end{cases}$.

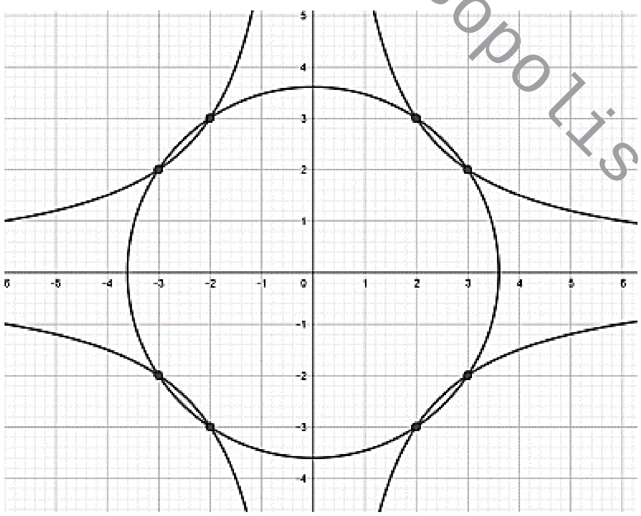
β) Είναι όλες οι λύσεις του συστήματος (Σ_1) λύσεις και του $(\Sigma_2):\begin{cases} |xy|=6 \\ x^2+y^2=13 \end{cases}$;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Η γεωμετρική αναπαράσταση του συστήματος (Σ_2) φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Με βάση το σχήμα,

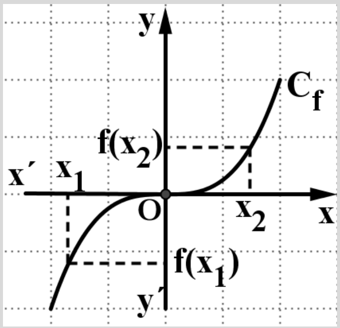
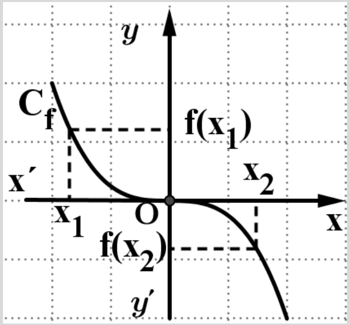
i. να βρείτε τις λύσεις του (Σ_2) .

ii. να παραστήσετε γεωμετρικά το σύστημα (Σ_1) σημειώνοντας τις λύσεις του.



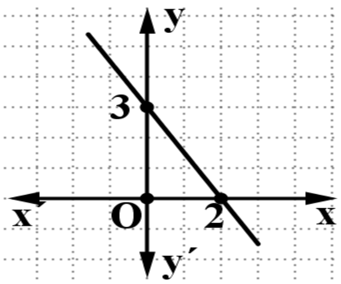
ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Μονοτονία

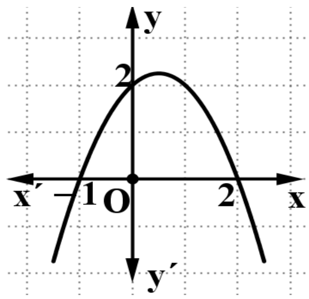
Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ΄ ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ είναι $f(x_1) < f(x_2)$ ***Συμβολισμός: Για να δηλώσουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ, γράφουμε:*** ***f ↗ στο Δ.***	
Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ΄ ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ είναι $f(x_1) > f(x_2)$ ***Συμβολισμός: Για να δηλώσουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ, γράφουμε:*** ***f ↘ στο Δ.***	

Ασκήσεις

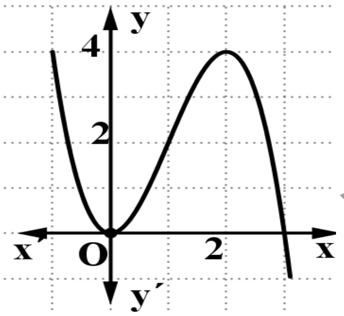
1. Με τη βοήθεια των γραφικών τους παραστάσεων να γράψετε τα διαστήματα στα οποία κάθε συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα ή σταθερή.



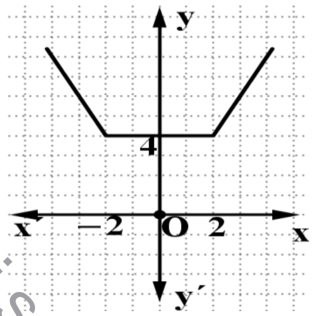
$\mathbf{f(x) = -\frac{3}{2}x + 3}$



$\mathbf{g(x) = -x^2 + x + 2}$



$\mathbf{h(x) = -x^3 + 3x^2}$



$\mathbf{t(x) = |x-2| + |x+2|}$

2. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f(x) = -x + 4$ **β)** $f(x) = 6x - 38$ **γ)** $f(x) = \sqrt{3 - x}$

δ) $f(x) = 3 - 2\sqrt{x + 1}$ **ε)** $f(x) = \frac{3}{x}$ **στ)** $f(x) = \frac{1}{x^2}$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 9} & , x \le 0 \\ -2x + 8 & , x > 0 \end{cases}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

β) Να βρείτε τις τιμές $f(-4)$ και $f(1)$.

γ) Να εξετάσετε αν η f είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της.

4. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα με πεδίο ορισμού το R 0<α<β να διατάξετε από την μικρότερη προς την μεγαλύτερη τις τιμές:
$\mathrm{f}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right),\ \ \mathrm{f}(\alpha),\mathrm{f}(\beta),\mathrm{f}(0),\mathrm{f}(\alpha-\beta),\ \mathrm{f}\left(\dfrac{\alpha+2\beta}{3}\right)$

5. Δίνεται συνάρτηση f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:
α) $f(3x+2)<f(x-4)$ **β)** $f(x-1)>f(3)$ **γ)** $f(x-2)-f(2x-3)<0$

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=4x^3+x-5,\ x\in\mathbb{R}$.
α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.
β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x-3)>0$.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=8-x^3,\ x\in\mathbb{R}$.
α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.
β) Να λύσετε την ανίσωση $f\big(f(x)-8\big)<8$

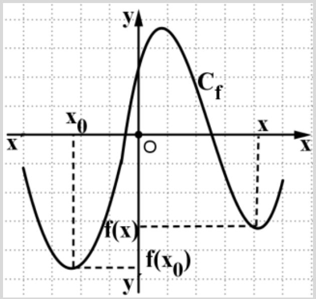
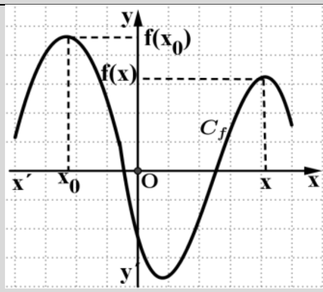
8. Έστω ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο R . Αν $f\left(\dfrac{1}{3}\right)>f\left(\dfrac{2}{5}\right)$ και η C_f διέρχεται από το σημείο Α(1, 4) να λύσετε την ανίσωση $f\left(|3x-1|\right)\le 4$

9. Έστω γνησίως μονότονη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$,για την οποία ισχύει $f(x+3)=x-1$.
α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
β) Να λύσετε την ανίσωση $f\left(x^2\right)\le 0$.

10. Η γραφική παράσταση της γνησίως μονότονης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}(-1,3)$ και $\mathrm{B}(2,1)$.
α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.
β) Να λύσετε την ανίσωση $f\left(\left(x^4-4x^2+4\right)-1\right)\le 3$.
γ) Να λύσετε την ανίσωση $f\left(|3x-6|\right)\le f\left(|3x|\right)$.

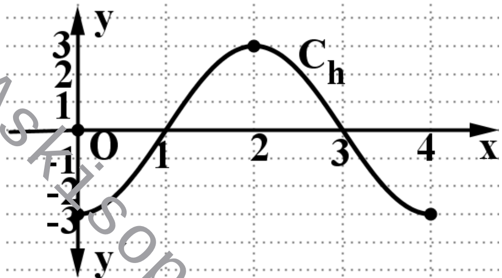
11. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο R να λύσετε τις εξισώσεις.
α) $f\left(x^2\right)=f(4x-4)$ **β)** $f\left(|2x-5|\right)=f(3)$

Ακρότατα

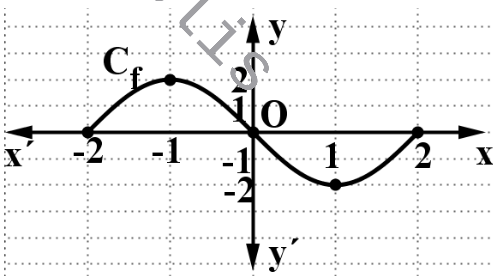
Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, λέμε ότι παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$***, όταν:*** $f(x) \geq f(x_0)$ ***για κάθε*** $x \in A$ ***Το*** x_0 ***λέγεται θέση ελαχίστου, ενώ το*** $f(x_0)$ ***ολικό ελάχιστο ή απλά ελάχιστο της f και το συμβολίζουμε με*** $\min f(x)$.	
Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, λέμε ότι παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 \in A$***, όταν:*** $f(x) \leq f(x_0)$ ***για κάθε*** $x \in A$ ***Το*** x_0 ***λέγεται θέση μεγίστου, ενώ το*** $f(x_0)$ ***ολικό μέγιστο ή απλά μέγιστο της f και το συμβολίζουμε με*** $\max f(x)$.	

Ασκήσεις

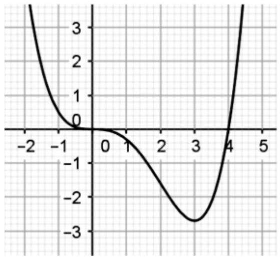
12. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης h του διπλανού σχήματος.

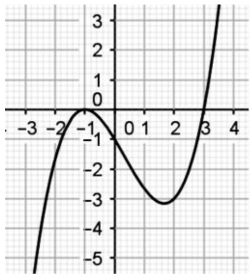


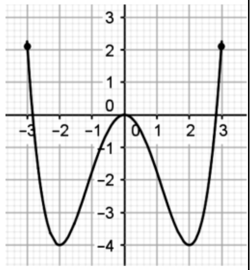
13. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f του διπλανού σχήματος.



14. Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης f στα παρακάτω σχήματα:







15. Να αποδείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση $f(x)=x^2-6x+4$ παρουσιάζει ελάχιστο το $f(3)=-5$.

β) Η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{4x}{x^2+4}$ παρουσιάζει μέγιστο για $x=2$

16. Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων:

α) $f(x)=3x^2+2$ **β)** $f(x)=4(x-1)^2-3$ **γ)** $f(x)=x^{2014}+\left(x^2-x\right)^2+1$

17. Αν η συνάρτηση $f(x)=3x-1$ έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $[2,5]$, να βρείτε τα ακρότατα της.

18. Αν η συνάρτηση $f(x)=-x+\lambda$ έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $[1,4]$, να βρείτε τα ακρότατα της, αν γνωρίζετε ότι το μέγιστο είναι μεγαλύτερο κατά 5 από το ελάχιστο.

19. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{4}{x^2+2}$ και $g(x)=x^{20}+2$.

α) Να δείξετε ότι η f έχει μέγιστο και η g ελάχιστο.

β) Να λύσετε την εξίσωση $4=\left(x^2+2\right)\left(x^{20}+2\right)$.

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=|x|+|x+1|+2$.

α) Να δείξετε ότι $f(x)\geq 2$

β) Αληθεύει ότι η f έχει ελάχιστο το 2 ;

Άρτιες -περιττές συναρτήσεις

-Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α θα λέγεται άρτια, όταν για κάθε $\mathbf{x \in A}$ ισχύει: $\mathbf{-x \in A}$ και $\mathbf{f(-x) = f(x)}$

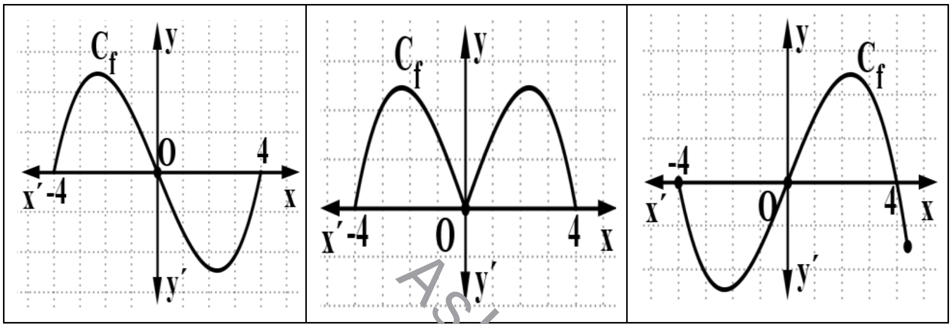
Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y.

-Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α θα λέγεται περιττή, όταν για κάθε $\mathbf{x \in A}$ ισχύει: $\mathbf{-x \in A}$ και $\mathbf{f(-x) = -f(x)}$

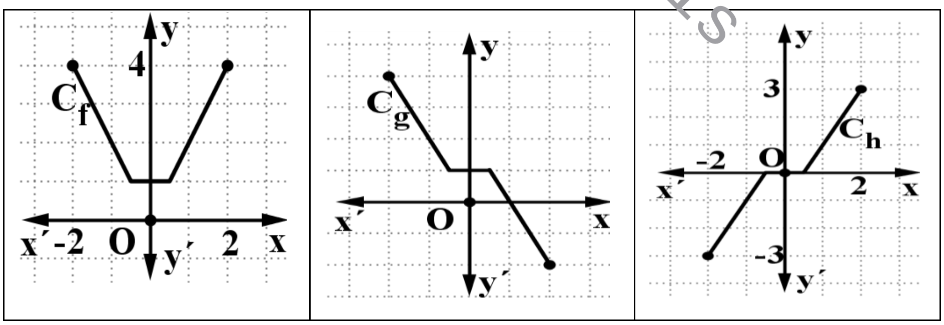
Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή Ο των αξόνων.

Ασκήσεις

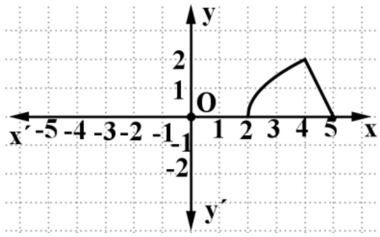
21. Να εξετάσετε ποιες από τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων είναι γραφικές παραστάσεις άρτιας και ποιες περιττής συνάρτησης



22. Να εξετάσετε ποιες από τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων είναι γραφικές παραστάσεις άρτιας και ποιες περιττής συνάρτησης



23. Να συμπληρώσετε την διπλανή γραμμή ώστε να παριστάνει γραφική παράσταση:
α) άρτιας συνάρτησης
β) περιττής συνάρτησης



24. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες περιττές:

α) $f(x)=x^4+3x^2+2$ **β)** $g(x)=x^5-2x^3+4x$ **γ)** $h(x)=\dfrac{x^2}{|x|-1}$

δ) $t(x)=\dfrac{3x}{x-5}$ **ε)** $\varphi(x)=x^4-5x^3+x-4$ **στ)** $\sigma(x)=\sqrt{9-x^2}$

25. Να εξετάσετε ποιες από τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων έχουν άξονα συμμετρίας τον y΄y και ποιες κέντρο συμμετρίας το $O(0,0)$:

α) $f(x)=\sqrt{25-x^2}$ **β)** $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ **γ)** $f(x)=x^2|x|$

26. Τα παρακάτω σημεία ανήκουν στην γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης. Να συμπληρώσετε τους αριθμούς που λείπουν:

(-1, 2) $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ (…, 2) (…, 4) (3, …) (-3, 18) ($\sqrt{2}$, 4) $\left(-\frac{1}{2},...\right)$

27. Αν η συνάρτηση f είναι περιττή και τα σημεία $A(1,2)$, $B(-1,\ \lambda)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της f να βρείτε το λ.

28. Αν η συνάρτηση f είναι άρτια και τα σημεία $A(2017,2018)$, $B(-2017,\ \lambda)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της f να βρείτε το λ.

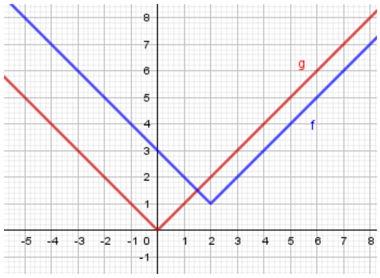
29. Να βρείτε το $\lambda\in\mathbb{R}$ για το οποίο η συνάρτηση $f:(\lambda-4,\lambda)\to\mathbb{R}$ είναι άρτια.

30. Αν η συνάρτηση $f:(\lambda,3)\to\mathbb{R}$ είναι περιττή, να λύσετε την εξίσωση $f(2)+f(-2)+x=\lambda$.

31. Αν συνάρτηση f είναι περιττή στο $\mathbb{R}$, να λύσετε την εξίσωση $f\left(x^{2016}-1\right)+x=2-f\left(1-x^{2016}\right)$.

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

32. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g, που ορίζονται στους πραγματικούς αριθμούς. Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f με οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση.



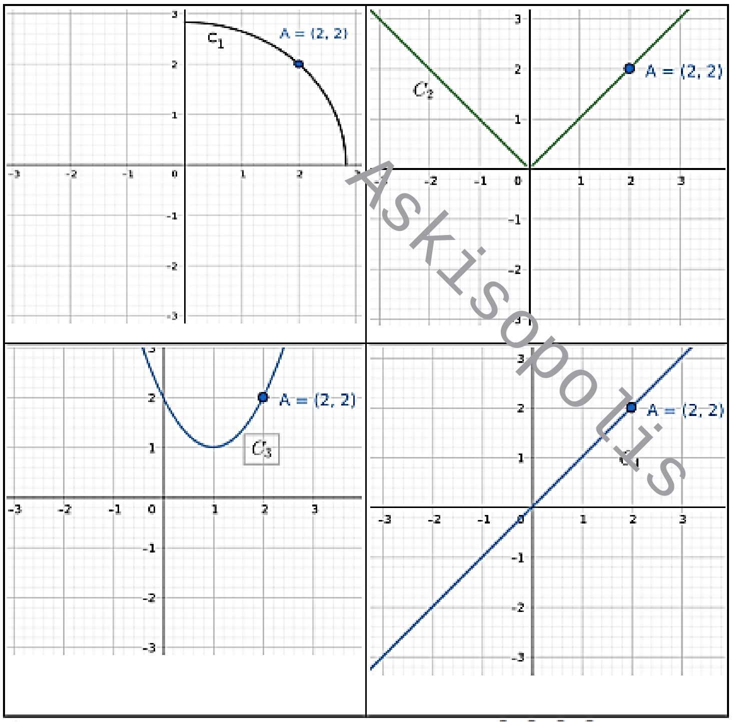
Από τις γραφικές παραστάσεις να βρείτε:

α) Τα διαστήματα μονοτονίας της f, το είδος του ακρότατου της f και την τιμή του.

β) Αν $g(x)=|x|,\ x\in\mathbb{R}$ να επιλέξετε ποιος από τους παρακάτω είναι ο τύπος της συνάρτησης f. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας

$f(x)=|x+2|+1 \qquad f(x)=|x-2|-1 \qquad f(x)=|x+2|-1 \qquad f(x)=|x-2|+1$

33. Δίνονται τα παρακάτω σχήματα:



α) Να αιτιολογήσετε ποιες από τις γραφικές παραστάσεις C_1, C_2, C_3, C_4 αναπαριστούν άρτιες ή περιττές συναρτήσεις, ποιες όχι και γιατί. Δίνεται ότι τουλάχιστον μία είναι άρτια και τουλάχιστον μία είναι περιττή.

β) Για τις συναρτήσεις C_2, C_4 να βρείτε την τεταγμένη του σημείου τους $B(-2, k)$, αιτιολογώντας την τιμή που βρήκατε από την ιδιότητα συμμετρίας καθεμίας συνάρτησης.

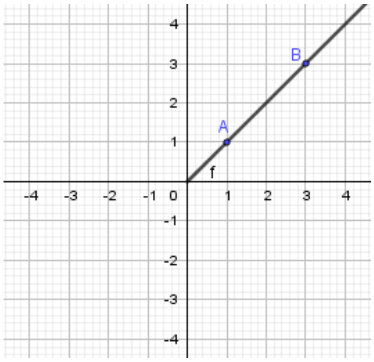
34. Δίνεται μία συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι f (- 1) = 2 και f (1) = 0. Να αιτιολογήσετε (αλγεβρικά ή γραφικά)

α) γιατί η συνάρτηση f δεν είναι άρτια . (Μονάδες 8)

β) γιατί η συνάρτηση f δεν είναι περιττή. (Μονάδες 8)

γ) γιατί η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως αύξουσα.(Μονάδες 9)

35. Δίνονται τα σημεία του επιπέδου $A(1,1), B(3,3)$



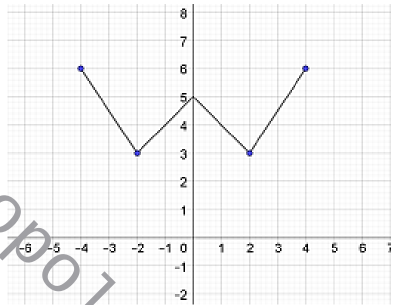
α) Να αιτιολογήσετε ποιες από τις επόμενες ιδιότητες θα μπορούσε και ποιες δε θα μπορούσε να έχει μία συνάρτηση f , που ορίζεται σε όλους τους πραγματικούς αριθμούς και της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα A και B.

i) είναι σταθερή συνάρτηση

ii) είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση

β) Να συμπληρώσετε την παρακάτω γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f, η οποία διέρχεται από τα A,B και είναι περιττή.

36. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το [4, 4] φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

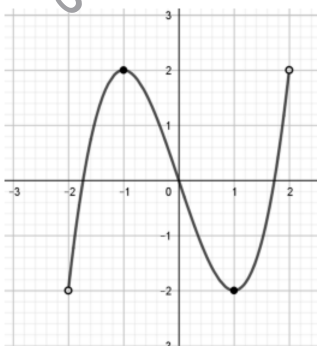


α) Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση είναι άρτια.

β) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .

γ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f καθώς και για ποιες τιμές του x τις παρουσιάζει.

37. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(-2,2)$.



α) Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να γράψετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα.

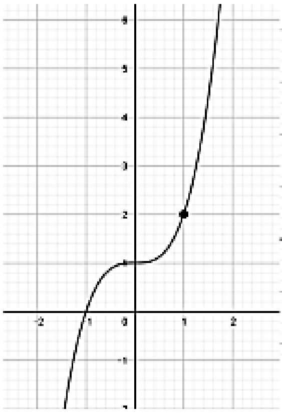
γ) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f καθώς και τις θέσεις των ακρότατων αυτών.

38. Δίνεται μια συνάρτηση f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο A(1,2).

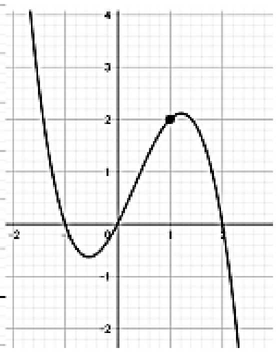
α) Θα μπορούσε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται και από το σημείο B(2,9); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις θα μπορούσε να είναι η γραφική παράσταση της f ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

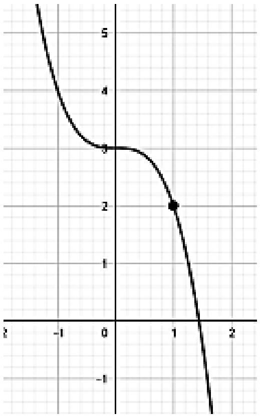
i.



ii.



iii.

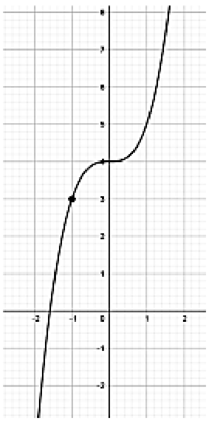


39. Δίνεται μια συνάρτηση f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(-1,3)$.

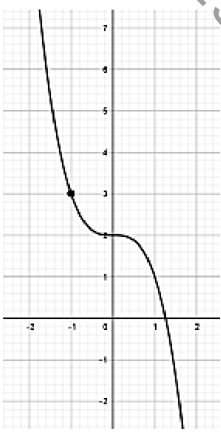
α) Θα μπορούσε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται και από το σημείο B(2,5); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις θα μπορούσε να είναι η γραφική παράσταση της f ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

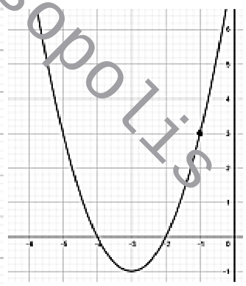
i.



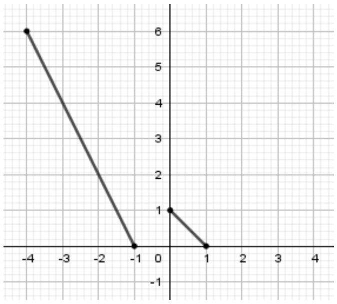
ii.



iii.



40. Στο διπλανό σχήμα δίνονται ορισμένα τμήματα της γραφικής παράστασης μιας άρτιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-4,4]$.



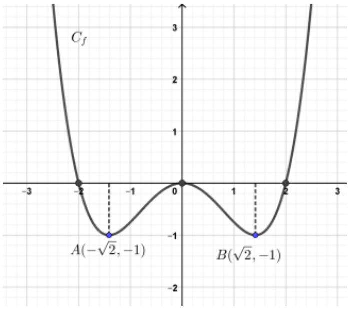
α) Να μεταφέρετε το σχήμα στην κόλλα σας και να χαράξετε τα υπόλοιπα τμήματα της γραφικής παράστασης της f .

β) Να βρείτε

i. τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii. τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f καθώς και τις θέσεις των ακροτάτων αυτών.

41. Δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

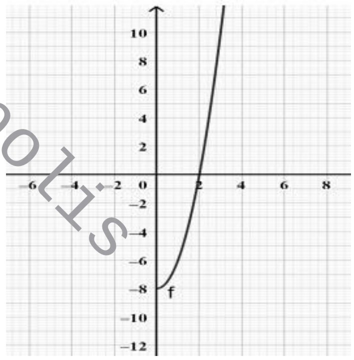


α) Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση είναι άρτια.

β) Αν γνωρίζετε ότι τα σημεία $A\left(-\sqrt{2},-1\right)$ και $B\left(\sqrt{2},-1\right)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της f να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f.

γ) Να λύσετε γραφικά την εξίσωση $f(x)=0$.

42. Στο παραπάνω σχήμα δίνεται ένα τμήμα της γραφικής παράστασης μιας άρτιας συνάρτησης με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.



α) Να μεταφέρεται το σχήμα στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση με το κομμάτι της καμπύλης που λείπει. Να αιτιολογήσετε την απάντησής σας.

β) Να βρείτε:

i. Τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f.

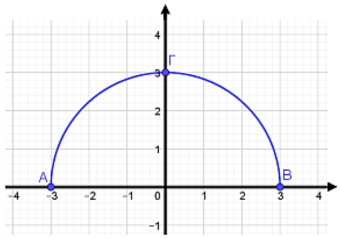
ii. Το είδος του ακροτάτου και τη θέση που το παρουσιάζει.

43. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.

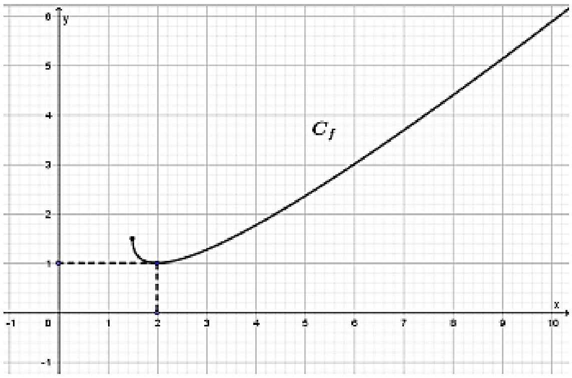
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή.

γ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα ακρότατα της f και τις θέσεις των ακροτάτων.



44. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \sqrt{2x-3}$, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να προσδιορίσετε το ολικό ελάχιστο της συνάρτησης, καθώς και τη θέση αυτού.

γ) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση είναι

i. γνησίως φθίνουσα

ii. γνησίως αύξουσα

45. Θεωρούμε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-3,3]$. Η συνάρτηση f είναι άρτια, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-3,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,3]$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(-1) < f(2)$.

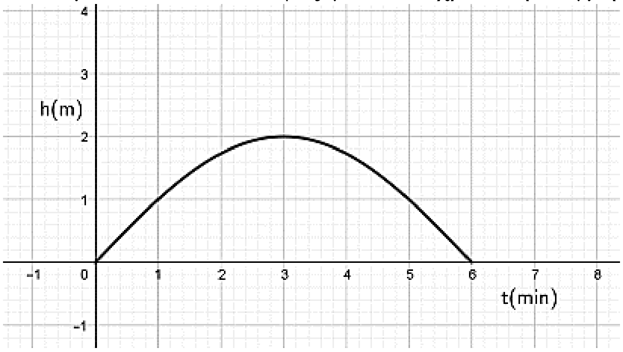
β) Να αποδείξετε ότι $f(3) \geq f(x) \geq f(0)$ για κάθε $x \in [-3,3]$.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο και μέγιστο και να βρείτε τις θέσεις μεγίστου και ελαχίστου.

δ) Παρακάτω δίνονται 4 τύποι, από τους οποίους ένας μόνο μπορεί να είναι ο τύπος της συνάρτησης f. Να επιλέξετε το σωστό τύπο αιτιολογώντας την απάντησή σας.

α. $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ **β.** $f(x) = -\sqrt{9-x^2}$ **γ.** $f(x) = \sqrt{x^2-9}$ **δ.** $f(x) = -\sqrt{x^2-9}$

46. Αντικείμενο κινείται κατακόρυφα. Το παρακάτω σχήμα αναπαριστά το ύψος h του αντικειμένου από το έδαφος για κάθε χρονική στιγμή t . Να βρείτε:

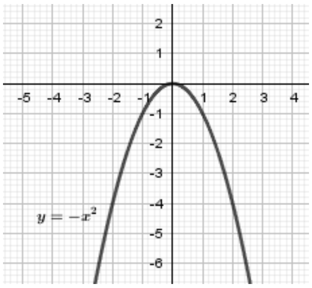


α) Ποιες χρονικές στιγμές το αντικείμενο απέχει 1m από το έδαφος.

β) Ποια είναι η μέγιστη απόσταση του αντικειμένου από το έδαφος και ποια χρονική στιγμή την επιτυγχάνει.

γ) Ποιο χρονικό διάστημα το αντικείμενο απομακρύνεται από το έδαφος.

47. Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi(x) = -x^2$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = -x^2 + 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.



α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = -(x-1)^2 + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και στη συνέχεια, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ, που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f.

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f να βρείτε:

i. Τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη.

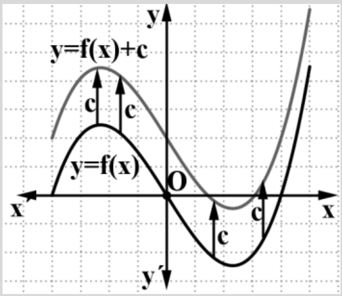
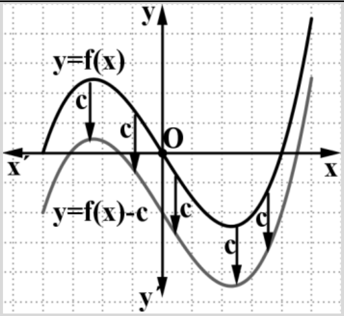
ii. Το ολικό ακρότατο της f καθώς και τη θέση του.

iii. Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \kappa$, $\kappa < 2$.

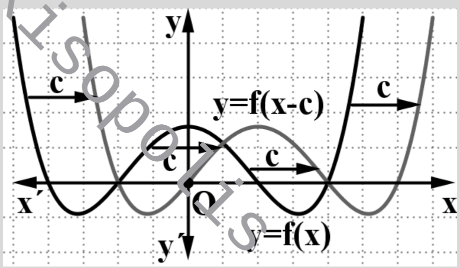
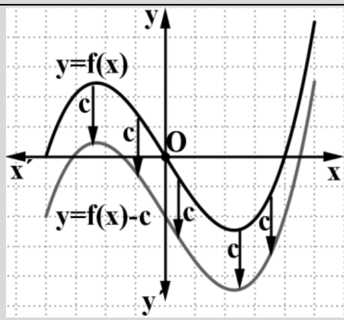
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Κατακόρυφη-Οριζόντια μετατόπιση καμπύλης

Κατακόρυφη μετατόπιση καμπύλης

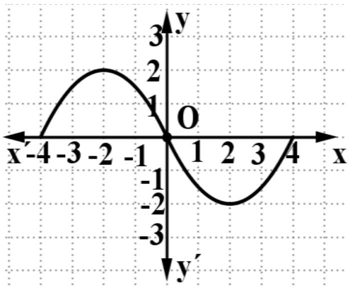
<table>
<tr><td>Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=f(x)+c,\ c>0$ προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά c μονάδες προς τα πάνω.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x)=f(x)-c,\ c>0$ προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά c μονάδες προς τα κάτω.</td><td>
</td></tr>
</table>

Οριζόντια μετατόπιση καμπύλης

<table>
<tr><td>Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=f(x+c),\ c>0$ προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f κατά c μονάδες προς τα αριστερά.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x)=f(x-c),\ c>0$ προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f κατά c μονάδες προς τα δεξιά.</td><td>
</td></tr>
</table>

Ασκήσεις

48. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

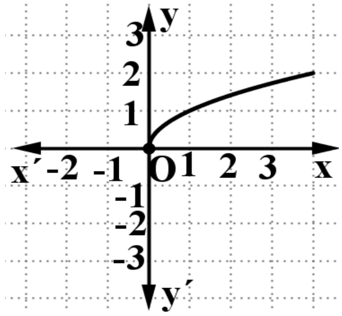


α) $g(x)=f(x)+1$ και $h(x)=f(x)-1$

β) $g(x)=f(x-2)$ και $h(x)=f(x+2)$

γ) $g(x)=f(x-2)+1$ και $h(x)=f(x+2)-1$

49. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση $f(x)=\sqrt{x}$. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

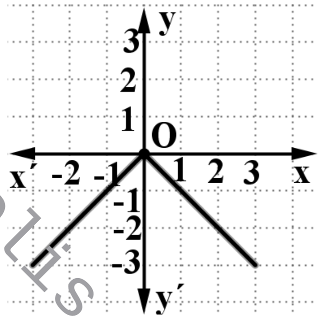


α) $g_1(x)=\sqrt{x}+3$, $g_2(x)=\sqrt{x}-1$

β) $h_1(x)=\sqrt{x-2}$ και $h_2(x)=\sqrt{x+4}$

γ) $\varphi_1(x)=\sqrt{x-2}-1$ και $\varphi_2(x)=\sqrt{x+4}+3$

50. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση $f(x)=-|x|$. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x)=3-|x|, h(x)=-|x+2|$ και $\varphi(x)=3-|x+2|$.



51. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3|x|+1$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης h, της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει :

α) κατά 1 μονάδα προς τα αριστερά και 2 μονάδες προς τα πάνω

β) κατά 2 μονάδα προς τα δεξιά και 3 μονάδες προς τα κάτω

γ) κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά και 2 μονάδες προς τα κάτω

δ) κατά 2 μονάδα προς τα αριστερά και 3 μονάδες προς τα πάνω.

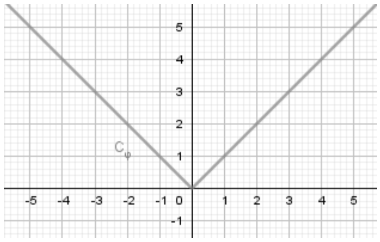
ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

52. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-4x+5$, $x\in R$

α) Να αποδείξετε ότι η f γράφεται στη μορφή $f(x)=(x-2)^2+1$.

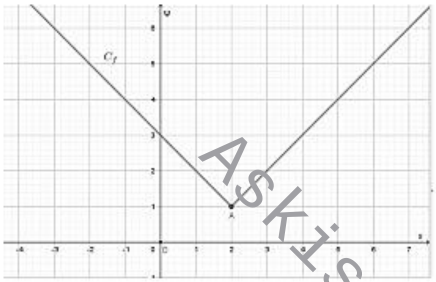
β) Στο διπλανό σύστημα συντεταγμένων που ακολουθεί, να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f, μετατοπίζοντας κατάλληλα την $y=x^2$.

53. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x)=|x|$, $x\in\mathbb{R}$ με γραφική παράσταση που φαίνεται στο σχήμα. Επιπλέον οι συναρτήσεις $g(x)=|x-2|$, $x\in\mathbb{R}$ και $f(x)=|x-2|+1$, $x\in\mathbb{R}$



α) Να παραστήσετε γραφικά στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις συναρτήσεις g, f και να εξηγήσετε πώς προκύπτουν μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της

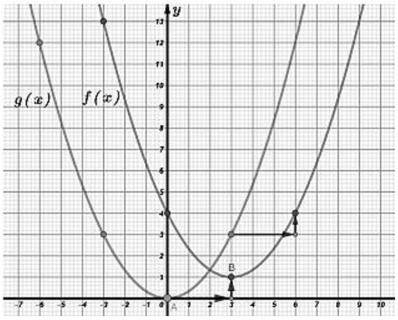
β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της , η οποία δίνεται παρακάτω, να βρείτε:



i. Τα διαστήματα στα οποία η είναι γνήσια αύξουσα και γνήσια φθίνουσα.

ii. Το ολικό ακρότατο της και τη θέση του. Τι είδους ακρότατο είναι;

54.Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\frac{1}{3}x^2,\ x\in\mathbb{R}$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x0 η οποία προκύπτει από μία οριζόντια μετατόπιση της g(x) κατά 3 μονάδες προς τα δεξιά και μετά κατά μία μονάδα προς τα πάνω.



α) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση όσον αφορά τον τύπο της $f(x)$.

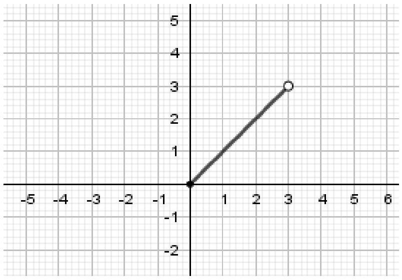
(i) $f(x)=g(x+3)+1$ **(ii)** $f(x)=g(x+3)-1$

(iii) $f(x)=g(x-3)+1$ **(iv)** $f(x)=g(x-3)-1$

β) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x)$ και την θέση ελαχίστου.

γ) Να γράψετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

55.Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(\alpha,3)$ είναι άρτια και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $(2,2)$.

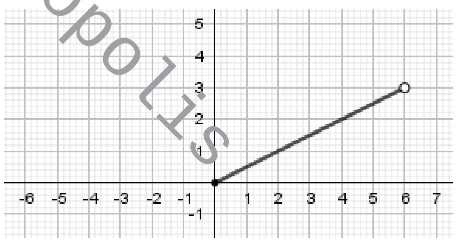


α) Να βρείτε την τιμή του α.

β) Να βρείτε το $f(-2)$.

γ) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f στο διάστημα $[0,3)$. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο πεδίο ορισμού της.

56.Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(\alpha,6)$ είναι περιττή και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $(4,2)$.



α) Να βρείτε την τιμή του α.

β) Να βρείτε το $f(-4)$.

γ) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f στο διάστημα $[0,6)$. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο πεδίο ορισμού της.

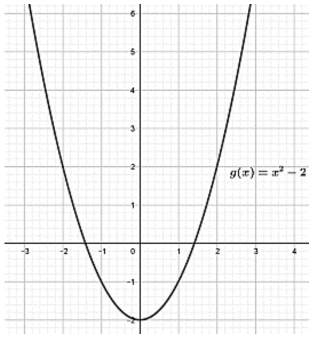
57. Στο διπλανό σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x^2 - 2,\ x \in \mathbb{R}$.

α) Με βάση τη γραφική της παράσταση,

i. να αιτιολογήσετε γιατί η g είναι άρτια.

ii. να βρείτε το ελάχιστο της g και τη θέση αυτού.

β) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της $f(x) = x^2$ μετατοπίζοντας κατάλληλα την γραφική παράσταση της g που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

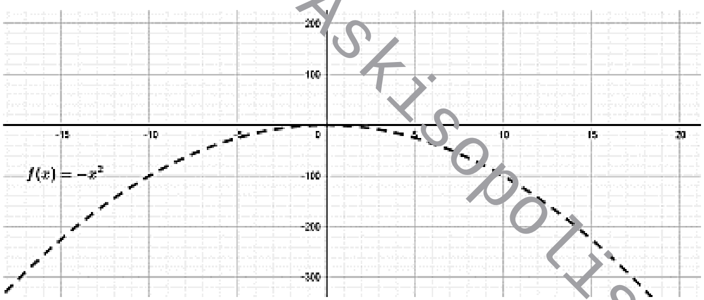


58. Η περιβαλλοντική ομάδα ενός σχολείου παρέλαβε συρματόπλεγμα μήκους 40m για να περιφράξει, χρησιμοποιώντας όλο το συρματόπλεγμα, έναν ορθογώνιο κήπο για καλλιέργεια λαχανικών. Οι μαθητές της περιβαλλοντικής ομάδας θέλουν να επιλέξουν ένα κήπο που να έχει όσο το δυνατόν μεγαλύτερο εμβαδόν.

α) Να δώσετε τις διαστάσεις τριών διαφορετικών ορθογώνιων κήπων με περίμετρο 40m.
Να εξετάσετε αν οι τρεις λαχανόκηποι έχουν το ίδιο εμβαδόν.

β) Αν συμβολίσουμε με x το πλάτος και με Ε το εμβαδόν ενός λαχανόκηπου με περίμετρο 40m, να εκφράσετε το Ε ως συνάρτηση του x.

γ) Να δείξετε ότι $E(x) = -(x-10)^2 + 100$. Χρησιμοποιώντας την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = -x^2$ να κατασκευάσετε την γραφική παράσταση της Ε(x). Από τη γραφική παράσταση της Ε(x) να βρείτε τις διαστάσεις του λαχανόκηπου με το μεγαλύτερο εμβαδόν.



59. Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi(x)=3x^2,\ x\in\mathbb{R}$ και $f(x)=3x^2-6x+8,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να ελέγξετε αν η συνάρτηση φ(x) είναι άρτια ή περιττή και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=3(x-1)^2+5,\ x\in\mathbb{R}$. Στη συνέχεια, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης , να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση , αιτιολογώντας την απάντησή σας.

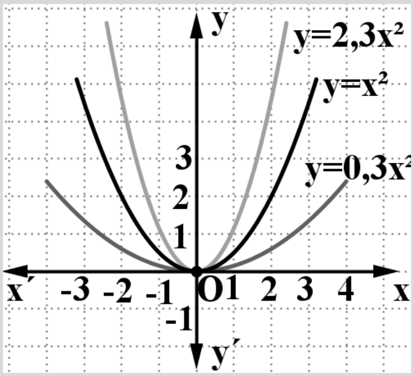
γ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης , να βρείτε:

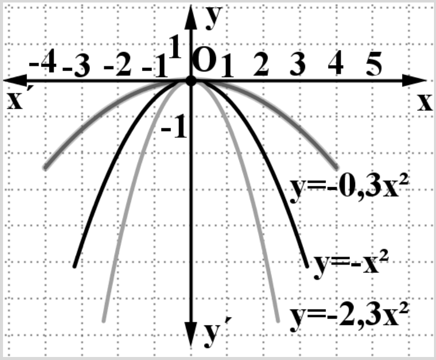
i. Τα διαστήματα στα οποία η είναι γνήσια μονότονη και τον άξονα συμμετρίας της συνάρτησης

ii. Το ολικό ακρότατο της και τη θέση του. Τι είδους ακρότατο είναι;

iii. Το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της και της ευθείας με εξίσωση $y=\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ.

Μελέτη της συνάρτησης $y = ax^2$





- ✓ ***Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2, \alpha \neq 0$ λέγεται παραβολή με κορυφή την αρχή των αξόνων Ο και άξονα συμμετρίας τον y΄y(άρτια).***
- ✓ ***Αν $\alpha > 0$:***

-η παραβολή είναι ανοιχτή προς τα πάνω

- παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 0$ το $f(0) = 0$

- είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και

- είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

- ✓ ***Αν $\alpha < 0$***

  - είναι ανοιχτή προς τα κάτω

  - παρουσιάζει μέγιστο για $x = 0$ το $f(0) = 0$

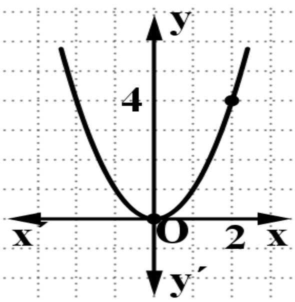
  - είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$

  - είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$

- ✓ ***Καθώς το $|\alpha|$ μεγαλώνει, η παραβολή κλείνει και πλησιάζει τον y΄y.***

Ασκήσεις

60. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής του διπλανού σχήματος:



61. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

α) $f(x)=3x^2, g(x)=3x^2+2$ και $h(x)=3x^2-2$.

β) $f(x)=-3x^2, g(x)=-3x^2+2$ και $h(x)=-3x^2-2$.

62. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

α) $f(x)=2x^2, g(x)=2(x-1)^2$ και $h(x)=2(x+1)^2$.

β) $f(x)=-2x^2, g(x)=-2(x-1)^2$ και $h(x)=-2(x+1)^2$.

63. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και διέρχεται από το σημείο Α(2,32) .

64. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης : $f(x)=(3\lambda^2-4)x^2$ διέρχεται από το σημείο $\text{A}(1,8)$.

α) Να βρείτε τον θετικό αριθμό λ.

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

65. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού α για τις οποίες η παραβολή $y=(\lambda^2-4\lambda-5)x^2$ είναι :

α) γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$

β) γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$

66. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=(\lambda^2-5\lambda+6)x^2$ και $g(x)=(|\lambda-1|-2)x^2$.
Η C_f είναι παραβολή που παρουσιάζει ελάχιστο και η C_g διέρχεται από το σημείο $\text{M}(1,1)$.

α) Να βρείτε την τιμή του λ,

β) Να σχεδιάσετε τις C_f και C_g στο ίδιο σύστημα αξόνων.

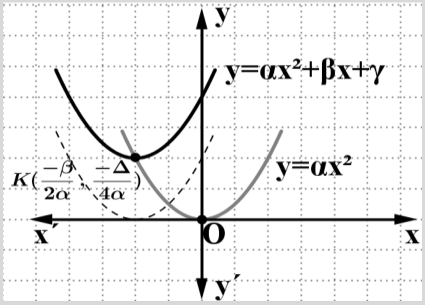
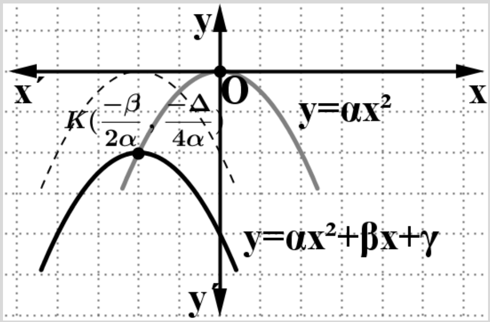
67.α) Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^2$ και $g(x)=9$ και με τη βοήθεια αυτών να λύσετε τις ανισώσεις $x^2\le 9$ και $x^2>9$.

β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τα συμπεράσματα του α) ερωτήματος.

68.α) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\begin{cases} 2x, x<0 \\ -2x^2, x\ge 0 \end{cases}$.

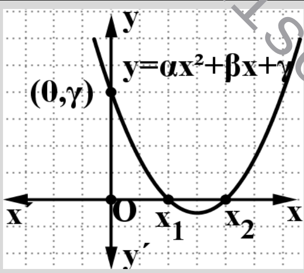
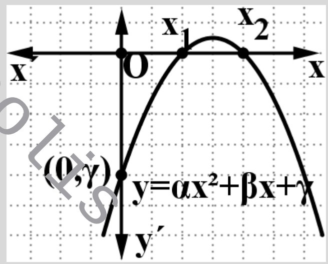
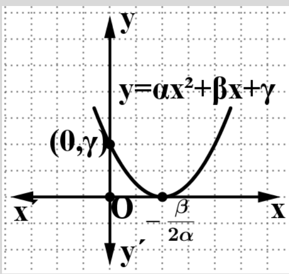
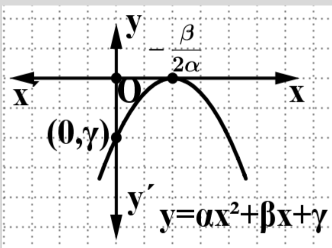
β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α) να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση f.

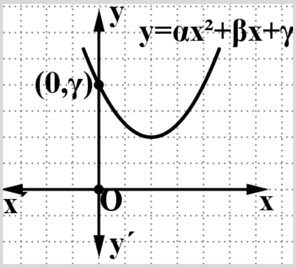
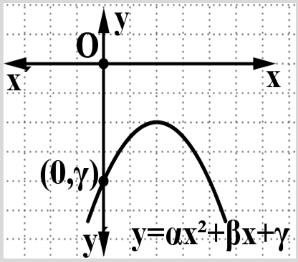
Μελέτη της συνάρτησης $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma, \alpha\neq 0$

✓ *Επειδή* $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x+\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4\alpha}$, *η γραφική παράσταση της f προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της παραβολής* $y=x^2$. *Μιας οριζόντιας κατά* $\dfrac{\beta}{2\alpha}$ *και μιας κατακόρυφης κατά* $\dfrac{\Delta}{4\alpha}$.

✓ *Η γραφική παράσταση της f είναι μια παραβολή με κορυφή το σημείο* $K\left(-\dfrac{\beta}{2\alpha},-\dfrac{\Delta}{4\alpha}\right)$ *,έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία* $x=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$ *και τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο* $(0,\gamma)$

Αν Δ>0 τέμνει τον άξονα χ΄χ σε δύο σημεία $A(x_1,0),B(x_2,0)$, *όπου* x_1,x_2 *οι ρίζες του τριωνύμου*		
Αν Δ=0 εφάπτεται του άξονα χ΄χ στο σημείο $A\left(-\dfrac{\beta}{2\alpha},0\right)$ *,όπου* x_1,x_2 *οι ρίζες του τριωνύμου*		

<table>
<tr>
<td>Αν Δ<0 δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα χ΄χ.</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

✓ ***Αν*** $\boldsymbol{\alpha > 0}$***:***

- ***παρουσιάζει ελάχιστο για*** $\mathbf{x = -\frac{\beta}{2\alpha}}$ ***το*** $\mathbf{f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) = -\frac{\Delta}{4\alpha}}$
- ***είναι γνησίως φθίνουσα στο*** $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right]$ ***και***
- ***είναι γνησίως αύξουσα στο*** $\left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$

✓ ***Αν*** $\boldsymbol{\alpha < 0}$

- ***παρουσιάζει μέγιστο για*** $\mathbf{x = -\frac{\beta}{2\alpha}}$ ***το*** $\mathbf{f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) = -\frac{\Delta}{4\alpha}}$
- ***είναι γνησίως φθίνουσα στο*** $\left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$
- ***είναι γνησίως αύξουσα στο*** $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right]$

Ασκήσεις

69. Να παραστήσετε γραφικά της συναρτήσεις:

α) $f(x) = x^2 - 1$ και $g(x) = x^2 + 1$ **β)** $f(x) = x^2 - 4$ και $g(x) = x^2 + 4$

γ) $f(x) = (x-1)^2$ και $g(x) = (x+1)^2$ **δ)** $f(x) = 3(x+2)^2$ και $g(x) = 3(x-2)^2$

ε) $f(x) = (x-2)^2 + 1$ και $g(x) = (x-2)^2 - 1$

στ) $f(x) = 2(x-1)^2 + 3$ και $g(x) = 2(x-1)^2 - 3$

70. Να παραστήσετε γραφικά της συναρτήσεις:

α) $f(x) = x^2 - 2x - 3$ **β)** $f(x) = x^2 - 4x + 3$ **γ)** $f(x) = x^2 - x - 2$

δ) $f(x) = -2x^2 + 4x + 6$ **ε)** $f(x) = -x^2 + 5x - 6$ **στ)** $f(x) = -x^2 + 2x$

71. Να παραστήσετε γραφικά της συναρτήσεις:

α) $f(x) = x^2 - 2x + 1$ **β)** $f(x) = x^2 - 4x + 4$ **γ)** $f(x) = -x^2 + 6x - 9$

δ) $f(x) = -x^2 + x - 6$ **ε)** $f(x) = x^2 + 3x + 4$ **στ)** $f(x) = x^2 - 2x + 3$

72. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^2-x-1$.

α) Να βρείτε την κορυφή και τον άξονα συμμετρίας της C_f.
β) Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f.
γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες
δ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f.

73. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-3x^2+x+2$.

α) Να βρείτε την κορυφή και τον άξονα συμμετρίας της C_f.
β) Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f.
γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες
δ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f.

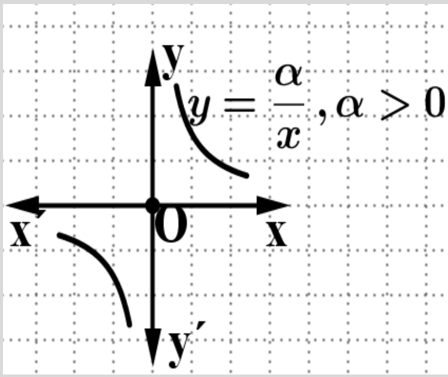
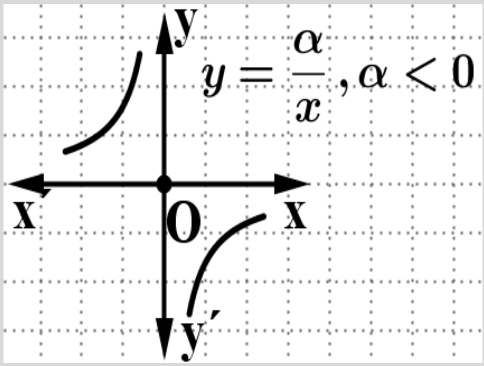
74. Η παραβολή $f(x)=x^2+(\lambda-1)x+\mu+2$ έχει κορυφή το σημείο $\mathrm{K}(-1,-4)$

Να βρείτε :
α) τους αριθμούς λ και μ.
β) τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

75. Η παραβολή $f(x)=\alpha x^2+(\alpha-8)x-4\alpha, \alpha\neq 0$ έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x=\dfrac{3}{2}$.

α) Να βρείτε τον αριθμό λ
β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>10$.

Η συνάρτηση $y=\dfrac{\alpha}{x}, x\neq 0$

- ✓ ***Η γραφική παράσταση της συνάρτησης*** $f(x)=\dfrac{\alpha}{x}, x\neq 0$ ***λέγεται ισοσκελής υπερβολή και έχει κέντρο συμμετρίας τον άξονα χ΄χ (περιττή).***
- ✓ ***Έχει ασύμπτωτες τους άξονες χ΄χ και y΄y.***
- ✓ ***έχει άξονες συμμετρίας τις ευθείες*** $y=x$ ***και*** $y=-x$ ***που διχοτομούν τις γωνίες των αξόνων.***
- ✓ ***Αν*** $\alpha>0$***:***

  -***αποτελείται από δύο κλάδους έναν στο 1ο και ένα στο 3ο τεταρτημόριο.***

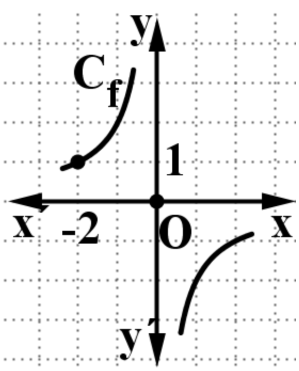
  - ***είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα*** $(-\infty,0)$ ***και*** $(0,+\infty)$
- ✓ ***Αν*** $\alpha<0$

  - ***αποτελείται από δύο κλάδους έναν στο 2ο και ένα στο 4ο τεταρτημόριο.***

  -***είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα*** $(-\infty,0)$ ***και*** $(0,+\infty)$.

Ασκήσεις

76. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής του διπλανού σχήματος.



77.Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

α) $f(x)=\frac{3}{x}, g(x)=\frac{3}{x}+1$ και $h(x)=\frac{3}{x}-1$.

β) $f(x)=-\frac{3}{x}, g(x)=-\frac{3}{x}+1$ και $h(x)=-\frac{3}{x}-1$.

78.Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

α) $f(x)=\frac{2}{x}, g(x)=\frac{2}{x-1}$ και $h(x)=\frac{2}{x+1}$.

β) $f(x)=-\frac{2}{x}, g(x)=-\frac{2}{x-1}$ και. $h(x)=-\frac{2}{x+1}$.

79.)Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=-\frac{1}{x}$ και $g(x)=-1$και με τη βοήθεια αυτών να λύσετε τις ανισώσεις $-\frac{1}{x}\leq -1$ και $-\frac{1}{x}>-1$.

β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τα συμπεράσματα του α) ερωτήματος.

80.Η γραφική παράσταση της συνάρτησης : $f(x)=\frac{3-\lambda}{x}$ διέρχεται από το σημείο $K(\lambda,2)$.

α) Να βρείτε τον αριθμό λ.

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

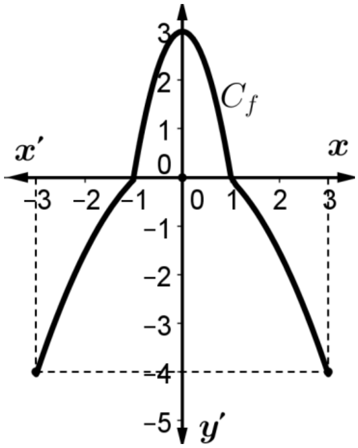
81.Να βρείτε για ποιες τιμές του μ ∈R η γραφική παράσταση της συνάρτησης

α) $f(x)=\frac{\mu-3}{x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$,

β) $f(x)=\frac{|\mu+1|-2}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0)$.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

82. Δίνεται η συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται παρακάτω:



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να αναφέρετε τα διαστήματα στα οποία είναι γνησίως μονότονη

δ) Ποιες είναι οι θέσεις των ακροτάτων τους και ποια τα ακρότατα(αν υπάρχουν).

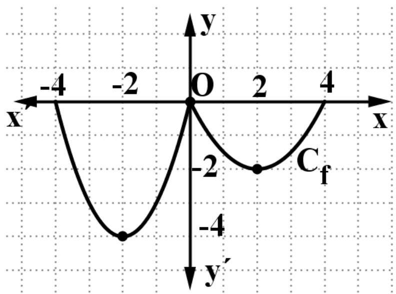
ε) Η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή .Δικαιολογήσετε την απάντηση σας

στ) Να αναφέρετε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται :

i) πάνω από τον άξονα χ΄χ

ii) κάτω από τον άξονα χ΄χ.

83. Δίνεται η συνάρτηση g της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται παρακάτω:



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να αναφέρετε τα διαστήματα στα οποία είναι γνησίως μονότονη

δ) Ποιες είναι οι θέσεις των ακροτάτων τους και ποια τα ακρότατα(αν υπάρχουν).

ε) Η συνάρτηση g είναι άρτια ή περιττή .Δικαιολογήσετε την απάντηση σας

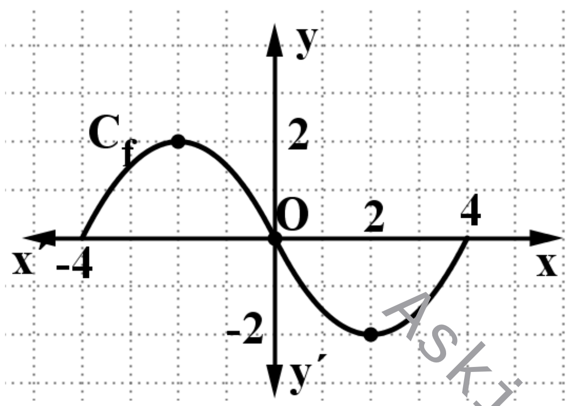
στ) Ποιο είναι το σημείο τομής με την ευθεία $y=-4$.

ζ) Να αναφέρετε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται :

i) πάνω από τον άξονα χ΄χ.

ii) κάτω από τον άξονα χ΄χ.

84. Δίνεται η συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται παρακάτω:



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να αναφέρετε τα διαστήματα στα οποία είναι γνησίως μονότονη

δ) Ποιες είναι οι θέσεις των ακροτάτων τους και ποια τα ακρότατα(αν υπάρχουν).

ε) Η συνάρτηση g είναι άρτια ή περιττή .Δικαιολογήσετε την απάντηση σας

στ) Ποιο είναι το σημείο τομής :

i) με την ευθεία $y=-4$.

ii) με την ευθεία $y=2$.

ζ) Να αναφέρετε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται :

i) πάνω από τον άξονα χ΄χ.

ii) κάτω από τον άξονα χ΄χ.

85. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{-x+1}-x$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
β) Να βρείτε το σημείο τομής της f με τον άξονα y΄y.
γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
δ) Να λύσετε την ανίσωση: $\sqrt{-x+1}<x+5$.

86. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+5x-6$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.
β) Να βρείτε τη ρίζα και το πρόσημο της f.
γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(f(x))>-6$.
δ) Να λύσετε την ανίσωση $x^3+5x+6<0$.

87. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^{1821}+x^{1453}+1$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
β) Να λύσετε την ανίσωση: $x^{1821}+x^{1453}-2>0$.
γ) Να λύσετε την ανίσωση: $f(f(x))<3$.

88. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{16-x}-\sqrt{3x+9}-x+1$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
β) Να βρείτε το σημείο τομής της f με τον άξονα y΄y.
γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
δ) Να βρείτε τα ακρότατα της f
ε) Να λύσετε την ανίσωση: $\sqrt{16-x}<\sqrt{3x+9}+x+1$.

89. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-2x+\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $K(1,-4)$.

α) Να δείξετε ότι $\lambda=-3$.
β) Να σχεδιάσετε την f και να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της.
γ) Ποιος είναι ο άξονας συμμετρίας της f και ποιες είναι οι συντεταγμένες της κορυφής της;
δ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)+2x$ είναι άρτια και στη συνέχεια να κατασκευάσετε την γραφική της παράσταση.

90. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-x^3+\lambda x$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(-1,4)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda=-3$.
β) Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.
γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

δ) Αν $\alpha \neq \beta$, να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\alpha^2+\beta^2\right)$ και $f\left(2\alpha\beta\right)$

ε) Να λύσετε την ανίσωση : $(3x-1)^3-\left(x^2-5\right)^3<3\left(x^2-3x-4\right)$

91. Έστω η συνάρτηση $f\left(x\right)=\dfrac{2x}{x^2+1}$.

α) Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.

β) Να δείξετε ότι η f έχει μέγιστο το 1 και ελάχιστο το -1. Ποια είναι η θέση του κάθε ακρότατου;

γ) Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει $f\left(x^{2018}-x\right)+f\left(x-x^{2018}\right)+f\left(\lambda\right)=f\left(3\right)$

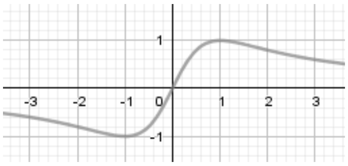
δ) Να βρείτε το πρόσημο της f.

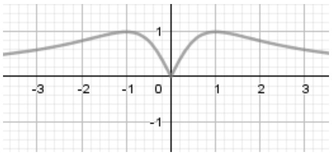
ε) Αν $\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+1}+\dfrac{2\beta}{\beta^2+1}\leq 2$ να βρείτε τα α,β.

στ) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $g\left(x\right)=f^{2018}\left(x\right)$ είναι άρτια ή περιττή.

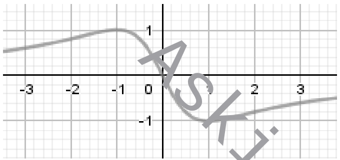
ζ) Ποια από τις παρακάτω μπορεί να είναι η γραφική παράσταση της f;

i.





iii.



92. Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=\alpha x^4+\beta x^2$, $x \in \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A\left(1,-7\right)$ και $B\left(2,-16\right)$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=-8$.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.

γ) Να δείξετε ότι η f έχει ελάχιστο το -16. Ποιες είναι οι θέσεις ακροτάτων;

δ) Να βρείτε τα $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει ότι $f\left(\alpha\right)+f\left(\beta\right)+32\leq 0$.

ε) Μπορεί η f να είναι γνησίως μονότονη;

στ) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(x^5-5x\right)+\left|x\right|=f\left(5x-x^5\right)-f\left(1\right)$.

ζ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $h\left(x\right)=f\left(\sqrt{x}\right)$.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας

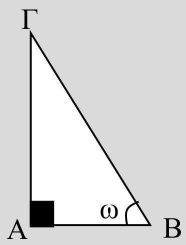
Οξεία γωνία ορθογωνίου τριγώνου

Αν ω οξεία γωνία ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, τότε από το Γυμνάσιο γνωρίζουμε ότι:

$$\eta\mu\omega=\frac{\alpha\pi\acute{\varepsilon}\nu\alpha\nu\tau\iota\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta}{\upsilon\pi o\tau\varepsilon\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha}=\frac{A\Gamma}{B\Gamma},$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega=\frac{\pi\rho o\sigma\kappa\varepsilon\acute{\iota}\mu\varepsilon\nu\eta\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta}{\upsilon\pi o\tau\varepsilon\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha}=\frac{AB}{B\Gamma} \quad \text{και}$$

$$\varepsilon\varphi\omega=\frac{\alpha\pi\acute{\varepsilon}\nu\alpha\nu\tau\iota\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta}{\pi\rho o\sigma\kappa\varepsilon\acute{\iota}\mu\varepsilon\nu\eta\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta}=\frac{A\Gamma}{AB}.$$



Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας μεγαλύτερης από 360^o.

Οι γωνίες $\kappa\cdot 360^\circ+\omega,\kappa\in\mathbb{Z}$ και ω έχουν τους ίδιους τριγωνομετρικούς αριθμούς. Δηλαδή:

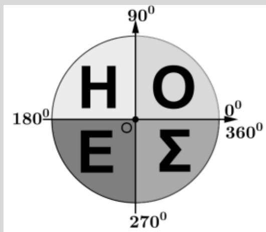
$\eta\mu(\kappa\cdot 360^\circ+\omega)=\eta\mu\omega$	$\sigma\upsilon\nu(\kappa\cdot 360^\circ+\omega)=\sigma\upsilon\nu\omega$
$\varepsilon\varphi(\kappa\cdot 360^\circ+\omega)=\varepsilon\varphi\omega$	$\sigma\varphi(\kappa\cdot 360^\circ+\omega)=\sigma\varphi\omega$

Παρατήρηση
Επειδή οι τιμές του ημίτονου και του συνημίτονου μιας γωνίας δεν μπορούν κατά απόλυτη τιμή να υπερβούν την ακτίνα του τριγωνομετρικού κύκλου, ισχύει ότι: $-1\le\eta\mu\omega\le 1$ **και** $-1\le\sigma\upsilon\nu\omega\le 1$.

Πρόσημο τριγωνομετρικών αριθμών

Για το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών παρατηρούμε ότι ισχύει ο παρακάτω πίνακας:

	1ο	2ο	3ο	4ο
ημω	+	+	-	-
συνω	+	-	-	+
εφω	+	-	+	-
σφω	+	-	+	-



Παρατηρούμε ότι στο 1ο τεταρτημόριο **Ό**λοι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί είναι θετικοί, για το λόγο αυτό στο κύκλο στο 1ο τεταρτημόριο έχουμε το γράμμα **Ο**. Στο 2ο τεταρτημόριο μόνο το ημίτονο είναι θετικό, για το λόγο αυτό έχουμε το γράμμα Η. Στο 3ο τεταρτημόριο η εφαπτομένη και η συνεφαπτομένη είναι θετικοί, οπότε προκύπτει το γράμμα Ε για το τεταρτημόριο αυτό. Τέλος στο 4ο τεταρτημόριο το συνημίτονο είναι θετικό, οπότε προκύπτει το γράμμα Σ.

Τύπος μετατροπής ακτίνιου σε μοίρες και το αντίστροφο

Έστω ότι μια γωνία ω είναι μ° και α rad τότε θα ισχύει :	$\frac{\mu}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί βασικών γωνιών οι οποίοι είναι ιδιαίτερα χρήσιμοι στις διάφορες εφαρμογές.

Γωνία ω		***Τριγωνομετρικοί αριθμοί***			
μοίρες	***rad***	***ημω***	***συνω***	***εφω***	***σφω***
0°	0	0	1	0	***Δεν ορίζεται***
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	***Δεν ορίζεται***	0
180°	π	0	-1	0	***Δεν ορίζεται***
360°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	***Δεν ορίζεται***	0

Ασκήσεις

1. Αν $\frac{9\pi}{2} < x < \frac{14\pi}{3}$ να αποδείξετε ότι: $\text{ημ}x - \text{συν}x > \text{εφ}x + \text{σφ}x$.

2. Αν $\frac{5\pi}{2} < x < 3\pi$ να αποδείξετε ότι: $\text{ημ}x - \text{εφ}x > \text{συν}x + \text{σφ}x$.

3. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας:

α) $720°$ **β)** -13π rad **γ)** $1890°$ **δ)** $\frac{11\pi}{2}$ rad

4. Να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών

1485^0, 2790^0, $\frac{91\pi}{3}$, $\frac{61\pi}{6}$.

5. Να αποδείξετε ότι: $\frac{\text{ημ}405^\circ - \text{ημ}750^\circ}{\text{συν}1125^\circ + \text{συν}1860^\circ} = 3 - 2\sqrt{2}$.

6. Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει γωνία ω ώστε : $\text{συν}\omega = \alpha^2 - 2\alpha + 3, \alpha \in \mathbb{R}$.

7. Να αποδειχθεί ότι τα παρακάτω ζεύγη γωνιών έχουν τους ίδιους τριγωνομετρικούς αριθμούς:

α) $\omega = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{10}$ και $\phi = 2\lambda\pi - \frac{17\pi}{10}$

β) $\omega = 2\kappa\pi - \frac{7\pi}{5}$ και $\phi = 2\lambda\pi + \frac{3\pi}{5}$

γ) $\omega = \kappa \cdot 360^\circ + 230^\circ$, $\varphi = \lambda \cdot 360^\circ - 130^\circ$

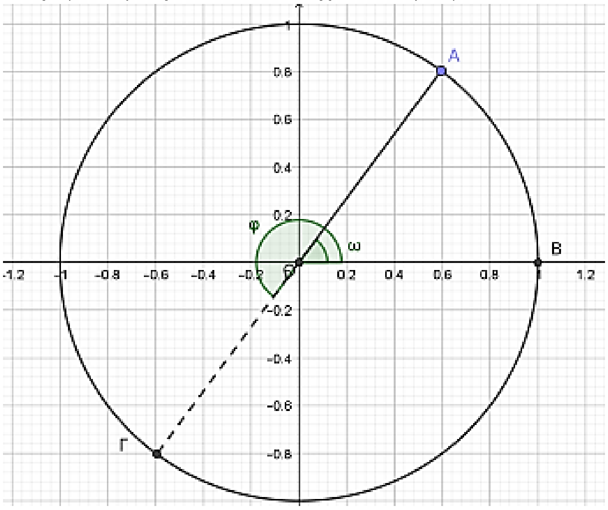
δ) $\omega = \kappa \cdot 360^\circ - 40^\circ$, $\varphi = \lambda \cdot 360^\circ + 320^\circ$

8. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε:

α) $\text{ημ}^2 x + 12 \le 7\text{ημ}x$ **β)** $\text{συν}^2 x - 1 = \text{συν}x + 5$

ΤΡΑΠΕΖΑ

9. Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\omega = BOA$.



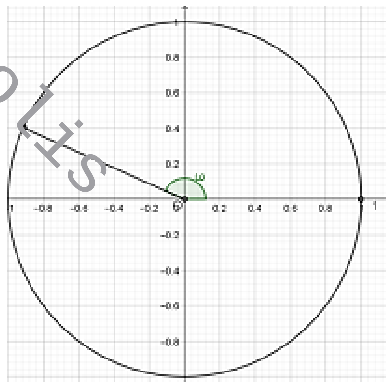
α) Με βάση το σχήμα, να αιτιολογήσετε γιατί $συνω = \frac{3}{5}$.

β) Η προέκταση του τμήματος ΑΟ τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο Γ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

i. Να εκφράσετε την γωνία $\varphi = BO\Gamma$ με την βοήθεια της γωνίας ω .

ii. Με την βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο θέλετε να υπολογίσετε το $συν\varphi$.

10. Στον διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\hat{\omega}$, με $ημω = 0{,}4$.



α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να σχεδιάσετε την γωνία $-\hat{\omega}$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Με την βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε το $ημ(-\omega)$.

11.α) Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} x + y = -1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) και του τριγωνομετρικού κύκλου, να βρείτε όλες τις γωνίες ω με $0 \le \omega \le 2\pi$, που ικανοποιούν τη σχέση $συνω + ημω = -1$ και να τις απεικονίσετε πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$	$\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$	$\sigma\varphi\omega = \dfrac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$
$\varepsilon\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\omega = 1$	$\sigma\upsilon\nu^2\omega = \dfrac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}$	$\eta\mu^2\omega = \dfrac{\varepsilon\varphi^2\omega}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}$

Ασκήσεις

12. Αν $\eta\mu x = \frac{4}{5}$ και $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, να βρεθούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας x rad.

13. Αν $\varepsilon\varphi x = \frac{3}{4}$ και $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, να βρεθούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας x rad.

14. Αν $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{12}{13}$ και $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, να βρεθούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας x rad.

15. Αν $\sigma\varphi x = \frac{15}{8}$ και $0 < x < \frac{\pi}{2}$, να βρεθούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας x rad.

16. Αν ένα σημείο Μ ενός τριγωνομετρικού κύκλου που έχει διαγράψει τόξο ω βρίσκεται στο 2^{o} τεταρτημόριο και έχει τεταγμένη $y = \frac{5}{13}$. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \dfrac{13\eta\mu\omega - 12\varepsilon\varphi\omega + 2012}{5\sigma\varphi\omega + 13\sigma\upsilon\nu\omega - 25}$

17. Να αποδείξετε ότι : $\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha \le \frac{1}{2}$.

18. Αν $6\eta\mu^2 x + \eta\mu x - 1 = 0$ και $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, να βρεθεί το συνx.

19. Αν $4\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu x = 5$ και $0 < x < \frac{\pi}{2}$, να υπολογιστεί η $\varepsilon\varphi x$.

20. Να αποδείξετε ότι:

α) $(\eta\mu x - \varepsilon\varphi x)^2 + (\sigma\upsilon\nu x - 1)^2 = \left(1 - \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right)^2$ **β)** $\dfrac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{\eta\mu x} + \dfrac{\varepsilon\varphi x}{1+\varepsilon\varphi^2 x} = \sigma\varphi x$

21.Να αποδείξετε ότι:

α) $\dfrac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1+\eta\mu\theta}+\dfrac{1+\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}=\dfrac{2}{\sigma\upsilon\nu\theta}$ **β)** $\dfrac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}+\dfrac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}=\dfrac{2}{\eta\mu x}$

22.Να αποδείξετε ότι:

α) $\varepsilon\varphi^2 x\cdot\sigma\upsilon\nu^2 x+\sigma\varphi^2 x\cdot\eta\mu^2 x=1$

β) $\left(\alpha\sigma\upsilon\nu x+\beta\eta\mu x\right)^2+\left(\alpha\eta\mu x-\beta\sigma\upsilon\nu x\right)^2=\alpha^2+\beta^2$

γ) $\eta\mu^2 x\cdot\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2 x\cdot\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2 x\cdot\sigma\upsilon\nu^2\omega+\eta\mu^2 x\cdot\sigma\upsilon\nu^2\omega=1$

δ) $\varepsilon\varphi^2 x+\sigma\varphi^2 x+2=\dfrac{1}{\eta\mu^2 x\cdot\sigma\upsilon\nu^2 x}$

ε) $\dfrac{\varepsilon\varphi x}{1-\sigma\varphi x}+\dfrac{\sigma\varphi x}{1-\varepsilon\varphi x}=\dfrac{1+\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}$

23.Να αποδείξετε ότι:

α) $\left(\varepsilon\phi x+\sigma\phi x\right)^2=\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}+\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ **β)** $\eta\mu^2 x\cdot\varepsilon\phi x-\sigma\upsilon\nu^2 x\cdot\sigma\phi x=\varepsilon\phi x-\sigma\phi x$

γ) $\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x}+\dfrac{1+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=\dfrac{2}{\sigma\upsilon\nu x}$ **δ)** $\dfrac{\eta\mu^4\alpha-\sigma\upsilon\nu^4\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}=1+\sigma\upsilon\nu\alpha$

ε) $\left(\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x}-\varepsilon\varphi x\right)^2=\dfrac{1-\eta\mu x}{1+\eta\mu x}$ **στ)** $\dfrac{1-3\eta\mu x}{1-\eta\mu x}+\dfrac{2\eta\mu x-1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=-3\varepsilon\varphi^2 x$

24.Αν $0<x\le\dfrac{\pi}{2}$, να αποδείξετε ότι :

$$A=\frac{\sqrt{1+\eta\mu x}-\sqrt{1-\eta\mu x}}{\sqrt{1+\eta\mu x}+\sqrt{1-\eta\mu x}}=\frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}=\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}.$$

25.Αν $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, να αποδείξετε ότι $\sqrt{2\sigma\varphi x+\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}}=1+\sigma\phi x$

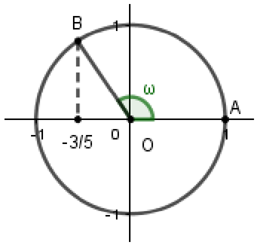
ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

26.Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\sigma\upsilon\nu A=-\dfrac{3}{5}$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο. (Μονάδες 10)

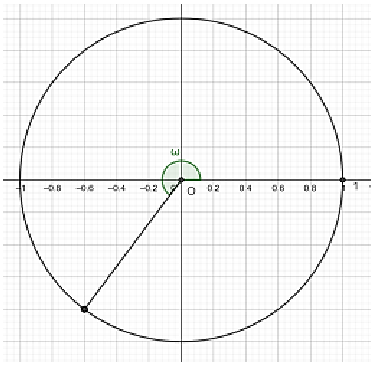
β) Να βρείτε το ημΑ .

27.α) Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας ω του διπλανού σχήματος και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



β) Αν $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{3}{5}$, να βρείτε το ημω.

28. Στον διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\hat{\omega}$.



α) Να αιτιολογήσετε με βάση το σχήμα γιατί

$\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{3}{5}$.

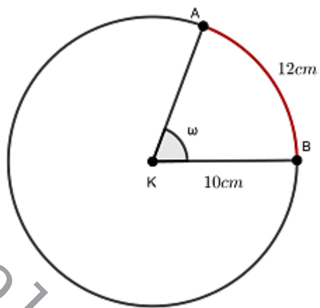
β) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς

i. ημω . **ii.** εφω

29.α) Να αποδείξετε ότι $\eta\mu 476^\circ = \eta\mu 116^\circ$.

β) Αν γνωρίζουμε ότι το $\eta\mu 116^\circ$ είναι περίπου $\frac{9}{10}$, να υπολογίσετε το $\sigma\upsilon\nu 116^\circ$.

30. Δίνεται ο κύκλος του παρακάτω σχήματος με κέντρο Κ και ακτίνα 10cm . Επίσης δίνεται το τόξο $\overset{\frown}{AB}$ με μήκος 12cm και η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία ω.



α) i. Να αιτιολογήσετε γιατί το μέτρο της γωνίας ω είναι 1, 2 rad .

ii. Με χρήση του αi) ερωτήματος, να αιτιολογήσετε γιατί η γωνία ω είναι οξεία.

β) Αν $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{9}{25}$, να βρείτε το ημω .

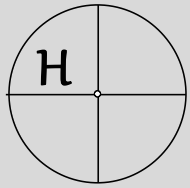
(Δίνεται ότι $\sqrt{544} = 4\sqrt{34}$)

ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ 1ο ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ

1. Παραπληρωματικές γωνίες $(\theta,\ \pi-\theta)$

Οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν το ίδιο ημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

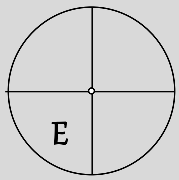
$\eta\mu(\pi-\omega)=\eta\mu\omega$	$\sigma\upsilon\nu(\pi-\omega)=-\sigma\upsilon\nu\omega$
$\varepsilon\varphi(\pi-\omega)=-\varepsilon\varphi\omega$	$\sigma\varphi(\pi-\omega)=-\sigma\varphi\omega$



2. Γωνίες που διαφέρουν κατά π. $(\theta,\ \pi+\theta)$

Οι γωνίες που διαφέρουν κατά π έχουν την ίδια εφαπτομένη και συνεφαπτομένη και αντίθετα ημίτονα και συνημίτονα.

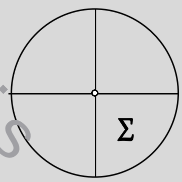
$\varepsilon\varphi(\pi+\omega)=\varepsilon\varphi\omega$	$\sigma\varphi(\pi+\omega)=\sigma\varphi\omega$
$\eta\mu(\pi+\omega)=-\eta\mu\omega$	$\sigma\upsilon\nu(\pi+\omega)=-\sigma\upsilon\nu\omega$



3. Αντίθετες γωνίες $(\theta,\ -\theta)$

Οι αντίθετες γωνίες έχουν το ίδιο ημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

$\sigma\upsilon\nu(-\omega)=\sigma\upsilon\nu\omega$	$\eta\mu(-\omega)=-\eta\mu\omega$
$\varepsilon\varphi(-\omega)=-\varepsilon\varphi\omega$	$\sigma\varphi(-\omega)=-\sigma\varphi\omega$



4. Συμπληρωματικές γωνίες $\left(\theta, \frac{\pi}{2}-\theta\right)$

Αν δύο γωνίες έχουν άθροισμα 90° $\left(\frac{\pi}{2}\right)$, το ημίτονο της μιας ισούται με το συνημίτονο της άλλης και η εφαπτομένη της μιας ισούται με τη συνεφαπτομένη της άλλης.

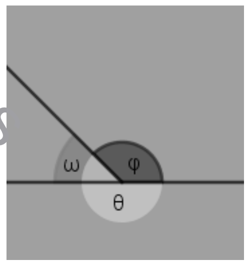
$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)=\sigma\upsilon\nu\omega$	$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)=\eta\mu\omega$
$\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)=\sigma\varphi\omega$	$\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)=\varepsilon\varphi\omega$

Ασκήσεις

31. Να συμπληρώσετε τον πίνακα :

Γωνία ω	ημω	συνω	εφω	σφω
$\frac{5\pi}{3}$				
$\frac{5\pi}{4}$				
150°				
45°				

32. Δίνεται $\sigma\upsilon\nu\varphi=-\frac{5}{13}$, όπου φ η οξεία γωνία που σχηματίζεται με κορυφή το σημείο Α της ευθείας (ε) του διπλανού σχήματος.



α) Να βρείτε το ημίτονο της γωνίας φ.

β) Να βρείτε το ημίτονο και το συνημίτονο των γωνιών θ και ω του σχήματος.

33. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών:
α) 210° **β)** -1050° **γ)** 315° **δ)** 3750° **ε)** 7320°

34. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών:
α) $\frac{7\pi}{6}$ **β)** $\frac{3\pi}{4}$ **γ)** $\frac{2014\pi}{6}$ **δ)** $-\frac{43\pi}{6}$

35. Να αποδειχτεί ότι : $\dfrac{\varepsilon\varphi 120^\circ \cdot \eta\mu 210^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 45^\circ \cdot \varepsilon\varphi 225^\circ}{\sigma\varphi 210^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 120^\circ \cdot \eta\mu(-45^\circ)\cdot \varepsilon\varphi 135^\circ} = -1.$

36. Να αποδείξετε ότι : $\dfrac{\eta\mu\left(90^\circ - \theta\right)\cdot \varepsilon\varphi 1845^\circ \cdot \varepsilon\varphi\left(810^\circ - \theta\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(990^\circ + \theta\right)\sigma\upsilon\nu\left(270^\circ + \theta\right)} = \dfrac{1}{\eta\mu\theta}$.

37. Να δείξετε ότι:

α) $$\frac{\eta\mu\frac{5\pi}{4}\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{6}\varepsilon\varphi\frac{4\pi}{3}}{2\eta\mu\frac{4\pi}{3}\varepsilon\varphi\frac{5\pi}{4}\sigma\varphi\frac{7\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

β) $$\frac{-\eta\mu(270^\circ + \theta)}{1+\sigma\upsilon\nu(90^\circ + \theta)} = \frac{\eta\mu(180^\circ + \theta) - 1}{\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \theta)}$$

γ) $$\frac{\eta\mu\left(\frac{9\pi}{2}+\theta\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{11\pi}{2}+\theta\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{9\pi}{2}+\theta\right)\sigma\varphi\left(\frac{11\pi}{2}+\theta\right)}{\varepsilon\varphi\left(\frac{17\pi}{2}-\theta\right)\eta\mu\left(\frac{19\pi}{2}-\theta\right)\sigma\varphi\left(\frac{13\pi}{2}-\theta\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{15\pi}{2}-\theta\right)} = 1.$$

38. Να δείξετε ότι:

α) $$\frac{\varepsilon\phi(\pi + x)\sigma\upsilon\nu(-x)\eta\mu(9\pi + x)}{\sigma\phi\left(\frac{17\pi}{2} - x\right)\sigma\upsilon\nu(x - 2\pi)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{13\pi}{2} + x\right)} = 1.$$

β) $$\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right)\sigma\upsilon\nu(\alpha - 2\pi)\varepsilon\phi(3\pi + \alpha)}{\sigma\phi\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)\eta\mu(5\pi - \alpha)\eta\mu(\alpha - \frac{\pi}{2})} = -1.$$

39. Να αποδείξετε ότι $$\frac{\eta\mu\left(21\pi - \theta\right)\eta\mu\left(\frac{13\pi}{2} + \theta\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{11\pi}{2} - \theta\right)\varepsilon\varphi\left(9\pi + \theta\right)}{\sigma\varphi\left(\frac{15\pi}{2} + \theta\right)\sigma\upsilon\nu\left(7\pi + \theta\right)\eta\mu\left(20\pi + \theta\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{31\pi}{2} - \theta\right)} = 1.$$

40. Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{\eta\mu\left(\frac{9\pi}{2}+\theta\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{11\pi}{2}+\theta\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{9\pi}{2}+\theta\right)\sigma\varphi\left(\frac{11\pi}{2}+\theta\right)}{\varepsilon\varphi\left(\frac{17\pi}{2}-\theta\right)\eta\mu\left(\frac{19\pi}{2}-\theta\right)\sigma\varphi\left(\frac{13\pi}{2}-\theta\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{15\pi}{2}-\theta\right)}=1$.

41. Αν για τις οξείες γωνίες Β και Γ τριγώνου ΑΒΓ ισχύει ότι $\eta\mu B=\dfrac{\sqrt{11}}{4}$ και $\eta\mu\Gamma=\dfrac{\sqrt{5}}{4}$, να αποδειχτεί ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

42. Αν Α,Β,Γ γωνίες τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι:

α) $\sigma\upsilon\nu\dfrac{3A+3B}{2}+\eta\mu\dfrac{3\Gamma}{2}=0$ **β)** $\eta\mu^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{\sigma\varphi^2\frac{B+\Gamma}{2}}{1+\sigma\varphi^2\frac{B+\Gamma}{2}}$

43.α) Να αποδείξετε ότι: $\sigma\upsilon\nu(x+45^\circ)=\eta\mu(45^\circ-x)$

β) Να βρείτε την αριθμητική τιμή του αθροίσματος:
$\sigma\upsilon\nu^2(x+45^\circ)+\sigma\upsilon\nu^2(x-45^\circ)+\eta\mu^2(45^\circ-y)+\eta\mu^2(y+45^\circ)$

44. Να αποδείξετε ότι:

α) $\sigma\upsilon\nu 0^0+\sigma\upsilon\nu 1^0+\sigma\upsilon\nu 2^0+\ldots+\sigma\upsilon\nu 179^0+\sigma\upsilon\nu 180^0=0$

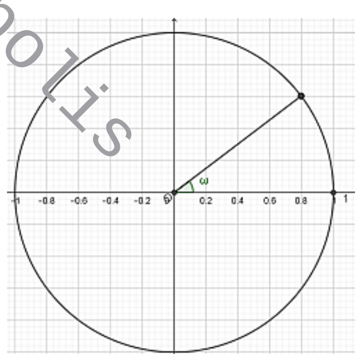
β) $\eta\mu 0^0+\eta\mu 1^0+\eta\mu 2^0+\ldots+\eta\mu 359^0=0$.

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

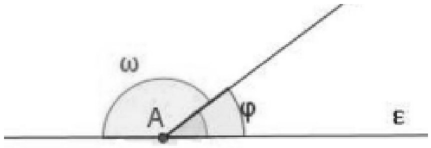
45. Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\hat{\omega}$, με συνω = 0,8.

α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να σχεδιάσετε τις γωνίες στο διάστημα [0, 2π], των οποίων το συνημίτονο είναι –0,8 . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να βρείτε την σχέση των γωνιών που βρήκατε στο α) ερώτημα με την γωνία $\hat{\omega}$.



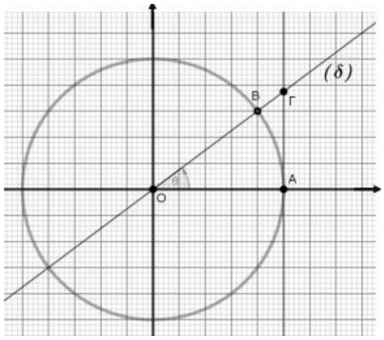
46. Δίνεται $ημφ = \frac{3}{5}$, όπου φ η οξεία γωνία που σχηματίζεται με κορυφή το σημείο Α της ευθείας (ε) του διπλανού σχήματος.



α) Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας φ.

β) Να βρείτε το ημίτονο και το συνημίτονο της γωνίας ω του σχήματος.

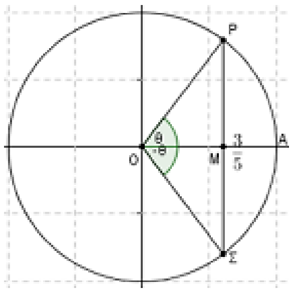
47. Στο διπλανό σχήμα έχει σχεδιασθεί ο τριγωνομετρικός κύκλος και η ευθεία (δ) η οποία είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Α. Η τελική πλευρά ΟΒ της θετικής γωνίας $AOB = \hat{θ}$,αν προεκταθεί τέμνει την ευθεία (δ) στο σημείο Γ. Γνωρίζουμε ότι $ημθ = \frac{3}{5}$.



α) Με τη βοήθεια του σχήματος ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τον αριθμό συνθ και στη συνέχεια τον αριθμό εφθ.

β) Να βρεθούν οι συντεταγμένες των σημείων Β και Γ.

48. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ο τριγωνομετρικός κύκλος και οι γωνίες θ και $-θ$.

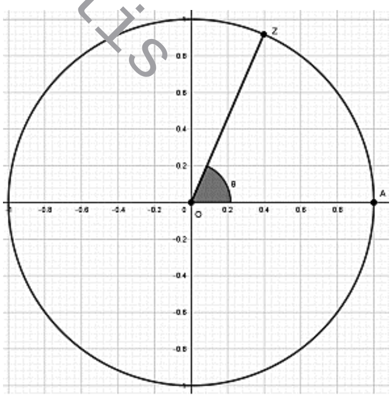


α) Να αιτιολογήσετε γιατί $συνθ = \frac{3}{5}$.

β) Να βρείτε το ημθ.

γ) Να βρείτε το ημίτονο και το συνημίτονο της γωνίας – θ.

49. Στον διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο δίνεται η γωνία $AOZ = θ$.



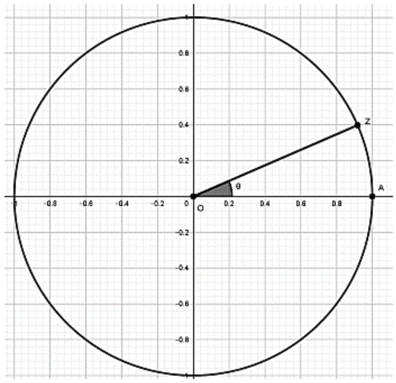
α) Να μεταφέρετε τον κύκλο στην κόλλα σας και να φέρετε σε αυτόν τις τελικές πλευρές των γωνιών $3π + θ$ και $\frac{π}{2} + θ$.

β) i. Να αιτιολογήσετε γιατί συνθ = 0, 4 .

ii. Με χρήση του βi) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς:

$συν(3π + θ)$ και $ημ\left(\frac{π}{2} + θ\right)$.

50. Στον διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο δίνεται η γωνία $AOZ = \theta$.

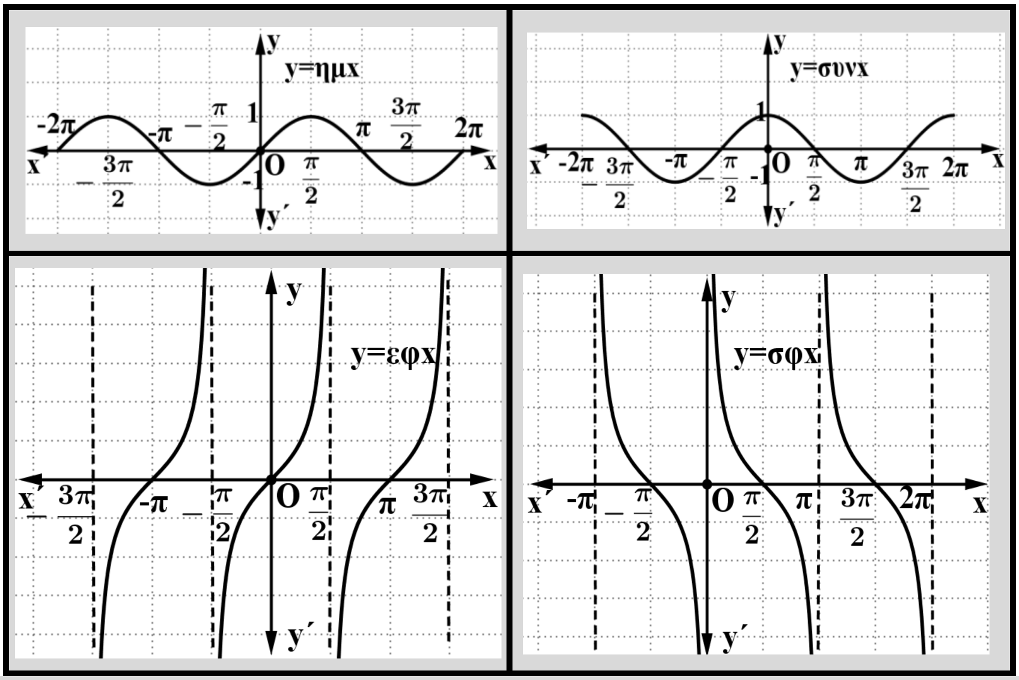


α) Να μεταφέρετε τον κύκλο στην κόλλα σας και να φέρετε σε αυτόν τις τελικές πλευρές των γωνιών $3\pi + \theta$ και $4\pi - \theta$.

β) i. Να αιτιολογήσετε γιατί $ημθ = 0,4$.

ii. Με χρήση του βi) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς: $ημ(3\pi + \theta)$ και $ημ(4\pi - \theta)$.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ



Η συνάρτηση $f(x)=\rho\eta\mu(\omega x)$, $\rho,\omega>0$

- ✓ ***Πεδίο ορισμού της είναι όλο το $\mathbb{R}$***
- ✓ ***Σύνολο τιμών της είναι το κλειστό διάστημα $[-\rho,\rho]$***
- ✓ ***το ρ καθορίζει τη μέγιστη τιμή της, που είναι ίση με ρ και την ελάχιστη τιμή της που είναι ίση με $-\rho$.***
- ✓ ***Το ω καθορίζει την περίοδο Τ της συνάρτησης. Είναι $T=\frac{2\pi}{\omega}$.***
- ✓ ***Είναι γνησίως αύξουσα στα $\left[0,\frac{\pi}{2\omega}\right],\left[\frac{3\pi}{2\omega},\frac{2\pi}{\omega}\right]$ και***

  γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $\left[\frac{\pi}{2\omega},\frac{\pi}{\omega}\right],\left[\frac{\pi}{\omega},\frac{3\pi}{2\omega}\right]$
- ✓ ***Είναι περιττή συνάρτηση.***

Η συνάρτηση $g(x)=\rho\sigma\upsilon\nu(\omega x)$, $\rho,\omega>0$

- ✓ ***Πεδίο ορισμού της είναι όλο το $\mathbb{R}$***
- ✓ ***Σύνολο τιμών της είναι το κλειστό διάστημα $[-\rho,\rho]$***
- ✓ ***το ρ καθορίζει τη μέγιστη τιμή της, που είναι ίση με ρ και την ελάχιστη τιμή της που είναι ίση με $-\rho$.***

✓ *Το ω καθορίζει την περίοδο Τ της συνάρτησης. Είναι* $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

✓ *Είναι γνησίως αύξουσα στα* $\left[0, \dfrac{\pi}{\omega}\right]$ *και*

γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $\left[\dfrac{\pi}{\omega}, \dfrac{2\pi}{\omega}\right]$

✓ ***Είναι άρτια συνάρτηση.***

Η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi(\omega x), \omega > 0$

✓ *Το ω καθορίζει την περίοδο Τ της συνάρτησης. Είναι* $T = \dfrac{\pi}{\omega}$.

✓ *Έχει πεδίο ορισμού το σύνολο* $\mathbb{R}_1 = \{x \,/\, \sigma\upsilon\nu\omega x \neq 0\}$

✓ ***Είναι περιττή συνάρτηση.***

✓ *Η f είναι γνησίως αύξουσα σε διάστημα μιας περιόδου της π.χ.* $\left(-\dfrac{\pi}{2\omega}, \dfrac{\pi}{2\omega}\right)$

✓ *Έχει ασύμπτωτες τις ευθείες* $x = \dfrac{\kappa\pi}{\omega} + \dfrac{\pi}{2\omega}, \kappa \in \mathbb{Z}$.

Η συνάρτηση $g(x) = \rho\sigma\varphi(\omega x), \omega > 0$

✓ *Το ω καθορίζει την περίοδο Τ της συνάρτησης. Είναι* $T = \dfrac{\pi}{\omega}$.

✓ *Έχει πεδίο ορισμού το σύνολο* $\mathbb{R}_1 = \{x \,/\, \eta\mu\omega x \neq 0\}$

✓ ***Είναι περιττή συνάρτηση.***

✓ *Η f είναι γνησίως φθίνουσα σε διάστημα μιας περιόδου της π.χ.* $\left(\dfrac{\pi}{\omega}, \dfrac{2\pi}{\omega}\right)$.

✓ *Έχει ασύμπτωτες τις ευθείες* $x = \dfrac{\kappa\pi}{\omega}, \kappa \in \mathbb{Z}$.

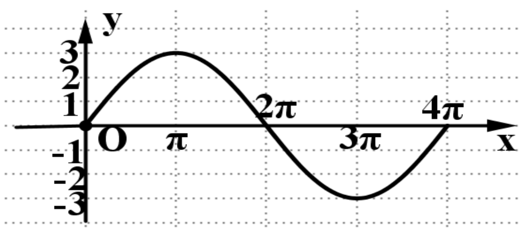
Ασκήσεις

51. Να βρείτε το μέγιστο το ελάχιστο και την περίοδο των συναρτήσεων:

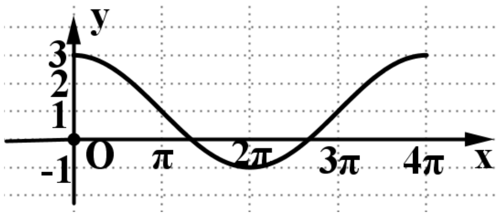
α) $f(x) = 4\eta\mu x$ **β)** $f(x) = -2\sigma\upsilon\nu\dfrac{x}{3}$ **γ)** $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu 2x - 5$

δ) $f(x) = -3\eta\mu 3x + 4$

52. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \rho\eta\mu(\omega x),\ \rho, \omega > 0$
Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών $\omega,\ \rho$.



53. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha\sigma\upsilon\nu(\omega x) + \beta,\ x \in [0, 4\pi]$.
Να βρείτε τα α, β, ω.



54. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3\sigma\upsilon\nu 2x\ ,\ x \in \Re$

α) Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της *f*.
β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα και να παραστήσετε γραφικά την *f* σε διάστημα μιας περιόδου.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
2x					
συν2x					
$f(x) = -3\sigma\upsilon\nu 2x$					

55. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3\eta\mu\frac{x}{3}$.

α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Συνάρτηση f	**Διάστημα**	**Μονοτονία της f**
$f(x) = 3\eta\mu\frac{x}{3}$	$\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$	
	$\left[\frac{3\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}\right]$	
	$\left[\frac{9\pi}{2}, 6\pi\right]$	

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή.
γ) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης .
δ) Να κάνετε την γραφική της παράσταση στο διάστημα [0,6π].

56.α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Συνάρτηση f	**Διάστημα**	**Μονοτονία**
$f(x)=ημ2x$	[0,π/4]	
	[π/4,3π/4]	
	[3π/4,π]	
$g(x)=συν2x$	[0,π/2,]	
	[π/2,π]	

β) Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων.

57. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=ρημ(ωx), ρ>0$ η οποία έχει περίοδο 4π και έχει ελάχιστο το ελάχιστο της συνάρτησης $g(x)=-2ημ(9x)$.

α) Να βρεθεί ο τύπος της f(x).

β) Αν $f(x)=2ημ\frac{x}{2}$ να γίνει η γραφική παράσταση της f στο $[0,4π]$.

58. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=συν\left(\frac{π}{2}-x\right)-ημ(π+x)$

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f(x) και να απλοποιηθεί ο τύπος της.

β) Να βρεθούν η περίοδος και τα ακρότατα της f(x), δηλαδή η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή.

γ) Να γίνει η γραφική παράσταση της f.

59. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=αημ\left(\frac{2x}{3}\right)+β$ με $x\in\mathbb{R}$ και $α>0, β\in\mathbb{R}$

α) Αν η μέγιστη τιμή της f είναι το 3 και η γραφική παράσταση τέμνει τον y΄y στο 1 βρείτε τον τύπο της f .

β) Να κάνετε την γραφική παράσταση σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου και στο διάστημα να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα x΄x.

60. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=κ+3+2ημ\frac{(2λ+1)x}{3}$ και

$g(x)=6λ+10-3συν\frac{(κ-2)x}{4}$. Να βρεθούν τα $κ\in(2,+\infty)$ και $λ\in(0,+\infty)$ αν είναι γνωστό ότι έχουν την ιδία μέγιστη τιμή και η περίοδος της f είναι τριπλάσια από την περίοδο της g .

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

61. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{2}συν2x, x\in\mathbb{R}$.

α) Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης; Ποια είναι η περίοδος της f ;

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.

62. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3\text{συν}2x$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f.

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα και να παραστήσετε γραφικά την f σε διάστημα μιας περιόδου.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$					
$\text{συν}2x$					
$f(x) = -3\text{συν}2x$					

63. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{2} \cdot \text{συν}x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) i. Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης.

ii. Να βρείτε την μέγιστη και ελάχιστη τιμής της.

β) Να υπολογίσετε τον αριθμό $f(2025\pi)$.

64. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4\text{ημ}(11\pi - x)$, $x \in \mathbb{R}$.

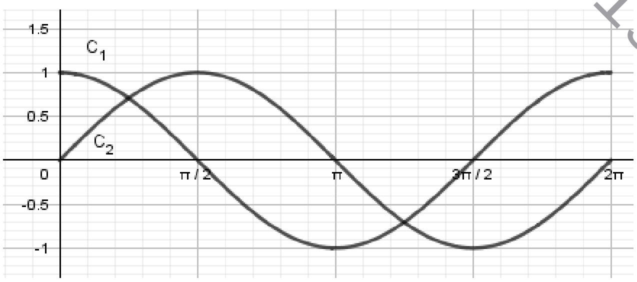
α) Να δείξετε ότι:

i. $\text{ημ}(11\pi - x) = \text{ημ}x$, $x \in \mathbb{R}$.

ii. $f(x) = 4\text{ημ}x$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 4\text{ημ}x$ όταν $x \in [0, 2\pi]$.

65. Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων έχουμε σχεδιάσει δύο γραφικές παραστάσεις C_1 και C_2 για $x \in [0, 2\pi]$.



α) Αν οι γραφικές παραστάσεις είναι των συναρτήσεων $f(x) = \text{συν}x$ και $g(x) = \text{ημ}x$ για $x \in [0, 2\pi]$ ποια από τις C_1, C_2 είναι η γραφική παράσταση της $f(x) = \text{συν}x$ και ποια της $g(x) = \text{ημ}x$;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Με την βοήθεια του σχήματος να λύσετε την εξίσωση $ημx = συνx$ στο διάστημα $[0, 2π]$.

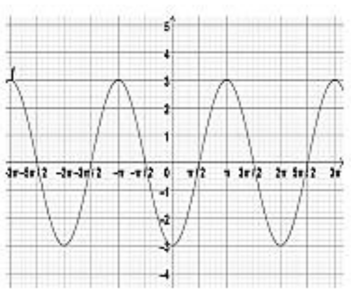
66. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3συνx,\ x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f.

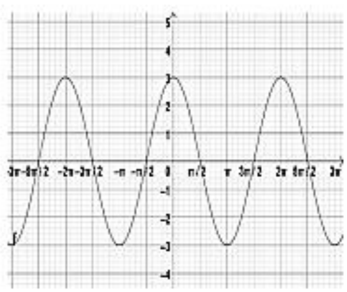
β) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f.

γ) Από τις παρακάτω τέσσερις γραφικές παραστάσεις μία μόνο αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση της f, να επιλέξετε αυτή που αντιστοιχεί στη συνάρτηση $f(x) = -3συνx$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

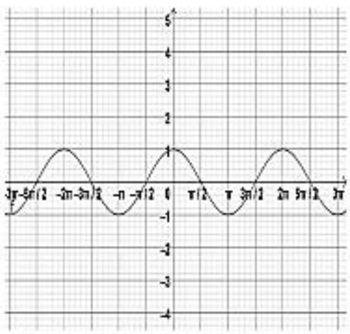
Α)



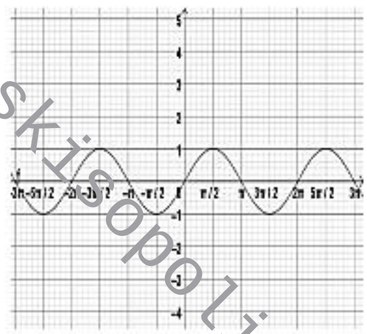
Β)



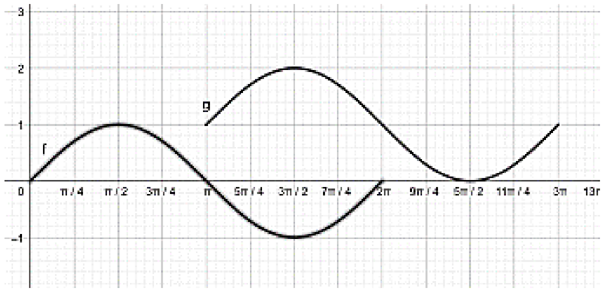
Γ)



Δ)



67.



Στο παραπάνω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ημx$ στο διάστημα [0, 2π] και η γραφική παράσταση της συνάρτησης g που προέκυψε από την f με δύο διαδοχικές μετατοπίσεις.
Με την βοήθεια του σχήματος να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g , την μέγιστη τιμή της και σε ποια θέση την αποκτά.

β) i. τις δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της f από τις οποίες προέκυψε η g .
ii. τον τύπο της g .

68.Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ημ2x,\ x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την περίοδο καθώς και τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της g .

β) i. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$					
$g(x) = συν2x$					

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα μίας περιόδου.

69.Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = συν2x,\ x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την περίοδο καθώς και τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της f .

β) i. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$					
$f(x) = ημ2x$					

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της g σε διάστημα μίας περιόδου.

70. Η Αλίκη και η Αθηνά διασκεδάζουν στη ρόδα του λούνα παρκ. Η απόσταση, σε μέτρα, του καθίσματός τους από το έδαφος τη χρονική στιγμή t sec δίνεται από τη συνάρτηση $h(t) = 8 + 6\eta\mu\left(\frac{\pi t}{30}\right)$ και $0 \le t \le 180$.

α) Να βρείτε το ελάχιστο και το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει το κάθισμα, καθώς και τις στιγμές κατά τις οποίες το κάθισμα βρίσκεται στο ελάχιστο και στο έγιστο ύψος.

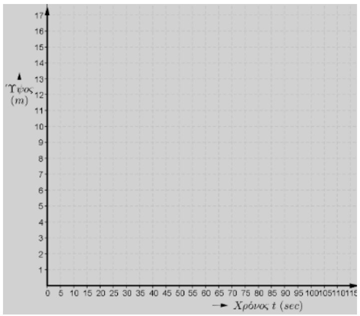
β) Να υπολογίσετε την ακτίνα της ρόδας.

γ) Να βρείτε την περίοδο της κίνησης, δηλαδή το χρόνο στον οποίο η ρόδα ολοκληρώνει μια περιστροφή. Πόσους γύρους έκαναν οι δύο φίλες στο διάστημα από 0 έως 180 sec;

δ) Να μεταφέρετε στην κόλα σας τον πίνακα τιμών και το σύστημα συντεταγμένων που δίνονται παρακάτω και :

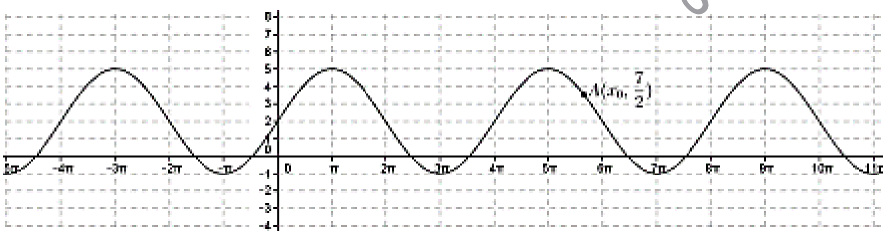
i. να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών της συνάρτησης του ύψους h(t).

t	0	15	30	45	60	75	90
h(t)							



ii. να σχεδιάσετε στο σύστημα συντεταγμένων το τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h(t) με $0 \le t \le 90$.

71. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f η οποία είναι της μορφής $f(x) = \rho\eta\mu(\omega x) + k$, με ρ, k πραγματικές σταθερές και ω > 0.



α) Με βάση τη γραφική παράσταση, να βρείτε:

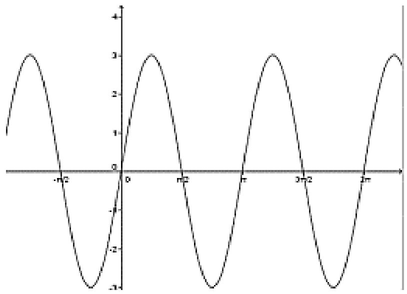
i. τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f

ii. την περίοδο Τ της συνάρτησης f

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές των σταθερών ρ, ω και k. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Θεωρώντας γνωστό ότι ρ = 3, $\omega = \dfrac{1}{2}$ και k = 2, να προσδιορίσετε αλγεβρικά την τετμημένη x_0 του σημείου $A\left(x_0, \dfrac{7}{2}\right)$ της γραφικής παράστασης, που δίνεται στο σχήμα.

72. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που είναι της μορφής $f(x) = \rho\eta\mu(\alpha x), x \in \mathbb{R}$ και $\alpha, \rho > 0$.



α) Να βρείτε, με βάση το σχήμα, την περίοδό της, την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.

β) Με βάση τις απαντήσεις στο προηγούμενο ερώτημα, να βρείτε τους αριθμούς α και ρ.

Έστω ρ = 3 και α = 2. Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x) = x^4 - 2x^2 + 5,\ x \in \mathbb{R}$.

γ) Να αποδείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της είναι ίση με 4.

δ) Να αιτιολογήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις των f, g δεν έχουν κοινό σημείο.

73. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \rho\eta\mu(\alpha x), g(x) = \eta\mu(\omega x)$ όπου $\omega, \rho > 0$.

α) Να βρεθούν οι τιμές των ρ, ω, αν είναι γνωστό ότι η ελάχιστη τιμή της f είναι -2 και η περίοδος της g είναι π. Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

β) i. Να κάνετε, στο ίδιο σύστημα αξόνων, τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2\eta\mu x,\ x \in [0, \pi]$ και $g(x) = \eta\mu(2x),\ x \in [0, \pi]$.

ii. Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να αποδείξετε ότι

$$2\eta\mu\frac{5\pi}{9} > \eta\mu\frac{10\pi}{9}.$$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

✓ *Βασικές εξισώσεις*

$\eta\mu x=\eta\mu\theta \Leftrightarrow \left(x=2\kappa\pi+\theta\right)$ ή $\left(x=2\kappa\pi+\pi-\theta\right), k\in\mathbb{Z}$	$\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow x=2\kappa\pi\pm\theta\ , k\in\mathbb{Z}$
$\varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\theta \Leftrightarrow x=\kappa\pi+\theta\ , k\in\mathbb{Z}$	$\sigma\varphi x=\sigma\varphi\theta \Leftrightarrow x=\kappa\pi+\theta\ , k\in\mathbb{Z}$

✓ *Ειδικές περιπτώσεις*

$\eta\mu x=1 \Leftrightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ $, k\in\mathbb{Z}$	$\eta\mu x=-1 \Leftrightarrow x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$ $, k\in\mathbb{Z}$	$\sigma\upsilon\nu x=-1 \Leftrightarrow x=2k\pi+\pi$ $, k\in\mathbb{Z}$
$\sigma\upsilon\nu x=1 \Leftrightarrow x=2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$	$\eta\mu x=0 \Leftrightarrow x=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$	$\sigma\upsilon\nu x=0 \Leftrightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$

✓ ***Οι παρακάτω πρώτες τρείς εξισώσεις μετασχηματίζονται σε βασικές εξισώσεις με τη βοήθεια των αντίθετων τόξων, ενώ η τέταρτη μετασχηματίζεται σε βασική με τη βοήθεια των παραπληρωματικών τόξων.***

$\eta\mu f(x)=-\eta\mu g(x) \Leftrightarrow \eta\mu f(x)=\eta\mu\left(-g(x)\right)$
$\varepsilon\varphi f(x)=-\varepsilon\varphi g(x) \Leftrightarrow \varepsilon\varphi f(x)=\varepsilon\varphi\left(-g(x)\right)$
$\sigma\varphi f(x)=-\sigma\varphi g(x) \Leftrightarrow \sigma\varphi f(x)=\sigma\varphi\left(-g(x)\right)$
$\sigma\upsilon\nu f(x)=-\sigma\upsilon\nu g(x) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu f(x)=\sigma\upsilon\nu\left(\pi-g(x)\right)$

✓ ***Οι παρακάτω εξισώσεις μετασχηματίζονται σε βασικές εξισώσεις με τη βοήθεια των συμπληρωματικών τόξων.***

$\eta\mu f(x)=\sigma\upsilon\nu g(x) \Leftrightarrow \eta\mu f(x)=\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-g(x)\right)$
$\sigma\upsilon\nu f(x)=\eta\mu g(x) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu f(x)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-g(x)\right)$
$\varepsilon\varphi f(x)=\sigma\varphi g(x) \Leftrightarrow \varepsilon\varphi f(x)=\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}-g(x)\right)$

$\sigma\varphi f(x)=\varepsilon\varphi g(x) \Leftrightarrow \sigma\varphi f(x)=\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}-g(x)\right)$

Όταν $f(x)=g(x)$ ***για τις δύο πρώτες χρησιμοποιείται ο τρόπος***

$\eta\mu f(x)=\sigma\upsilon\nu f(x) \overset{:\sigma\upsilon\nu f(x)\neq 0}{\Leftrightarrow} \varepsilon\varphi f(x)=1$
$\eta\mu f(x)=\sigma\upsilon\nu f(x) \overset{:\eta\mu f(x)\neq 0}{\Leftrightarrow} \sigma\varphi f(x)=1$

✓ *Οι εξισώσεις :*

$\alpha\eta\mu^2 f(x)+\beta\eta\mu f(x)+\gamma=0,\alpha\neq 0$ ***και f(x) της μορφής γx+δ***
$\alpha\sigma\upsilon\nu^2 f(x)+\beta\sigma\upsilon\nu f(x)+\gamma=0,\alpha\neq 0$ ***και f(x) της μορφής γx+δ***
$\alpha\varepsilon\varphi^2 f(x)+\beta\varepsilon\varphi f(x)+\gamma=0,\alpha\neq 0$ ***και f(x) της μορφής γx+δ***
$\alpha\sigma\varphi^2 f(x)+\beta\sigma\varphi f(x)+\gamma=0,\alpha\neq 0$ ***και f(x) της μορφής γx+δ***

μετασχηματίζονται σε δευτεροβάθμιες εξισώσεις ($\alpha\omega^2+\beta\omega+\gamma=0$ ***) με τη βοήθεια βοηθητικού αγνώστου ω.***

$\left(\eta\mu f(x)=\omega,\sigma\upsilon\nu f(x)=\omega,\varepsilon\varphi f(x)=\omega,\sigma\varphi f(x)=\omega\right)$.

✓ *Οι εξισώσεις :*

$\alpha\eta\mu^2 f(x)+\beta\sigma\upsilon\nu f(x)+\gamma=0,\alpha\neq 0$ ***και f(x) της μορφής γx+δ***
$\alpha\sigma\upsilon\nu^2 f(x)+\beta\eta\mu f(x)+\gamma=0,\alpha\neq 0$ ***και f(x) της μορφής γx+δ***

λύνονται με τη βοήθεια των τύπων $\sigma\upsilon\nu^2 x=1-\eta\mu^2 x,\eta\mu^2 x=1-\sigma\upsilon\nu^2 x$ ***και με τη χρήση βοηθητικού αγνώστου όπως οι προηγούμενες.***

Ασκήσεις

74. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\eta\mu x=\frac{1}{2}$ **β)** $\eta\mu x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **γ)** $\sigma\upsilon\nu x=-\frac{1}{2}$

δ) $\sigma\upsilon\nu x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ **ε)** $\varepsilon\varphi x=-1$ **στ)** $\varepsilon\varphi x=-\sqrt{3}$

ζ) $\sigma\varphi x=\sqrt{3}$ **ζ)** $\sigma\varphi x=-1$

75. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\sqrt{2}\eta\mu x+1=0$ **β)** $2\sigma\upsilon\nu x+1=0$ **γ)** $\sqrt{3}\varepsilon\varphi x+1=0$ **δ)** $\sqrt{3}\sigma\varphi x=-3$

76. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\sqrt{2}(1+\eta\mu x)(2+\sigma\upsilon\nu x)=0$ **β)** $\left(3\varepsilon\varphi x+\sqrt{3}\right)\left(1-\sigma\upsilon\nu^2 x\right)=0$

γ) $\left(1-2\eta\mu^2 x\right)\left(1+2\sigma\upsilon\nu^2 x\right)=0$ **δ)** $\left(\dfrac{1}{\eta\mu x}-1\right)(1+\sigma\upsilon\nu x)=0$

77. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\eta\mu 2x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **β)** $\sigma\upsilon\nu 2x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **γ)** $\varepsilon\varphi\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}$

δ) $\sigma\varphi 2x=-1$ **ε)** $\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=\dfrac{1}{2}$ **στ)** $\varepsilon\phi\left(\dfrac{\pi}{3}-3x\right)=-\sqrt{3}$

ζ) $\sigma\upsilon\nu\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ η) $\sigma\phi\left(\dfrac{\pi}{4}+2x\right)=-\dfrac{3}{\sqrt{3}}$

78. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\sigma\phi\left(\dfrac{\pi}{4}-3x\right)=-\sigma\varphi x$ **β)** $\eta\mu\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\eta\mu\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

γ) $\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{3}-2x\right)=-\sigma\upsilon\nu\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ **δ)** $\varepsilon\phi\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)+\varepsilon\phi x=0$

79. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\eta\mu 2x=\sigma\upsilon\nu\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ **β)** $\sigma\upsilon\nu\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\eta\mu\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=0$

γ) $\varepsilon\varphi 2x=\sigma\varphi\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ **δ)** $\eta\mu\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\sigma\upsilon\nu\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=0$

ε) $\varepsilon\varphi\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\sigma\varphi\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=0$ **ζ)** $\varepsilon\varphi 2x\cdot\varepsilon\varphi x=1$

η) $\sigma\varphi\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)\sigma\varphi x+1=0$ **θ)** $\sigma\varphi x\cdot\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)=1$

80. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2\eta\mu^2 x+5\eta\mu x-3=0$ **β)** $2\sigma\upsilon\nu^2 x+1=5\eta\mu x$ **γ)** $3\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x-5\sigma\upsilon\nu x=0$

81. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2\sigma\upsilon\nu^2 x+7\sigma\upsilon\nu x+3=0$ **β)** $4\eta\mu^2 x+2\left(3+\sqrt{3}\right)\eta\mu x+3\sqrt{3}=0$

γ) $\varepsilon\varphi^2 x-\sigma\varphi^2 x=\sigma\varphi x-\varepsilon\varphi x$ **δ)** $\sigma\varphi^2 x+\sqrt{3}=(1+\sqrt{3})\sigma\varphi x$

82. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2\eta\mu^2 x-3\eta\mu x+1=0$ **β)** $2\sigma\upsilon\nu^2 x+1=5\eta\mu x$ **γ)** $\varepsilon\varphi x+3\sigma\varphi x=2\sqrt{3}$

δ) $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}+1=3\varepsilon\varphi x$ **ε)** $\eta\mu^3 x-2\eta\mu^2 x-8\eta\mu x=0$

στ) $4\eta\mu^4 x+5\sigma\upsilon\nu^2 x-4=0$

83. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\varepsilon\varphi^2 x+\varepsilon\varphi x=0$ **β)** $2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu^2 x=\eta\mu x$ **γ)** $1+\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x=0$

δ) $\sqrt{3}\cdot\varepsilon\varphi x=2\eta\mu x$ **ε)** $\varepsilon\varphi x+\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x}=2$ **στ)** $\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}+\frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}=4$

84. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\eta\mu x=\sigma\upsilon\nu x$ **β)** $\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=0$

γ) $\eta\mu x=\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x$ **δ)** $\sigma\upsilon\nu x+\sqrt{3}\eta\mu x=0$

85. Να λύσετε την εξίσωση: $7-|\eta\mu x-3|-4\eta\mu^2 x=\sigma\upsilon\nu^2 x+|2-\eta\mu x|$.

86. Να λύσετε στο $[0,\pi)$ τις εξισώσεις:

α) $2\sigma\upsilon\nu\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=1$ **β)** $2\eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+1=0$

87. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2\eta\mu\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=1$ στο $(\pi,2\pi)$ **β)** $1-\sigma\varphi 2x=0$ στο $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$

88. Να λυθεί η εξίσωση $3\sigma\varphi x\cdot\sigma\upsilon\nu x+2\sqrt{3}=6\sigma\varphi x+\sqrt{3}\cdot\sigma\upsilon\nu x$ στο $[2\pi,4\pi]$.

89. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις στα αντίστοιχα διαστήματα:

α) $2\sigma\upsilon\nu\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)-1=0$ στο $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ β) $2\eta\mu\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=1$ στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$

γ) $\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ στο $(0,2\pi)$ **δ)** $\varepsilon\varphi\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=\varepsilon\varphi\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ στο $\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$

ε) $\eta\mu x-1=\sigma\upsilon\nu^2 x$ στο $[\pi,3\pi]$ **στ)** $\eta\mu^2 2x+\eta\mu^2 x=0$ στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

90. Να λύσετε την εξίσωση: $\eta\mu^{2012}2x+\sigma\upsilon\nu^{2014}x=0$

91. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\eta\mu(\pi\cdot\sigma\upsilon\nu x)=1$ **β)** $\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}\eta\mu x\right)=1$

92.α) Να αποδείξετε ότι : $\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu x}+\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x}=\frac{2}{\sigma\upsilon\nu x}$, όπου $x\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$.

β) Να λύσετε την εξίσωση: $\dfrac{συνx}{1-ημx}+\dfrac{συνx}{1+ημx}=\dfrac{-4}{\sqrt{3}}$.

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

93. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2ημx+1,\ x\in\mathbb{R}$

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f.

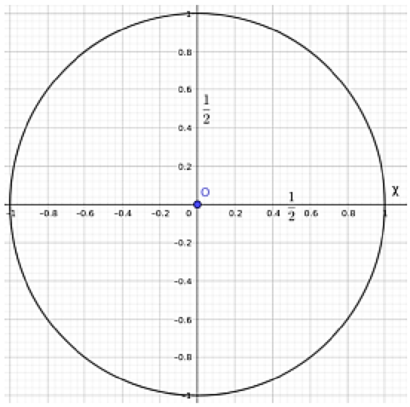
β) Για ποια τιμή του $x\in[0,2\pi]$ η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστη τιμή;

94. Έστω γωνία x για την οποία ισχύουν: $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ και $ημx+ημ(\pi-x)=1$.

α) Να αποδείξετε ότι $ημx=\dfrac{1}{2}$.

β) Να βρείτε την γωνία x.

95. α) Στον διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο να σημειώσετε τις τελικές πλευρές δύο γωνιών που ανήκουν στο διάστημα [0,2π), με αρχική πλευρά την ημιευθεία Ox, οι οποίες να έχουν ημίτονο ίσο με $\dfrac{1}{2}$ και άλλες δύο οι οποίες να έχουν συνημίτονο ίσο με $\dfrac{1}{2}$.



β) Να λύσετε την εξίσωση $ημx=\dfrac{1}{2}$ για $x\in\mathbb{R}$.

96. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3συν2x,\ x\in\mathbb{R}$.

α) i. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f.

ii. Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=-3$ στο $\mathbb{R}$.

97. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2συν(13\pi+x)-2ημ\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$.

α) Να δείξετε ότι $συν(13\pi+x)=-συνx$.

β) Να δείξετε ότι $f(x)=-4συνx$.

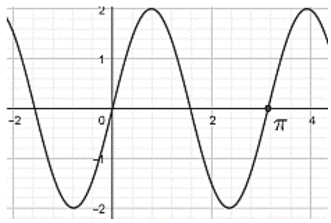
γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=-2$.

98. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = ημαx \cdot \left[συν\left(\frac{π}{2} - αx\right) + 2\right] - συναx \cdot συν(π - αx) - 1,\ α \in \mathbb{R}.$$

α) i. Να δείξετε ότι $f(x) = 2ημαx,\ x \in \mathbb{R}$.

ii. Δίνεται επιπλέον ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να δείξετε ότι α = 2.



β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία ε: y = 1 για $x \in [0, π]$.

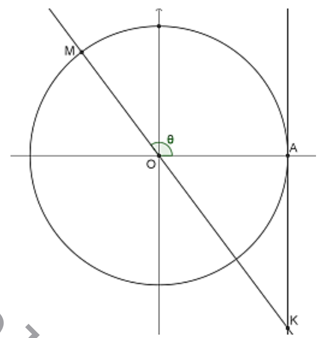
99. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = αημβx$, με α, β ακέραιους θετικούς αριθμούς.

α) Να βρείτε την τιμή του α, αν η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι 2 .

β) Αν α = 2 , να δείξετε ότι η μικρότερη τιμή του β για την οποία $f\left(\frac{π}{16}\right) = 2$ είναι β = 8.

γ) Αν $α = 2$ και $β = 8$, να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$ στο διάστημα $\left[0, \frac{π}{2}\right]$.

100. Στο διπλανό σχήμα δίνεται μια γωνία $θ = \hat{AOM}$ με $ημθ = \frac{4}{5}$, της οποίας η τελική πλευρά τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο Μ και την ευθεία x = 1 στο σημείο Κ.



α) Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς συνθ, εφθ, σφθ.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Μ και Κ .

γ) Έστω μια γωνία $φ \in [0, 2π]$ για την οποία ισχύει $ημφ = \frac{3}{5}$ και συνθ < 0.

i. Να αιτιολογήσετε γιατί η γωνία φ έχει την τελική πλευρά της στο 2ο τεταρτημόριο.

ii. Να αιτιολογήσετε γιατί θ < φ .

101. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 + 2ημ\left(\frac{πx}{2}\right), x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f . (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f . (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x .

δ) Να αποδείξετε ότι $\left(f\left(x\right)-1\right)^2+\left(f\left(1-x\right)-1\right)^2=4$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

102. Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)+\eta\mu\left(\pi+x\right), x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f\left(x\right)=\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$.

β) Να αποδείξετε ότι $-2\le f\left(x\right)\le 2$. Κατόπιν να εξετάσετε αν ο αριθμός 2 είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης.

γ) Να βρείτε:

i. Το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f της f με τον άξονα y΄y.

ii. Δυο σημεία τομής της C_f με τον x΄x .

103. Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=2\sigma\upsilon\nu x,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.

β) Να βρείτε δυο κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία y = 1.

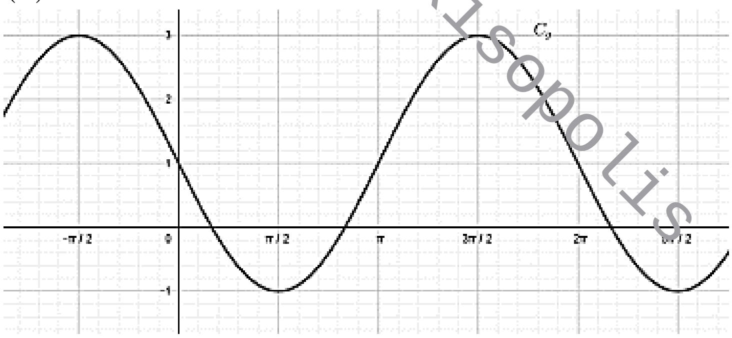
γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ και $f\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση, στο διάστημα [0, 2π].

104. Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=2\eta\mu 3x+1,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την περίοδο Τ , τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f .

β) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g\left(x\right)=\alpha\eta\mu\beta x+\gamma$, με $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, $\beta>0$ και πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.



i. Με βάση το σχήμα, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, και γ. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii. Για $\alpha=-2$, $\beta=1$ και $\gamma=1$, να λύσετε την εξίσωση $f\left(x\right)=g\left(x\right)$ στο διάστημα $\left[0,\pi\right)$.

105.Δίνεται το σύστημα: (Σ): $\begin{cases} -x+2y=1 \\ x+\lambda y=\lambda \end{cases}$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) i. Αν $\lambda=-1$,να λύσετε το σύστημα.

ii. Αν (x_0, y_0) είναι η λύση του συστήματος για $\lambda=-1$, να βρείτε γωνία $\theta \in (0, 2\pi]$ τέτοια, ώστε $x_0 = \sigma\upsilon\nu\theta$ και $y_0 = \eta\mu\theta$.

β) Αν λ = 1 και (x_1, y_1) είναι η αντίστοιχη λύση του συστήματος, να δείξετε ότι δεν υπάρχει γωνία ω, τέτοια ώστε $x_1 = \sigma\upsilon\nu\omega$ και $y_1 = \eta\mu\omega$.

γ) Αν γνωρίζουμε ότι το σύστημα (Σ) έχει μοναδική λύση την (x_2, y_2) με $x_2 = \sigma\upsilon\nu\varphi$ και $y_2 = \eta\mu\varphi$, $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

i. Να δείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{3}{5}$ και $\eta\mu\varphi = \frac{4}{5}$.

ii. Να υπολογίσετε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

106.Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu^2(\pi - x) - 3\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

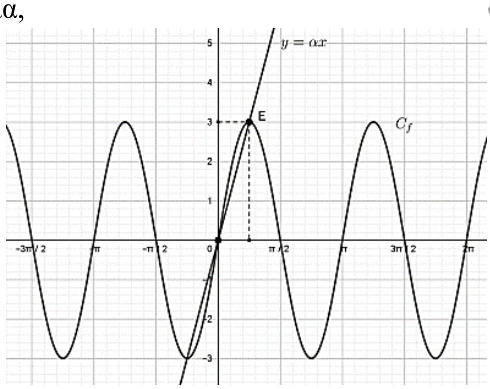
α) Να δείξετε ότι $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu^2 x - 3\sigma\upsilon\nu x + \alpha$.

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή.

γ) Να βρείτε το α αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{\pi}{3}, 1\right)$.

δ) Για α =2 και $g(x) = 2\eta\mu^2 x + 9\sigma\upsilon\nu x - 9$, να εξετάσετε (αν υπάρχουν) κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

107.Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η ευθεία $y = \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \rho\eta\mu(\omega x)$, όπου $\omega > 0$, $\rho > 0$ και $x \in \mathbb{R}$. Με βάση το σχήμα,



α) Να δείξετε ότι ρ = 3 και ω = 2 .

β) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α .

γ) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $3\eta\mu(2x)-\frac{12}{\pi}x=0$.

108.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)-2\eta\mu(\pi+2x)$, $\alpha>0$.

α) Να δείξετε ότι $f(x)=(\alpha+2)\eta\mu 2x$.

β) i. Αν η μέγιστη τιμή της f είναι 4, να δείξετε ότι α = 2.

ii. Να βρείτε την περίοδο της f.

γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f σε διάστημα μιας περιόδου.

δ) Αν $g(x)=5-\sigma\upsilon\nu^2 2x$, να βρείτε, αν υπάρχουν, τα κοινά σημεία της C_f με την C_g, όπου C_f, C_g οι γραφικές παραστάσεις των f, g αντίστοιχα.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ $\alpha\pm\beta$

Τυπολόγιο :

$\eta\mu(\alpha-\beta)=\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\beta\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha$	$\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta}$
$\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)=\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta$	$\varepsilon\varphi(\alpha-\beta)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta}{1+\varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta}$
$\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)=\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta$	$\sigma\varphi(\alpha+\beta)=\frac{\sigma\varphi\alpha\cdot\sigma\varphi\beta-1}{\sigma\varphi\alpha+\sigma\varphi\beta}$
$\sigma\varphi(\alpha-\beta)=\frac{\sigma\varphi\alpha\cdot\sigma\varphi\beta+1}{\sigma\varphi\beta-\sigma\varphi\alpha}$	

Ασκήσεις

109.Αν $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$, $\pi<y<\frac{3\pi}{2}$ και $\eta\mu x=-\frac{3}{5}$, $\sigma\upsilon\nu y=-\frac{4}{5}$ να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας α+β .

110. Αν $\frac{\pi}{2}<x<\pi$, $\frac{3\pi}{2}<y<2\pi$ και $\eta\mu x=\frac{12}{15}$, $\sigma\upsilon\nu y=\frac{24}{25}$ να υπολογίσετε τους
τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας α-β .

111.Αν $0<x<\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}<y<\pi$ και $\sigma\upsilon\nu x=\frac{12}{13}$, $\varepsilon\varphi y=-\frac{3}{4}$ να υπολογίσετε τα:

α) $\sigma\upsilon\nu(x+y)$ **β)** $\eta\mu(x-y)$

112. Αν $\eta\mu x - \eta\mu y = 1$ και $\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu y = \sqrt{3}$, να βρείτε το $\sigma\upsilon\nu(x+y)$.

113. Να αποδείξετε ότι:

α) $\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\beta$

β) $\dfrac{\eta\mu(\alpha+\beta)\eta\mu(\alpha-\beta)}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\beta} = \varepsilon\varphi^2\alpha - \varepsilon\varphi^2\beta$

114. Να αποδείξετε ότι η παράσταση $A = \sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right) + \sigma\upsilon\nu^2\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)$

είναι ανεξάρτητη του α.

115. Αν $3\eta\mu(\alpha+\beta) = 4\eta\mu(\alpha-\beta)$, τότε για τις επιτρεπόμενες τιμές των α και β να αποδείξετε ότι $\varepsilon\varphi\alpha = 7\varepsilon\varphi\beta$.

116. Αν σ΄ ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση $\eta\mu A = 2\eta\mu B \cdot \sigma\upsilon\nu\Gamma$, να δείξετε ότι είναι ισοσκελές.

117. Αν στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\dfrac{\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)}{\eta\mu A + \eta\mu(B-\Gamma)} = \sigma\phi B$. Τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

118. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι:

α) $\eta\mu^2 A + \eta\mu^2 B + \eta\mu^2\Gamma - 2\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma = 2$

β) $\eta\mu^2\dfrac{A}{2} + \eta\mu^2\dfrac{B}{2} + \eta\mu^2\dfrac{\Gamma}{2} - 2\eta\mu\dfrac{A}{2}\eta\mu\dfrac{B}{2}\eta\mu\dfrac{\Gamma}{2} = 1$

γ) $\eta\mu A\eta\mu(B-\Gamma) + \eta\mu B\eta\mu(\Gamma-A) + \eta\mu\Gamma\eta\mu(A-B) = 0$

δ) $\eta\mu A\sigma\upsilon\nu B - \eta\mu\Gamma = -\sigma\upsilon\nu A\eta\mu B$

119. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$

β) $\sigma\upsilon\nu\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1 + \sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)$

γ) $\varepsilon\phi\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) - \varepsilon\phi\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) = -2\sqrt{3}$

120. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\sqrt{3}\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = 1$

β) $\sqrt{3}\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = \sqrt{2}$.

121. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{10} \cdot \eta\mu x + \eta\mu\dfrac{\pi}{10}\sigma\upsilon\nu x = 1$

β) $\eta\mu x + \varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{15}\sigma\upsilon\nu x = 1$.

122. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και η εξίσωση

$x^2+674\sqrt{3}\cdot x+2019=0 \ , x\neq -673\sqrt{3}$ (1) .

Αν οι εφΒ και εφΓ είναι ρίζες της εξίσωσης (1),να βρείτε τη γωνία $\hat{A}$.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ 2α

Τυπολόγιο

$\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$	$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha =$ $2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 =$ $1-2\eta\mu^2\alpha$
$\varepsilon\varphi 2\alpha = \dfrac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}$	$\sigma\varphi 2\alpha = \dfrac{\sigma\varphi^2\alpha - 1}{2\sigma\varphi\alpha}$

Τύποι αποτετραγωνισμού

$\eta\mu^2\alpha = \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$	$\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \dfrac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$	$\varepsilon\varphi^2\alpha = \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}$

Τύποι του 2α συναρτήσει της εφα

$\eta\mu 2\alpha = \dfrac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}$,	$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \dfrac{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}$	$\varepsilon\varphi 2\alpha = \dfrac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}$

Τύποι συναρτήσει του $\dfrac{\alpha}{2}$

$\eta\mu\alpha = 2\eta\mu\dfrac{\alpha}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{\alpha}{2}$	$\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\dfrac{\alpha}{2} - \eta\mu^2\dfrac{\alpha}{2}$	$\varepsilon\varphi\alpha = \dfrac{2\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}}{1-\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}}$
$\eta\mu^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{2}$	$\sigma\upsilon\nu^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}{2}$	$\varepsilon\varphi^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}$
$\eta\mu\alpha = \dfrac{2\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}}$	$\sigma\upsilon\nu\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\dfrac{\alpha}{2} - 1 =$ $1-2\eta\mu^2\dfrac{\alpha}{2}$	$\sigma\upsilon\nu\alpha = \dfrac{1-\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}}$

Ασκήσεις

123.Αν $\sigma\upsilon\nu\alpha=-\frac{1}{4}$ και $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ υπολογίστε το ημ2α και το συν2α.

124.Αν $\varepsilon\varphi\alpha=2$ να υπολογίσετε τα ημ2α, συν2α, εφ2α.

125.Αν $\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=\frac{3}{4}$ να υπολογιστεί το $\eta\mu 2x$ και το $\sigma\upsilon\nu 2x$ αν γνωρίζουμε ότι $-\frac{\pi}{4}<x<0$.

126.Για τη γωνία α ισχύει ότι: $5\sigma\upsilon\nu 2\alpha-14\sigma\upsilon\nu\alpha-7=0$.

α) Να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu\alpha=-\frac{3}{5}$

β) Αν επιπλέον ισχύει: $\pi\le\alpha\le\frac{3\pi}{2}$, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς ημ2α , συν2α, εφ2α .

127.Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς του $\frac{\alpha}{2}$,αν :

α) $\sigma\upsilon\nu\alpha=\frac{15}{17}$ και $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$

β) $\sigma\upsilon\nu\alpha=-\frac{4}{5}$ και $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

128.Να δείξετε ότι:

α) $\frac{1+\sigma\upsilon\nu 4\alpha+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{\eta\mu 4\alpha+\eta\mu 2\alpha}=\sigma\varphi 2\alpha$ **β)** $\frac{\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}-\frac{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x}=2\varepsilon\varphi 2x$

129.Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\sigma\upsilon\nu 2x-\sigma\upsilon\nu^2 x=0$ **β)** $\eta\mu 2x-\sigma\upsilon\nu x=2\eta\mu x-1$ **γ)** $\sigma\upsilon\nu 2x-\sigma\upsilon\nu x=2$

δ) $\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu\frac{x}{2}=-2$ **ε)** $1+\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu 2x=0$ **στ)** $\sigma\upsilon\nu 2x=4\sigma\upsilon\nu x+5$

130.Δίνεται γωνία *ω* για την οποία ισχύει ότι: $-\sigma\upsilon\nu 2\omega+5\eta\mu\omega-2=0$

α) Να αποδείξετε ότι ισχύει: $2\eta\mu^2\omega+5\eta\mu\omega-3=0$

β) Να αποδείξετε ότι $\eta\mu\omega=\frac{1}{2}$

131.α) Να δείξετε ότι : $\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\eta\mu x$.

β) Να βρείτε με την βοήθεια του ερωτήματος α) την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x)=\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{4}\right), \mathrm{x}\in\mathbb{R}$.

132.Για τη γωνία ω ισχύει ότι 5συν2ω + 28συνω + 21 = 0.

α) Να δείξετε ότι: $\sigma\upsilon\nu\omega=-\frac{4}{5}$

β) Αν για τη γωνία ω επιπλέον ισχύει $\frac{\pi}{2}<\omega<\pi$ τότε:

i. να δείξετε ότι: $\sigma\upsilon\nu 2\omega=\frac{7}{25}$ και $\eta\mu 2\omega=-\frac{24}{25}$

ii. να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\Pi=\frac{13\cdot\left[\eta\mu^{2}2\omega+\sigma\upsilon\nu^{2}2\omega\right]+12}{18\cdot\varepsilon\varphi 2\omega\cdot\sigma\varphi 2\omega+25\left[\eta\mu\ 2\omega+\sigma\upsilon\nu\ 2\omega\right]}$$

Επαναληπτικές Ασκήσεις Τριγωνομετρίας

133.Έστω η συνάρτηση : $f(x)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x+1}{\eta\mu x}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
β) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.
γ) Να λύσετε την εξίσωση : $f(x)=\eta\mu x$.

134.Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{16\varepsilon\varphi^2 x}{1+\varepsilon\varphi^2 x}$ και $g(x)=\varepsilon\varphi^2 x+1$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού τους
β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=3g(x)$.
γ) Να αποδείξετε ότι $f(x)=16\eta\mu^2 x$ και $g(x)=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$.
δ) Να λύσετε την εξίσωση $16\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^2 x-3=0$.

135.Το βάθος του νερού κάτω από τη γέφυρα του Ευρίπου κατά τη διάρκεια της ημέρας δίνεται από τη συνάρτηση $f(t)=20+4\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi t}{3}$, όπου t ο χρόνος σε ώρες με $0\le t\le 24$.

α) Να βρεθεί η περίοδος της συνάρτησης.
β) Ποιο είναι το μέγιστο και το ελάχιστο βάθος του νερού;
γ) Αν το ύψος της γέφυρας είναι 30μ(από τον πυθμένα του νερού) να ελεγχθεί αν το σκάφος ύψους 8μ πάνω από (την επιφάνεια του νερού) μπορεί να περάσει κάτω από τη γέφυρα στις 12 το πρωί.
δ) Ποια ώρα της ημέρας το βάθος του νερού είναι 18μ;

136.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\eta\mu^2 x+5\sigma\upsilon\nu x+1$.

α) Να αποδείξετε ότι είναι περιοδική με περίοδο 2π.
β) Να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες.
γ) Να λύσετε την εξίσωση $\left(f(x)+2\sigma\upsilon\nu^2 x\right)^2-8\left(f(x)+2\sigma\upsilon\nu^2 x\right)-20=0$

137.Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\alpha+2\eta\mu(2\beta x)$ και $g(x)=\alpha+\beta+\sigma\upsilon\nu\left((\alpha+\beta)x\right),\ \alpha,\beta>0$.

Αν οι συναρτήσεις f,g έχουν την ίδια μέγιστη τιμή και την ίδια περίοδο, τότε:
α) να αποδείξετε ότι $\alpha=\beta=1$. **β)** Να βρείτε τη τιμή της παράστασης

$$A=f\left(\frac{\pi}{3}\right)+g\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)+3=2g(x)$ στο διάστημα $[\pi,2\pi)$.

138. Δίνεται η παράσταση: $f(x)=\eta\mu^2 x-2\sigma\upsilon\nu x+2$, $x\in\mathbb{R}$

α) Να παραγοντοποιήσετε την f.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq 0$, $x\in\mathbb{R}$.

γ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $f(x)=0$.

δ) Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.

ε) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιοδική με περίοδο 2π.

στ) Να αποδείξετε ότι η f έχει μέγιστο το 4.

139. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A\left(-\frac{\pi}{4},-1\right)$, $B\left(\frac{\pi}{4},1\right)$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=2$ και $\beta=1$

β) Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης καθώς και την περίοδό της.

γ) Να κατασκευάσετε την γραφική παράσταση της f .

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=2$.

ε) Να αποδείξετε ότι: $f\left(\frac{\pi}{4}\right)-f\left(\frac{3\pi}{4}\right)+f\left(\frac{5\pi}{4}\right)-f\left(\frac{7\pi}{4}\right)+f\left(\frac{9\pi}{4}\right)=1$

140. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-\eta\mu^2 x+\eta\mu x+2$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιοδική με περίοδο 2π.

β) Να αποδείξετε ότι κανένα σημείο της γραφικής παράστασης της f δεν βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x.

γ) Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της f στο διάστημα $(0,\pi)$ με τεταγμένη 2.

δ) Να λύσετε στο διάστημα $[0,2\pi)$ την εξίσωση: $f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

141. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu^2 x-\eta\mu^2 x-3\sigma\upsilon\nu x+2$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιοδική με περίοδο 2π.

β) Να αποδείξετε ότι η f έχει ελάχιστο το $-\frac{1}{8}$.

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x.

δ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=2-3\sigma\upsilon\nu x$.

ε) Να λύσετε στο διάστημα $[0,\pi)$ την εξίσωση: $f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

142. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{3}εφ^2x-(\sqrt{3}+1)εφx+1$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

β) Αν $θ$ η μεγαλύτερη ρίζα της προηγούμενης εξίσωσης, να αποδείξετε ότι:

$$A=\frac{συν(2\pi+θ)εφ(\pi-θ)συν\left(\frac{9\pi}{2}+θ\right)}{ημ(1821\pi+θ)συν(-θ)σφ\left(\frac{17\pi}{2}-θ\right)}=-1$$

143. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2ημx$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της και το σύνολο τιμών της.

β) Για ποιες τιμές του x παίρνει ελάχιστη τιμή η συνάρτηση;

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x)+ημ^2x=3+συν^2x$.

δ) Να αποδείξετε ότι η παράσταση $A=\dfrac{f(8\pi-x)f\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)f\left(\frac{9\pi}{2}-x\right)f(7\pi+x)}{f^2\left(\frac{13\pi}{2}+x\right)f^2(x)}$

είναι ανεξάρτητη του x.

144. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{ημx\cdot εφx}{1-συνx}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=1+\dfrac{1}{συνx}$.

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.

δ) Να αποδείξετε ότι $f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=f\left(\frac{(4k-1)\pi}{2}-x\right)$

ε) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=3$.

145. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2ημ^3 2x-ημ^2 2x-4ημ2x+2$.

α) Να αποδείξετε ότι $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=f\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

γ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $g(x)=2ημ^3 2x-2ημ2x-f(x)$ καθώς και τις αντίστοιχες τιμές του x, για τις οποίες η συνάρτηση παίρνει την ελάχιστη τιμή.

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ

Μονώνυμο

Μονώνυμο του x λέγεται κάθε παράσταση της μορφής αx^{ν} , όπου α είναι ένας πραγματικός αριθμός και ν ένας θετικός ακέραιος. Μονώνυμο του x καλούμε επίσης και κάθε πραγματικό αριθμό.

Πολυώνυμο

- ***Πολυώνυμο του x λέγεται κάθε παράσταση της μορφής $\alpha_{\nu}x^{\nu}+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+\alpha_1 x+\alpha_0$ όπου ν είναι ένας φυσικός αριθμός και $\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_{\nu}$ είναι πραγματικοί αριθμοί.***
- ***Τα μονώνυμα $\alpha_{\nu}x^{\nu}$, $\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1},...,\alpha_1 x$, α_0 λέγονται όροι του πολυωνύμου και οι αριθμοί $\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_{\nu}$ συντελεστές του.***
- ***Τα πολυώνυμα της μορφής α_0, δηλαδή οι πραγματικοί αριθμοί, λέγονται σταθερά πολυώνυμα. Ειδικά το σταθερό πολυώνυμο 0 λέγεται μηδενικό πολυώνυμο.***
- ***Αν $\alpha_{\nu}\neq 0$, τότε ο αριθμός ν λέγεται βαθμός του πολυωνύμου. Είναι φανερό ότι κάθε σταθερό και μη μηδενικό πολυώνυμο έχει βαθμό 0. Για το μηδενικό πολυώνυμο δεν ορίζεται βαθμός.***
- ***Αριθμητική τιμή ή απλά τιμή του πολυωνύμου για $x=\rho$ λέγεται ο αριθμός $P(\rho)=\alpha_{\nu}\rho^{\nu}+\alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-1}+...+\alpha_1\rho+\alpha_0$. Αν είναι $P(\rho)=0$ τότε ο ρ λέγεται ρίζα του πολυωνύμου.***

Ίσα πολυώνυμα

Δύο πολυώνυμα $\alpha_{\nu}x^{\nu}+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+\alpha_1 x+\alpha_0$ και $\beta_{\mu}x^{\mu}+\beta_{\mu-1}x^{\mu-1}+...+\beta_1 x+\beta_0$ με $\mu\geq\nu$ είναι ίσα όταν: $\alpha_0=\beta_0$, $\alpha_1=\beta_1,...,\alpha_{\nu}=\beta_{\nu}$ και $\alpha_{\nu+1}=\alpha_{\nu+2}=...=\alpha_{\mu}=0$

Πράξεις πολυωνύμων

- ***Αν το άθροισμα δυο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι μη μηδενικό πολυώνυμο, τότε ο βαθμός του είναι ίσος ή μικρότερος από το μέγιστο των βαθμών των δυο πολυωνύμων.***
- ***Ο βαθμός του γινομένου δυο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.***

Ασκήσεις

1. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=(\kappa+1)x^3+(2+\mu)x-\lambda$ και $Q(x)=(2\lambda-\mu)x+3\mu-5$.Να βρεθούν οι κ ,λ $\in$R για τους οποίους
α) είναι ίσα τα πολυώνυμα
β) Το άθροισμα τους να είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

2. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το πολυώνυμο
$P(x)=\lambda(\lambda^2+4\lambda+3)x^2+(\lambda^2+3\lambda)x+\lambda^2-9$ είναι
α) δευτέρου βαθμού
β σταθερό
γ) το μηδενικό πολυώνυμο.

3. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ το πολυώνυμο :
$P(x)=(\mu^3-16\mu)x^3+(\mu^2-4\mu)x^2+(5\mu-20)x+\mu^2-5\mu+4$ είναι
α) τρίτου βαθμού
β δευτέρου βαθμού
γ) πρώτου βαθμού
δ) το μηδενικό πολυώνυμο.

4. Δίνονται τα πολυώνυμα $\mathrm{P}(\mathrm{x})=4\mathrm{x}^3-6\mathrm{x}^2+4\mathrm{x}-8$ και $\mathrm{Q}(\mathrm{x})=\alpha\mathrm{x}^3+\beta\mathrm{x}^2+\gamma\mathrm{x}+\delta$.
Να βρείτε τι πρέπει να ισχύει για τους αριθμούς α, β, γ, δ, ώστε το πολυώνυμο $\mathrm{P}(\mathrm{x})-\mathrm{Q}(\mathrm{x})$, να είναι:
α) 3ου βαθμού **β)** το πολύ 2ου βαθμού **γ)** μηδενικού βαθμού

5. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ,μ για τους οποίους το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+(\lambda-1)x^2+3\mu x+2$ έχει ρίζα τον αριθμό 1 και η αριθμητική τιμή του πολυωνύμου για $x=2$ είναι ίση με 20.

6. Δίνοντας το πολυώνυμο $P(x)=3x^2-x-\alpha$ και $Q(x)=3x^2+(\alpha-4)x+\beta+2a$ να προσδιορίσετε τους α, β όταν ο αριθμός 1 είναι κοινή τους ρίζα.

7. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ,μ για τους οποίους το πολυώνυμο $P(x)=x^3+(\lambda-\mu)x^2+2\lambda x+8$ έχει ρίζα τον αριθμό 2 και $\mathrm{P}(1)=7$.

8. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,ώστε οι αριθμητικές τιμές του πολυωνύμου $P(x)=x^3+(2\alpha-3\beta)x^2+(2-\alpha)x+\beta-\alpha$,για $x=-1$ και $x=1$,να είναι 3 και –5 αντίστοιχα.

9. Αν το πολυώνυμο $P(x)=x^2+(\alpha-1)x+2\alpha$ έχει ρίζα το - 1 να αποδείξετε ότι το ίδιο ισχύει και για το $K(x)=x^3+4x^2+(\alpha^2-1)x$.
Το αντίστροφο ισχύει;

10. Να αναλύσετε τη κλασματική παράσταση $\dfrac{3x-3}{x^2-9}$ σε άθροισμα δύο κλασμάτων με πρωτοβάθμιους παρονομαστές.

11. Να αναλύσετε τη κλασματική παράσταση $\dfrac{2}{x^2-5x+6}$ σε άθροισμα δύο κλασμάτων με πρωτοβάθμιους παρονομαστές.

12. Να βρείτε τα $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ για τα οποία το πολυώνυμο $P(x)=x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+16$ είναι τέλειο τετράγωνο του $Q(x)=x^2+x+\delta$.

13. Να εξετάσετε αν υπάρχει πολυώνυμο $P(x)$ δεύτερου βαθμού, για το οποίο ισχύει $P(2x+1)=P(2x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

14. Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ το πολύ 2ου βαθμού, για το οποίο ισχύει ότι $P(x)+P(x-1)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

15. Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$, για το οποίο ισχύει ότι $P(x)+P^2(x)=x^2+5x+6$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

16. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=2x^2+3x+1$ και $Q(x)=x^2-3$.

α) Να βρείτε το πολυώνυμο $P(Q(x))$.

β) Να βρείτε τα $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\in\mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει ότι:
$\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\delta x+\varepsilon=P(Q(x))$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

17. Έστω πολυώνυμο $P(x)$. Αν το ρ είναι ρίζα του $P(x)-x$, να αποδείξετε ότι είναι ρίζα και του $P(P(x))-x$.

18. Έστω πολυώνυμο $P(x)$. Αν το 2 είναι ρίζα του $P(x)-2x$, να αποδείξετε ότι είναι ρίζα και του $P(P(x)-2)-2$.

19. Δίνεται πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει ότι $P(2x+1)=3P(x)+2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $P(0)=0$. Να αποδείξετε ότι $P(15)=80$.

20.α) Αν η εξίσωση $x^{10}+\alpha x^{8}+\beta x^{6}+1=0$ έχει ρίζα το 1, να αποδείξετε ότι:
$|\alpha|+|\beta|\geq 2$.

β) Αν η εξίσωση $5x^{3}+2\alpha x^{2}+3\beta=0$ έχει ρίζα το 1, να αποδείξετε ότι:
$2|\alpha|+3|\beta|\geq 5$.

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

21. Δίνονται τα πολυώνυμα: $P(x)=-2x^{3}+4x^{2}+2(x^{3}-1)+9$ και
$Q(x)=\alpha x^{2}+7,\ \alpha\in\mathbb{R}$.

α) Είναι το πολυώνυμο P(x) 3ου βαθμού; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να βρείτε την τιμή του α , ώστε τα πολυώνυμα P(x) και Q(x) να είναι ίσα.

ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

Θεώρημα (Ταυτότητα της διαίρεσης)

Για κάθε ζεύγος πολυωνύμων $\Delta(x)$ και $\delta(x)\neq 0$ υπάρχει μοναδικό ζεύγος πολυωνύμων $\pi(x)$ και $\upsilon(x)$ για τα οποία ισχύει: $\Delta(x)=\delta(x)\pi(x)+\upsilon(x)$ όπου το $\upsilon(x)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο ή έχει βαθμό μικρότερο από τον βαθμό του $\delta(x)$.

Το $\Delta(x)$ λέγεται διαιρετέος, το $\delta(x)$ διαιρέτης, το $\pi(x)$ πηλίκο και το $\upsilon(x)$ υπόλοιπο της διαίρεσης.

Παρατηρήσεις

Αν $\upsilon(x)=0$ τότε η διαίρεση λέγεται τέλεια και η ταυτότητα της διαίρεσης γίνεται

$$\Delta(x)=\delta(x)\pi(x)$$

Στη περίπτωση αυτή λέμε ότι το $\delta(x)$ διαιρεί το $\Delta(x)$ ή ότι το $\delta(x)$ είναι παράγοντας του $\Delta(x)$

Θεώρημα

Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-\rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x=\rho$. Δηλαδή $\upsilon=P(\rho)$.

Θεώρημα

Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-\rho$ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του $P(x)$, δηλαδή αν και μόνο αν $P(\rho)=0$.

Ισοδύναμες προτάσεις τέλειας διαίρεσης πολυωνύμων

- ✓ ***Το P(x) διαιρείται με το $x-\rho$.***
- ✓ ***Το $x-\rho$ διαιρεί το P(x).***
- ✓ ***Το $x-\rho$ είναι διαιρέτης του P(x).***
- ✓ ***Το P(x) έχει παράγοντα το $x-\rho$.***
- ✓ ***Το $x-\rho$ είναι παράγοντας του P(x).***
- ✓ ***Η διαίρεση του P(x) με το $x-\rho$ είναι τέλεια.***
- ✓ ***Ο αριθμός ρ είναι ρίζα του P(x).***
- ✓ ***Ισχύει ότι $P(\rho) = 0$.***
- ✓ ***Το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x-\rho)$ είναι ίσο με μηδέν.***

Αυτό σημαίνει ότι αν ισχύει (αν δοθεί) μία από αυτές, τότε θα ισχύουν συγχρόνως όλες μαζί. Συνήθως όλες αυτές τις προτάσεις τις συσχετίζουμε με την (viii), διότι η πρόταση $P(\rho) = 0$ είναι αμέσως αξιοποιήσιμη.

Σχήμα Horner

Χρησιμοποιείται για διαιρέση ενός πολυωνύμου P(x) με το πολυώνυμο x-ρ.
Είναι ένας πίνακας με τρείς γραμμές.
Στην πρώτη γραμμή γράφουμε τους συντελεστές του πολυωνύμου (Συμπληρώνουμε με 0 τους συντελεστές των δυνάμεων του x που δεν υπάρχουν).
Στην πρώτη θέση της τρίτης γραμμής γράφουμε τον συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου .
Κάθε στοιχείο της δεύτερης γραμμής προκύπτει με πολλαπλασιασμό του αμέσως προηγούμενου στοιχείου της τρίτης γραμμής επί ρ.
Κάθε άλλο στοιχείο της τρίτης γραμμής προκύπτει ως άθροισμα των αντίστοιχων στοιχείων της πρώτης και δεύτερης γραμμής.
Το τελευταίο στοιχείο της τρίτης γραμμής είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-\rho)$.
Τα άλλα στοιχεία της τρίτης γραμμής είναι οι συντελεστές του πηλίκου της διαίρεσης.

Ασκήσεις

22.Να γίνουν οι διαιρέσεις:

α) $(3x^5 + x^3 - 2x^2 + 9) : (x^2+1)$

β) $(x^4 - 3x^3 + x - 5):(x^3+1)$

γ) $(x^3 - 2\alpha x + 3\alpha^2):(x-3\alpha)$

δ) $[3x^3 - \left(2\alpha + 3\alpha^2\right)x + 3\alpha^2]:(x-\alpha)$

23. Να γίνουν οι παρακάτω διαιρέσεις:

α) $\left(12x^3-12x^2+10x-5\right):\left(3x^2-2x+6\right)$

β) $\left(x^3-1\right):\left(x-1\right)$

γ) $\left(2x^2-4x^3-2x+x^4+1\right):\left(1+x^2-x\right)$

δ) $\left(x^3+x^2-x+3\right):\left(x^2-3x\right)$

24. Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο των παρακάτω διαιρέσεων:

α) $\left(x^4+x^2-3x-3\right):\left(x^2-3x+2\right)$ **β)** $\left(5x^2-12x-32\right):\left(x-4\right)$

γ) $\left(3x^4-x^2-4x-3\right):\left(x+3\right)$ **δ)** $\left(x^4-k^4\right):\left(x-k\right)$

25. Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $\left(2x^3-7x^2+11x-4\right):\left(x^2-3x+4\right)$ χωρίς να κάνετε τη διαίρεση.

26. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=4x^3-5x^2+6x-8$. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης:

α) $P(x):(x-1)$ **β)** $P(x):(x+2)$

27. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=4x^{2017}-5x^{2018}+1$. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης:

α) $P(x):(x-1)$ **β)** $P(x):(x+1)$

28. Να βρείτε πολυώνυμο P(x) που όταν διαιρείται με x^2+1 δίνει πηλίκο $3x+2$ και υπόλοιπο $-x+3$.

29. Να βρείτε τα κ, λ ώστε το $P(x)=x^4+1$ να διαιρείται ακριβώς με $x^2+\kappa x+\lambda$.

30. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner, να βρεθούν τα πηλίκα και τα υπόλοιπα των διαιρέσεων :

α) $\left(x^4-2x^3+5x^2-3x-14\right):(x-2)$ **β)** $\left(2x^3-x^2+7x+5\right):(x+1)$

γ) $\left(x^5-3x^2+x+1\right):(x-1)$ **δ)** $\left(5x^2-2\alpha x-3\alpha^2\right):(x-\alpha)$

31. Αν το $x-3$ είναι παράγοντας του P(x), να δείξετε ότι το $x-2$ είναι παράγοντας του $Q(x)=P(4x-5)$.

32. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3+(2\beta-1)x^2+(\alpha-\beta)x+1$. Να βρείτε τα $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$, ώστε το $P(x)$, να έχει παράγοντα το $x-1$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x+1$, να είναι 4.

33. Να βρείτε τα α, β, ώστε το πολυώνυμο $P(x)=x^4+(2\alpha+1)x^3+(3-\beta)x^2+5\beta x-2$ να έχει παράγοντα το x^2-3x+2.

34. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το x^2+x-2 είναι $3x+1$, να βρείτε το υπόλοιπο των διαιρέσεων $P(x):(x-1)$ και $P(x):(x+2)$.

35. Έστω πολυώνυμο $P(x)$ με ακέραιους συντελεστές και $P(1)=P(3)=5$. Δείξτε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x^2-4x+3)$ είναι $\upsilon=5$.

36. Αν οι διαιρέσεις ενός πολυωνύμου $P(x)$ με τα $x+1$ και $x-2$ δίνουν αντίστοιχα υπόλοιπα 3 και -3, να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x^2-x-2)$.

37. Το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με $x-2$ αφήνει υπόλοιπο 10 και διαιρούμενο με $x+3$ αφήνει υπόλοιπο 5. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x-2)(x+3)$.

38. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-1$ είναι 8 και με το $x+2$ είναι -7, να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-1)(x+2)$.

39. Να βρείτε το $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$, ώστε το πολυώνυμο $P(x)=x^3-2\alpha x^2+\beta x+6$, να διαιρείται με το γινόμενο $(x-2)(x-3)$.

40. Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί κ, λ ώστε το πολυώνυμο $P(x)=x^3-\kappa x^2+(\lambda-1)x+5$ να έχει για παράγοντα το $(x-1)(x+2)$.

41. Να βρείτε το $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$, ώστε το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3-5x^2+\beta x+12$, να έχει παράγοντα το $(x-2)^2$.

42. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x(x-2)^{1821}+(x-1)^{1453}+2$

α) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $Q(x)=x^3-3x^2+2x$.

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $10\cdot 8^{1821}+9^{1453}-89$ είναι πολλαπλάσιο του 720.

43.Δίνεται πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει ότι
$(x-2)P(x)+(x-1)P(x+2)=x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-2$ είναι -2, τότε:

α) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-4$.

β) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το x^2-6x+8.

γ) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-1$.

δ) Αν το $P(x)$ είναι 3ου βαθμού, τότε να βρεθεί.

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

44.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-x+6$.

α) Να υπολογίσετε το $P(-2)$.

β) Να αποδείξετε ότι το $x+2$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

γ) Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$.

45.Η διαίρεση ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-3$ έχει πηλίκο x^2+2 και υπόλοιπο 4.

α) Να γράψετε την ταυτότητα της παραπάνω διαίρεσης.

β) Να δείξετε ότι $P(x)=x^3-3x^2+2x-2$.

γ) Είναι το $x=3$ ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$;Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

46.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+x^2-3x+1$.

α) Να αποδείξετε ότι το 1 και το -1 δεν είναι ρίζες του πολυωνύμου.

β) Να κάνετε τη διαίρεση του $P(x):(x^2+x-1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

47.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2(x-1)^{20}-3(x-1)^{10}+5x^2-3x-2$.

α) Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$.

β) **i.** Να υπολογίσετε την τιμή P(0).

ii. Είναι το x παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

Πολυωνυμικές εξισώσεις

Πολυωνυμική εξίσωση βαθμού ν ονομάζουμε κάθε εξίσωση της μορφής
$\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$.
Ρίζα μιας πολυωνυμικής εξίσωσης ονομάζουμε κάθε ρίζα του πολυωνύμου
$P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_0$***, δηλαδή κάθε αριθμό ρ, για τον οποίο ισχύει***
$P(\rho) = 0$.

Θεώρημα ακέραιων ριζών

Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$ ***με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος*** $\rho \neq 0$ ***είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου*** α_0.

Παρατηρήσεις

✓ ***Για να λύσουμε μία πολυωνυμική εξίσωση βαθμού μεγαλύτερου του δευτέρου:***

- ***Μεταφέρουμε όλους τους όρους σ' ένα μέλος.***
- ***Κάνουμε παραγοντοποίηση αν γίνεται εύκολα οπότε έχουμε γινόμενο παραγόντων ίσο με το μηδέν δηλαδή***
  $P(x) = 0 \Leftrightarrow A_1(x) \cdot A_2(x) \cdot ... \cdot A_\nu(x) = 0 \Leftrightarrow$
  $A_1(x) = 0$ ή $A_2(x) = 0$ ή... $A_\nu(x) = 0$
- ***Βρίσκουμε τους διαιρέτες του σταθερού όρου.***
- ***Επαληθεύουμε τους διαιρέτες στην εξίσωση με αντικατάσταση.***
- ***Με όποιο την επαληθεύει κάνουμε σχήμα horner για τη διαίρεση*** $P(x) : (x - \rho)$ ***όπου ρ ο διαιρέτης που βρήκαμε.***
- ***Αν*** $\pi(x)$ ***το πηλίκο της διαίρεσης*** $P(x) : (x - \rho)$ ***,λύνουμε την εξίσωση*** $\pi(x) = 0$.

Αν το πολυώνυμο π(x) είναι 1ου ή δευτέρου βαθμού η εξίσωση λύνεται εύκολα.
Αν είναι μεγαλύτερου βαθμού επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία για το π(x).

✓ ***Για να βρούμε τα σημεία τομής μιας συνάρτησης f με τον άξονα χ΄χ λύνουμε την εξίσωση*** $f(x) = 0$.

Αν $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_\nu$ ***οι ρίζες της εξίσωσης τα ζητούμενα σημεία είναι τα***
$(\rho_1, 0), (\rho_2, 0), ..., (\rho_\nu, 0)$

✓***Για να βρούμε τα σημεία τομής δύο συναρτήσεων f,g λύνουμε την εξίσωση $f(x)=g(x)$.***

Αν $\rho_1,\rho_2,...,\rho_\nu$ οι ρίζες της εξίσωσης τα ζητούμενα σημεία είναι τα

$$(\rho_1, f(\rho_1)),(\rho_2, f(\rho_2)),...,(\rho_\nu, f(\rho_\nu)) \text{ ή}$$

$$(\rho_1,g(\rho_1)),(\rho_2,g(\rho_2)),...,(\rho_\nu,g(\rho_\nu)).$$

Κάνουμε αντικατάσταση στον τύπο της συνάρτησης που έχουμε πιο εύκολες πράξεις.

Ασκήσεις

48. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $x^4-3x^3-7x^2+27x-18=0$ **β)** $3x^3+10x^2+2x-3=0$.

γ) $x^3-x^2-10x-8=0$ **δ)** $x^5-x^4-5x^3+5x^2+4x-4=0$.

ε) $3x^3-13x^2+13x-3=0$ **στ)** $x^3+3x^2-6x-8=0$.

49. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{1}{2}x^3-\frac{5}{3}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{3}=0$ **β)** $\frac{1}{4}x^4-x^3+\frac{7}{4}x^2-4x+3=0$

γ) $x^4-\frac{7}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}=0$ **δ)** $\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{8}x^2+2x-\frac{3}{2}=0$

50. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων με τον άξονα χ΄χ:

α) $f(x)=3x^3+8x^2-15x+4$ **β)** $f(x)=x^4+3x^3-x^2-9x-6$

51. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^4-5x^3+7x^2-5x+6$ και $g(x)=2x^3-6x^2+4x$.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής με τον άξονα χ΄χ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

52. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x)=x^4-4x^3+10x^2+20x-10$ και $g(x)=5x^3-8x^2+2x+30$.

53. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^3+(\alpha-1)x^2-4x-\alpha-2$ τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο με τεταγμένη -4.

α) Να βρείτε την τιμή του $\alpha\in R$

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα χ΄χ

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y=x+1$

54.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+ax^2-11x+30$ με $\alpha\in\mathbb{R}$ για το οποίο γνωρίζουμε ότι η τιμή του για x=1 είναι 16 .

α) Να υπολογίσετε την τιμή του α.

β) Αν α=-4 και το 2 είναι ρίζα της εξίσωσης $P(x)=0$ να προσδιορίσετε τις άλλες ρίζες της εξίσωσης $P(x)=0$.

55.Δίνονται τα πολυώνυμα : $P(x)=\lambda^3x^3-2\lambda^2x^2+3\lambda x-6, \lambda\in\mathbb{R}$ και $Q(x)=16x^8+15x^4-1$.

α) Αν το πολυώνυμο P(x) έχει ρίζα το 1,να βρείτε το λ

β) Για $\lambda=2$

i) να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) με το πολυώνυμο x^2+1 και να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης των πολυωνύμων.

ii) να λύσετε την εξίσωση P(x)=0

iii)να λύσετε την εξίσωση $Q(x)=0$

56.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+2x^2+\alpha x+\beta,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$.Αν το $P(x)$ έχει παράγοντες τα $x+1$ και $x-2$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha=-5$ και $\beta=-6$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

57.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha x^2+(\beta-1)x+\beta$ το οποίο διαιρούμενο με το x^2+x-2 δίνει υπόλοιπο $3x+5$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha=2$ και $\beta=3$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=3x+5$.

58.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^4+\alpha x^3+\beta x^2-18x+\beta-1$ το οποίο έχει παράγοντα το πολυώνυμο $Q(x)=x^2+2x+1$.

α) Να βρεθούν οι τιμές των α και β.

β) Να βρεθούν όλες οι ρίζες του P(x).

γ) Να γίνει γινόμενο το πολυώνυμο P(x).

59.Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε το πολυώνυμο $P(x)=x^3-x^2-(3+\alpha)x+\beta+10$ να έχει για παράγοντα το $(x-2)^2$.

60.Δίνεται το πολυώνυμο: $P(x)=x^4-2x^3-4x^2+2x+3$

α) Να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης του $P(x)$ με το x^2-4.

β) Να βρείτε το υπόλοιπο της προηγούμενης διαίρεσης, χωρίς να γίνει η διαίρεση.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

61. Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση $x^3+2x^2-\lambda x+4=0$ έχει τουλάχιστον μία ακέραια ρίζα.

Πολυωνυμικές ανισώσεις

✓Για να λύσουμε μία πολυωνυμική ανίσωση βαθμού μεγαλύτερου του δευτέρου:

- ***Μεταφέρουμε όλους τους όρους σ' ένα μέλος.***

Κάνουμε παραγοντοποίηση αν γίνεται εύκολα οπότε έχουμε να λύσουμε ανίσωση γινομένου αλλιώς με τη βοήθεια του θεωρήματος ακέραιων ριζών βρίσκουμε τις ρίζες του πολυωνύμου $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_\nu$ και το παραγοντοποιούμε $P(x)=P_1(x)\cdot P_2(x)\cdot ...\cdot P_\nu(x)$.

Βρίσκουμε το πρόσημο κάθε παράστασης του γινομένου ξεχωριστά

Μεταφέρουμε τις παραστάσεις σε πίνακα της μορφής

x	$-\infty$	ρ_1	ρ_2	$\dots\rho_\nu$	$+\infty$
$P_1(x)$					
$P_2(x)$					
$\vdots$					
$P_\nu(x)$					
$P_1(x)\cdot P_2(x)\cdot ...\cdot P_\nu(x)$		0	0	0	

όπου $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_\nu$ οι ρίζες των παραστάσεων $P_1(x), P_2(x), ..., P_\nu(x)$.

Με τη βοήθεια του κανόνα προσήμων βρίσκουμε το πρόσημο του $P_1(x), P_2(x), ..., P_\nu(x)$ στα διαστήματα που έχει χωριστεί ο άξονας από τις ρίζες και επιλέγουμε αυτό(αυτά) που ζητάει η ανίσωση.

✓ Για να βρούμε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f :

α) βρίσκεται πάνω από τον άξονα χ΄χ λύνουμε την ανίσωση $f(x)>0$.

β) βρίσκεται κάτω από τον άξονα χ΄χ λύνουμε την ανίσωση $f(x)<0$.

γ) δεν βρίσκεται πάνω από τον άξονα χ΄χ λύνουμε την ανίσωση $f(x)\le 0$.

δ) δεν βρίσκεται κάτω από τον άξονα χ΄χ λύνουμε την ανίσωση $f(x)\ge 0$.

✓Για να βρούμε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f :

α) βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης g λύνουμε την ανίσωση $f(x)>g(x)$.

β) βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης g λύνουμε την ανίσωση $f(x)<g(x)$.

γ) δεν βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης g λύνουμε την ανίσωση $f(x)\le g(x)$.

δ) δεν βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης g λύνουμε την ανίσωση $f(x)\ge g(x)$.

Ασκήσεις

62. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α) $x^4+3x^3+x^2-3x-2<0$ **β)** $x^3(x+1)-2>x(x-1)$

γ) $x^3-2x^2-x+2>0$ **δ)** $x^3+3x^3\ge 5x^2-9$

ε) $3x^4-x^3-9x^2+9x-2\le 0$ **στ)** $x^4-3x^3+6x\le 4$

63. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α) $(5x-10)(x+3)(x^2+9x+20)<0$ **β)** $(10-x^2-3x)(x^2-2x+1)>0$

γ) $(1-x)^2(x^2-8x+16)\le 0$ **δ)** $(x^2-4x+6)(4x+5-x^2)\ge 0$

64. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α) $(2x^2+5)(x^2+3x)(x^2-2x+1)<0$ **β)** $(3-x^2-2x)(x^3-7x+6)>0$

γ) $(x^3-8)(2x+1)^{2018}(x^2-16)^{2017}\le 0$ **δ)** $(x^3-x-2)(x^3+x-2)\ge 0$

65. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^6+2x^5+2x^4+2x^3+x^2+(x+1)^2$ δεν έχει κανένα σημείο κάτω από τον x΄x.

66. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^4-2x^3-3x^2+8x-4$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x.

67. Δίνεται το πολυώνυμο $f(x)=x^4-x^3-x^2-x-2,\ x\in\mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι το $x+1$ είναι παράγοντας του $f(x)$ και να βρείτε το πηλίκο $\pi(x)$ της διαίρεσης του $f(x)$ με το $\pi(x)$.

β) Να αποδείξετε ότι το $x-2$ είναι παράγοντας του $\pi(x)$ και να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης του $\pi(x)$ με το $x-2$.

γ) Να βρείτε τα διαστήματα, στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x.

68. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\lambda x^3+x^2-(\lambda+5)x+4,\ \lambda\in\mathbb{R}$. Αν το $P(x)$ έχει ρίζα για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ, τότε:

α) να βρείτε τη ρίζα.

β) να βρείτε τις υπόλοιπες ρίζες του.

γ) Αν $\lambda=1$, να λύσετε την εξίσωση $\left(P(x)-x^3\right)^2+6P(x)=6x^3-5$.

69. Έστω $P(x)$ πολυώνυμο 3ου βαθμού, το οποίο διαιρείται με το x^2+1, έχει ρίζα το 0 και του οποίου το άθροισμα των συντελεστών είναι ίσο με 2.

α) Να αποδείξετε ότι $P(x)=x^3+x$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $\left(P(x)-2\right)^3+\left(P(x)-2\right)^2+P(x)>2$.

70. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^4+\alpha x^3+\beta x^2-5x+4,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Αν το $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x-1)^2$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=-1$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x)>0$.

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

71. Δίνεται η εξίσωση $x^3-7x+6=0$

α) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα της.

β) Με τη βοήθεια του σχήματος Horner ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης $\left(x^3-7x+6\right):(x-1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $x^3-7x+6=0$.

72. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^4-x^3-5x^2+7x-2$

α) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου.

β) Να εξετάσετε αν το πολυώνυμο έχει και άλλη ακέραια ρίζα.

73. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-x^2+x-1$.

α) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου.

β) Να αποδείξετε ότι $P(x)=(x-1)\left(x^2+1\right)$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

74. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-2x^2+3x-2$.

α) Να αποδείξετε ότι το $x-1$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου.

β) Αν $P(x)=(x-1)\left(x^2-x+2\right)$, να βρείτε για ποιες τιμές του x είναι $P(x)>0$.

75. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+x^2-x-1$.

α) Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$.

β) Αν $P(x)=(x+1)^2(x-1)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x)\geq 0$.

76. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3-x^2+2x-1$.

α) Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$.

β) Αν $P(x)=(2x-1)(x^2+1)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x)\geq 0$.

77. Ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το πολυώνυμο $2x-1$ δίνει πηλίκο x^2-2 και υπόλοιπο 1.

α) Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$.

β) Αν $P(x)=2x^3-x^2-4x+3$

i. να αποδείξετε ότι το $P(x)$ έχει ρίζα το 1 και γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x-1)$.

ii. να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

78.α) Να γράψετε το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+x^2-x$ ως γινόμενο ενός πρωτοβάθμιου και ενός δευτεροβάθμιου πολυωνύμου.

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

79. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+x^2+2x+2$.

α) i. Να κάνετε τη διαίρεση του $P(x)$ με το $(x+1)$.

ii. Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x+1)$

β) Αν $P(x)=(x-1)(x^2+2)$, να λύσετε την ανίσωση $P(x)<0$.

80. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-7x+6$.

α) Να δείξετε ότι το $x-2$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

81. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=3x^3-x^2-x+2$.

α) Να κάνετε τη διαίρεση $P(x):(x-1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

β) Αν $P(x)=(x-1)(3x^2+2x+1)+3$, να λύσετε την ανίσωση $P(x)<3$.

82. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+2x-3,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x+1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)+6=0$.

83. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+x+2$.

α) i. Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x+1)$.

ii. Να κάνετε τη διαίρεση $P(x):(x+1)$.

β) Αν $P(x)=(x+1)(x^2-x+2)$, να λύσετε την ανίσωση $P(x)<0$.

84. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+x^2-8x-4$.

α) Να αποδείξετε ότι έχει παράγοντα το $(x-2)$.

β) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

85. Η μέση θερμοκρασία Τ (σε βαθμούς Κελσίου) στην επιφάνεια ενός πλανήτη, μετά από x εκατομμύρια χρόνια, έχει εκτιμηθεί ότι είναι $T(x)=x^3-10x^2+31x-30$.

α) Αποδείξτε ότι 2 εκατομμύρια χρόνια μετά, η μέση θερμοκρασία στον πλανήτη θα είναι μηδέν ^{o}C.

β) Να βρείτε τους αριθμούς α, β, γ με α < β < γ ώστε να ισχύει $T(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$.

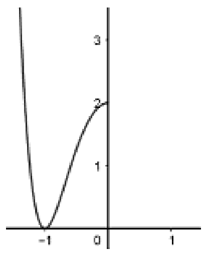
γ) Θεωρούμε ότι μια χρονική περίοδος παγετώνων στον πλανήτη είναι αυτή στην οποία η μέση θερμοκρασία Τ είναι συνεχώς κάτω από μηδέν ^{o}C. Ποιες χρονικές περιόδους θα έχουμε παγετώνες στον πλανήτη;

86. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^6-3x^2+2$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.

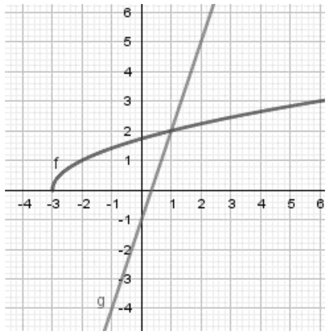
β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα x′x.

γ) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της f για $x\le 0$.
Να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για x > 0.



δ) Με βάση τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα και τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα.

87. Στο σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\sqrt{x+3}$ και $g(x)=3x-1$.



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τη μονοτονία των συναρτήσεων f, g.
β) Να λύσετε την εξίσωση f(x) = g(x).
γ) i. Να λύσετε γραφικά την ανίσωση f(x) < g(x).
ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το αποτέλεσμα του i ερωτήματος.

88. Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(x)=2x^4-5x^3+4x^2-5x+2$.

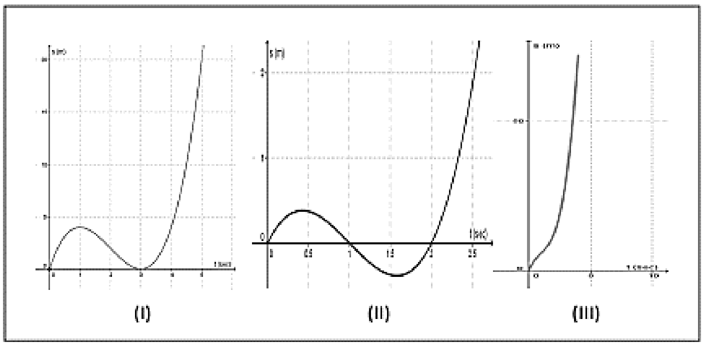
α) Να αποδείξετε ότι:
i. Ο αριθμός 0 δεν είναι ρίζα του.
ii. Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα του, τότε και ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι επίσης ρίζα του.

β) Να βρείτε ένα θετικό ακέραιο αριθμό που να είναι ρίζα του.
γ) Να λύσετε την εξίσωση P(x) = 0.
δ) Να λύσετε την ανίσωση P(x) < 0.

89. Το διάστημα $S(t)$ σε μέτρα που έχει διανύσει ένα κινητό τη χρονική στιγμή σε δευτερόλεπτα, δίνεται από τη σχέση: $S(t)=2t^3-6t^2+10t$.

α) Να βρείτε το διάστημα που έχει διανύσει το κινητό τις χρονικές στιγμές t = 0 και t = 2.
β) Να βρείτε πόσο χρόνο χρειάζεται το κινητό για να διανύσει απόσταση 30 μέτρων.
γ) Επειδή το $S(t)$ εκφράζει το διάστημα που διανύει το κινητό, θα πρέπει να είναι πάντα μη αρνητικό. Να αποδείξετε αλγεβρικά αυτόν τον ισχυρισμό.

δ) Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις τριών πολυωνύμων $S(t)$. Μία από αυτές εκφράζει το διάστημα $S(t)$ της εκφώνησης. Να βρείτε ποια από τις τρεις είναι αυτή, δικαιολογώντας την απάντησή σας.



90. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = x^4 + x^3 + \alpha x - 4$ και $\delta(x) = x^2 - 3x + 2$.

Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $\delta(x)$, είναι το πολυώνυμο $\upsilon(x) = 24x - 24$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού α.

β) Για α = 2,

i. να υπολογίσετε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x - 1$.

ii. να βρείτε τα σημεία τομής του άξονα x΄x με την γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$.

iii. να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες, η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x.

91. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^5 - 4x^3 - x^2 + \alpha x + \beta$ το οποίο διαιρούμενο με το $x^2 - 4$ δίνει υπόλοιπο $4x + 1$.

α) Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x^2 - 4)$.

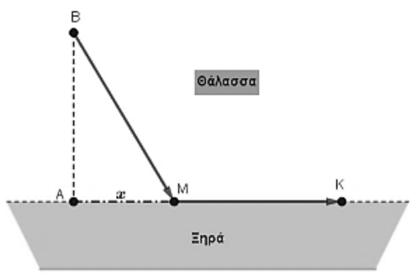
β) Να βρείτε τις τιμές των α και β .

γ) Έστω $\alpha = 4$ και $\beta = 5$. Αν το πηλίκο της διαίρεσης $P(x) : (x^2 - 4)$ είναι το $\pi(x) = x^3 - 1$, τότε:

i. να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x) : (x^2 - 4)$.

ii. να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 4x + 1$.

92. Ένας κολυμβητής βρίσκεται στη θάλασσα, στο σημείο Β σε απόσταση 2 km από το κοντινότερο σημείο Α μιας ευθύγραμμης ακτής. Ο προορισμός του είναι ένα σημείο Κ της ακτής, το οποίο απέχει 4km από το Α. Η διαδρομή που κάνει είναι η ΒΜ κολυμπώντας στη θάλασσα με σταθερή ταχύτητα 3km/h και η ΜΚ τρέχοντας στην ακτή με σταθερή ταχύτητα 5km/h. Γνωρίζουμε ότι η σχέση μεταξύ του διαστήματος που διανύεται, της ταχύτητας και του αντίστοιχου χρόνου κίνησης, είναι $\upsilon = \frac{s}{t} \Leftrightarrow t = \frac{s}{\upsilon}$.



Αν το σημείο Μ απέχει από το Α απόσταση x km, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $BM = \sqrt{4 + x^2}$.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση που εκφράζει τον χρόνο κίνησης t (σε h) του κολυμβητή – δρομέα ως προς την απόσταση x (σε km) είναι η:

$t(x)=\dfrac{\sqrt{4+x^2}}{3}+\dfrac{4-x}{5},\ x\in[0,4].$

γ) Να βρείτε τη θέση του σημείου Μ της ακτής, έτσι ώστε ο χρόνος της διαδρομής του κολυμβητή να είναι $\frac{4}{3}$ ώρες.

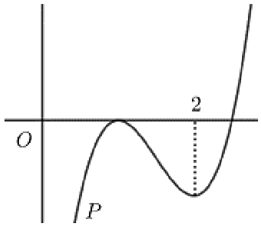
93.α) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+\alpha x^2+\beta x-5$, με $x\in\mathbb{R}$.

i. Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $(x-1)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με $(x-2)$ είναι – 1,να δείξετε ότι: $\begin{cases}2\alpha+\beta=-6\\ \text{και}\\ \alpha+\beta=3\end{cases}$.

ii. Να δείξετε ότι α = −9 και β = 12.

β) Να βρείτε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$ για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x)=2x^3-9x^2+12x-5$ είναι κάτω από τον άξονα x΄x.

γ) Αν η γραφική παράσταση της P(x) είναι η διπλανή, να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της.



94.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^4-2x^3-x^2+\alpha x+\beta$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τίς τιμές των α, β, αν είναι γνωστό ότι το $P(x)$ διαιρείται με το πολυώνυμο $Q(x)=x^2-2x+1$.

β) Για $\alpha=4,\ \beta=-2$

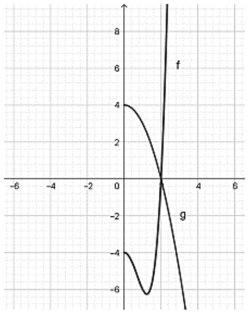
i. Να κάνετε τη διαίρεσης $P(x):(x^2+5)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

ii. Αν $P(x)=(x^2+5)(x^2-2x-6)+14x+28$ να λύσετε την εξίσωση $P(x)=14(x+2)$.

95.Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^4-3x^2-4$ και $g(x)=-x^2+4$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(-x)=f(x)$ και $g(-x)=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Στο διπλανό σχήμα δίνεται μέρος των γραφικών παρατάσεων των συναρτήσεων f και g .
Αφού μεταφέρετε το σχήμα στην κόλλα σας, να συμπληρώσετε τις γραφικές παραστάσεις σε όλο το $\mathbb{R}$.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



γ) Να λύσετε , αλγεβρικά ή γραφικά:

i. την εξίσωση $f(x)=g(x)$.

ii. την ανίσωση $f(x)<g(x)$.

96. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^4+\kappa x-1,\ \kappa\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την τιμή του $\kappa\in\mathbb{R}$ για την οποία $f(-x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Για κ = 0,

i. να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,0]$.

ii. να δείξετε ότι $f(x)\geq -1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

iii. να βρείτε τα $x\in\mathbb{R}$ για τα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα x′x.

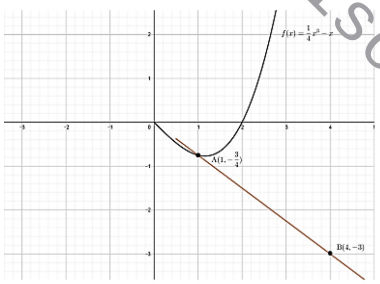
97. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο με εμβαδό $E=60m^2$, του οποίου η υποτείνουσα είναι κατά 2cm μεγαλύτερη από τη μία κάθετη πλευρά. Αν ονομάσουμε x το μήκος αυτής της κάθετης πλευράς και y το μήκος της άλλης κάθετης (σε cm), τότε:

α) Να δείξετε ότι ο αριθμός x ικανοποιεί την εξίσωση: $x^3+x^2-3600=0$.

β) Αν γνωρίζετε ότι το μήκος της πλευράς x είναι αριθμός ακέραιος και μικρότερος του 16, να βρείτε την τιμή του x καθώς και τα μήκη των άλλων πλευρών του τριγώνου.

γ) Να βρείτε το πλήθος των ορθογωνίων τριγώνων που ικανοποιούν τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

98. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{4}x^3-x,\ x\in\mathbb{R}$ και η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A\left(1,-\frac{3}{4}\right)$ και $B(4,-3)$.



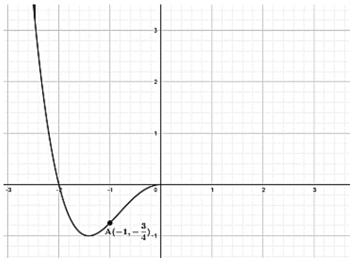
α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΑΒ.

β) i. Να αποδείξετε ότι $f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f για $x<0$.

γ) Αν η ευθεία ΑΒ έχει εξίσωση $y=-\frac{3}{4}x$, με χρήση του β) ερωτήματος ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας με την γραφική παράσταση της f .

99.Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\alpha x^2$, $x\in\mathbb{R}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ και το σημείο $A\left(-1,-\frac{3}{4}\right)$ αυτής.



α) Να δείξετε ότι $\alpha=-1$.

β) Για $\alpha=-1$,

i. Να αποδείξετε ότι $f(-x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f για $x>0$.

γ) Αφού επιβεβαιώσετε ότι $f\left(-\sqrt{3}\right)=-\frac{3}{4}$, με χρήση του β) ερωτήματος ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας $y=-\frac{3}{4}$ με την γραφική παράσταση της f.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ-ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΝΑΓΟΝΤΑΙ ΣΕ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ

Κλασματικές εξισώσεις

Για να λύσουμε μία κλασματική εξίσωση:
- Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π των παρονομαστών .
- Βρίσκουμε τις τιμές του x για τις οποίες δεν μηδενίζεται το Ε.Κ.Π
- Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών
- Επιμεριστική ιδιότητα όπου χρειάζεται
- Αναγωγή ομοίων όρων
- Καταλήγουμε σε μία πολυωνυμική εξίσωση την οποία λύνουμε όπως μάθαμε στην αντίστοιχη παράγραφο.
- Δεν ξεχνάμε τους περιορισμούς.

Ασκήσεις

100. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{x^2-3x+2}{x}+\frac{2}{x^2-x}=\frac{1-3x^2}{x-1}$ **β)** $\frac{x^3-11x}{x-9}=\frac{2}{x-1}$

γ) $\frac{3x^2}{x-2}-\frac{10}{x^2+2x}-\frac{10x^2+20}{x^3-4x}=4+\frac{9x}{x^2-4}$ **δ)** $\frac{x^2}{x-1}+\frac{6}{x-3}=\frac{4}{x^2-3x+2}$

101. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $\frac{x^2}{x+2}=\frac{4(x-2)}{x}-\frac{x-10}{x^2+2x}$ **β)** $\frac{x^3+6x-5}{x^2-9}+\frac{3x}{x+3}+\frac{5}{x-3}+2=0$

γ) $\frac{2x^2}{x+2}=\frac{3x}{x-1}-\frac{2x+3}{x^2+x-2}$ **δ)** $x^2+\frac{3x^2}{x-1}=\frac{x+1}{x-1}+\frac{3-x^2}{x^2-1}$

Εξισώσεις με βοηθητικό άγνωστο

Για να λύσουμε μία εξίσωση της μορφής
$\alpha_\nu f^\nu(x)+\alpha_{\nu-1}f^{\nu-1}(x)+...+\alpha_1 f(x)+a_0=0$ **:**
-Θέτουμε $f(x)=\omega$ (1) οπότε έχουμε να λύσουμε μία πολυωνυμική εξίσωση
$\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+\alpha_1 x+a_0=0$ ***, την οποία λύνουμε όπως μάθαμε στην αντίστοιχη παράγραφο.***
- Τέλος αντικαθιστούμε τις λύσεις του ω που βρήκαμε στην (1) και βρίσκουμε τις λύσεις της εξίσωσης.

Ασκήσεις

102. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^8-x^4-2=0$ **β)** $27(x+3)^6-28(x+3)^3+1=0$

γ) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^4-3\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4=0$ **δ)** $x^4-5x^2+6=0$

103. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(x^2-3x-2)^3+(x^2-3x-4)^2-8=0$

β) $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-3\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=0$

γ) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-8=0$

δ) $(x^2-2)^4-3(x^2-2)^3+9(x^2-2)^2-21(x^2-2)+14=0$

104. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $4\eta\mu^3x+8\eta\mu^2x-\eta\mu x-2=0$ **β)** $2\sigma\upsilon\nu^4x-\sigma\upsilon\nu^3x+\sigma\upsilon\nu^2x-\sigma\upsilon\nu x-1=0$.

105. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $\varepsilon\varphi^3 x - \varepsilon\varphi^2 x - 3\varepsilon\varphi x + 3 = 0$

β) $3\sqrt{3}\sigma\varphi^3 x + \left(3\sqrt{3} - 6\right)\sigma\varphi^2 x - \left(6 + 3\sqrt{3}\right)\sigma\varphi x - 3\sqrt{3} = 0$

106. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $2\eta\mu^3 x - \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu^2 x + \sqrt{3} = 0$ **β)** $16\sigma\upsilon\nu^4 x + 16\eta\mu^2 x - 13 = 0$

107. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $(2\eta\mu x - 1)^4 + (2\eta\mu x - 1)^2 - 2 = 0$ **β)** $2\eta\mu^3 x + 5\eta\mu^2 x + 5\eta\mu x + 2 = 0$

γ) $2\sigma\upsilon\nu^4 x - 5\sigma\upsilon\nu^3 x + 5\sigma\upsilon\nu x - 2 = 0$ **δ)** $2\sigma\upsilon\nu^3 x - 5\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu x + 3 = 0$

Άρρητες εξισώσεις

Για να λύσουμε μία άρρητη εξίσωση $\left(\sqrt[\nu]{A(x)} = B(x)\right)$ **:**

- Βρίσκουμε τα διαστήματα(διάστημα) του x για τα οποία $A(x) \geq 0$ ***και*** $B(x) \geq 0$ **.**

- Υψώνουμε και τα δύο μέλη στην ν-οστή δύναμη

- Κάνουμε πράξεις καταλήγουμε σε μία πολυωνυμική εξίσωση ,την οποία λύνουμε όπως μάθαμε στην αντίστοιχη παράγραφο.

- Τέλος επαληθεύουμε τις λύσεις αν ανήκουν στα διαστήματα (διάστημα) που βρήκαμε στο 1ο βήμα.

Ασκήσεις

108. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\sqrt{x+1} = 2$ **β)** $\sqrt{x+3} = -4$ **γ)** $\sqrt{2x+7} = x+2$ **δ)** $\sqrt{x} = -2x$

109. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $\sqrt{x+7} = 5$ **β)** $\sqrt{x^2 + 2x - 3} = \sqrt{5}$ **γ)** $\sqrt[3]{2x+25} - 3 = 0$ **δ)** $\sqrt{25 - x^2} - 4 = 0$

110. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\sqrt{5x+10} = 8 - x$ **β)** $\sqrt{2x+6} - \sqrt{x-1} = 2$ **γ)** $\sqrt{x+32} + \sqrt{x} = 16$

δ) $2\sqrt{x+5} = x+2$ **ε)** $\sqrt{x+1} = \sqrt{x} + 2$ **στ)** $\sqrt{x} - 2 = \sqrt{x+1}$

ζ) $\sqrt{2 + \sqrt{x-5}} = \sqrt{13 - x}$ **η)** $\dfrac{\sqrt{4x+20}}{4+\sqrt{x}} = \dfrac{4-\sqrt{x}}{2}$

111. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\sqrt{x} = \sqrt[3]{-x+2}$ **β)** $\sqrt{x+1} = \sqrt[4]{x+3}$

112. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\sqrt{x-2017}=\lambda$ **β)** $\sqrt{4x^2+1}=2x+\lambda$

γ) $\sqrt{x^2+4}=-x+\lambda$ **δ)** $\sqrt{9-x^2}=\lambda$

Αντίστροφες εξισώσεις

Για να λύσουμε μία αντίστροφη εξίσωση διαιρούμε όλους τους όρους με το $x^2\neq 0$,οπότε προκύπτει εξίσωση της μορφής $\alpha\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\beta\left(x\pm\frac{1}{x}\right)+\gamma=0$.

Θέτουμε $x+\frac{1}{x}=\omega$ οπότε $x^2+\frac{1}{x^2}=\omega^2\pm 2$ ……….

Ασκήσεις

113. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^4+3x^3+4x^2+3x+1=0$ **β)** $2x^4-x^3+10x^2-x+2=0$

114. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^5-2x^4+2x^3-2x^2+x=0$ **β)** $6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0$

Κλασματικές ανισώσεις

✓ ***Ανισώσεις της μορφής $\frac{A(x)}{B(x)}>0\ (<0)$.***

Όπως γνωρίζουμε το πηλίκο και το γινόμενο δύο αριθμών είναι ομόσημα.

Επομένως $\frac{A(x)}{B(x)}>0\Leftrightarrow A(x)\cdot B(x)>0$ και $\frac{A(x)}{B(x)}<0\Leftrightarrow A(x)\cdot B(x)<0$

αφού,καμία από τις λύσεις της $A(x)\cdot B(x)>0$ και $A(x)\cdot B(x)<0$ δεν μηδενίζει το $B(x)$.

✓***Ανισώσεις της μορφής $\frac{A(x)}{B(x)}\geq 0\ (\leq 0)$.***

-Οι ανισώσεις της μορφής $\frac{A(x)}{B(x)}\geq 0$ αληθεύουν για τους πραγματικούς αριθμούς για τους οποίους ισχύουν συγχρόνως $A(x)\cdot B(x)\geq 0$ και $B(x)\neq 0$

-Οι ανισώσεις της μορφής $\dfrac{A(x)}{B(x)} \le 0$ ***αληθεύουν για τους πραγματικούς αριθμούς για τους οποίους ισχύουν συγχρόνως*** $A(x)\cdot B(x) \ge 0$ ***και*** $B(x) \ne 0$.

✓***Ανισώσεις της μορφής*** $\dfrac{A(x)}{B(x)} > \Gamma(x)\,(<\Gamma(x))$.

Για να λύσουμε τις ανισώσεις αυτής της μορφής φέρνουμε το $\Gamma(x)$ ***στο 1ο μέλος , κάνουμε τα κλάσματα ομώνυμα οπότε έχουμε πλέον τη μορφή*** $\dfrac{A(x)}{B(x)} > 0\,(<0)$

✓***Ανισώσεις της μορφής*** $\dfrac{A(x)}{B(x)} \ge \Gamma(x)\,(\le\Gamma(x))$.

Για να λύσουμε τις ανισώσεις αυτής της μορφής φέρνουμε το $\Gamma(x)$ ***στο 1ο μέλος , κάνουμε τα κλάσματα ομώνυμα οπότε έχουμε πλέον τη μορφή*** $\dfrac{A(x)}{B(x)} \ge 0\,(\le 0)$.

Ασκήσεις

115. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α) $\dfrac{2x^2-x-1}{(2x-2)x} > 0$ **β)** $\dfrac{(-x)(x^2+3x+2)}{x^2-5x+6} \ge 0$ **γ)** $\dfrac{6-x-x^2}{(x-1)(x^2+4)} \ge 0$

δ) $\dfrac{x^3-6x+7}{x^2} \ge 0$ **ε)** $\dfrac{(x+2017)^2(3x^2+4)}{2x-7} \le 0$ **στ)** $\dfrac{2x^2-8}{3x^2-8x-3} \ge 0$

116. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α) $\dfrac{x^2-2x-3}{x+2} > 0$ **β)** $\dfrac{(1-x)(x^2+x+2)}{x^2+4x+3} \ge 0$ **γ)** $\dfrac{2-x-x^2}{x^2-4} \ge 0$

δ) $\dfrac{x^3+x-2}{x-3} > 0$ **ε)** $\dfrac{(2x+3)(x^2+2)}{x^3-7x+6} > 0$ **στ)** $\dfrac{x^3-1}{x^2-3x-4} \ge 0$

117. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α) $\dfrac{2x-1}{x+3} < 1$ **β)** $\dfrac{x+1}{3x-1} > 3$ **γ)** $\dfrac{4x+7}{x+2} \le 3$

δ) $\dfrac{5x-3}{x^2+3} \ge 1$ **ε)** $\dfrac{2x^2-3x+3}{x+1} < x$ **στ)** $\dfrac{x^3-2x}{5x-6} \ge 1$

Άρρητες ανισώσεις

Για να λύσουμε μία άρρητη ανίσωση $\left(\sqrt[\nu]{A(x)} > B(x)\right)$ **:**

- Αν $B(x) < 0$ **για κάθε πραγματικό x ,τότε οι λύσεις της ανίσωσης είναι το σύνολο** $\{x \in \mathbb{R} \,/\, A(x) \geq 0\}$

- Αν $B(x) = 0$ **για κάθε πραγματικό x ,τότε οι λύσεις της ανίσωσης είναι το σύνολο** $\{x \in \mathbb{R} \,/\, A(x) > 0\}$

- Αν *δεν γνωρίζουμε το πρόσημο του* $B(x)$***,βρίσκουμε τα διαστήματα (διάστημα) του x για τα οποία*** $A(x) \geq 0$ ***και*** $B(x) \geq 0$ **.**

- Υψώνουμε και τα δύο μέλη στην ν-οστή δύναμη

- Κάνουμε πράξεις καταλήγουμε σε μία πολυωνυμική ανίσωση ,την οποία λύνουμε όπως μάθαμε στην αντίστοιχη παράγραφο.

- Τέλος συναληθεύουμε τις λύσεις τις ανίσωσης με τα διαστήματα (διάστημα) του x για τα οποία $A(x) \geq 0$ ***και*** $B(x) \geq 0$ **.**

Για να λύσουμε μία άρρητη ανίσωση $\left(\sqrt[\nu]{A(x)} < B(x)\right)$ **:**

- Αν $B(x) \leq 0$ **για κάθε πραγματικό x ,τότε η ανίσωση είναι αδύνατη στους πραγματικούς αριθμούς.**

- Αν *δεν γνωρίζουμε το πρόσημο του* $B(x)$***,βρίσκουμε τα διαστήματα (διάστημα) του x για τα οποία*** $A(x) \geq 0$ ***και*** $B(x) \geq 0$ **.**

- Υψώνουμε και τα δύο μέλη στην ν-οστή δύναμη

- Κάνουμε πράξεις καταλήγουμε σε μία πολυωνυμική ανίσωση ,την οποία λύνουμε όπως μάθαμε στην αντίστοιχη παράγραφο.

- Τέλος συναληθεύουμε τις λύσεις τις ανίσωσης με τα διαστήματα (διάστημα) του x για τα οποία $A(x) \geq 0$ ***και*** $B(x) \geq 0$ **.**

Ασκήσεις

118. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α) $\sqrt{x+2} \geq 0$ **β)** $\sqrt{x+2017} > -4$ **γ)** $\sqrt{2017x+14} < -2018$ **δ)** $\sqrt{x} \leq 0$

ε) $\sqrt{x+2017} > 0$ **στ)** $\sqrt{2017x+2017} < 0$

119. Να λύσετε τις ανισώσεις :

α) $\sqrt{6x+6} \geq 12$ **β)** $\sqrt{x^2-2x-3} \leq \sqrt{5}$ **γ)** $\sqrt[3]{x+5} - 3 > 0$ **δ)** $\sqrt{9-x^2} - 1 < 0$

120. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α) $\sqrt{x+1} \leq 8 - x$ **β)** $\sqrt{2x+2} > x - 3$ **γ)** $\sqrt{x+6} \geq x$

δ) $3\sqrt{x+24} < 6x + 9$ **ε)** $\sqrt{x+15} < \sqrt{x} + 3$ **στ)** $\sqrt{x-3} \geq 1 - \sqrt{x-1}$

121. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $\sqrt{3x+7} < \sqrt{x+3}$ **β)** $x-1 \geq \sqrt{x+5}$ **γ)** $\sqrt{x^2+x+3} \geq x+\dfrac{1}{2}$

Ανισώσεις με βοηθητικό άγνωστο

Για να λύσουμε μία ανίσωση της μορφής

$\boldsymbol{\alpha_\nu f^\nu(x)+\alpha_{\nu-1} f^{\nu-1}(x)+...+\alpha_1 f(x)+a_0 > 0 (<0)(\geq 0)(\leq 0)}$ **:**

- Θέτουμε $f(x)=\omega$ (1) οπότε έχουμε να λύσουμε μία κλασματική ανίσωση

$\boldsymbol{\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+\alpha_1 x+a_0=0>0(<0)(\geq 0)(\leq 0)}$***, την οποία λύνουμε όπως μάθαμε στην αντίστοιχη παράγραφο.***

- Γράφουμε τις λύσεις της ανίσωσης σε μορφή διαστημάτων (διάστημα)

- Αντικαθιστούμε το ω με $f(x)$, και λύνουμε τις ανισώσεις που προκύπτουν.

Ασκήσεις

122. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^6-7x^3-8\geq 0$ **β)** $x^4-3x^2-4\leq 0$

γ) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^4-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-4>0$ **δ)** $(x\text{-}1)^{10}-33(x\text{-}1)^5+32<0$

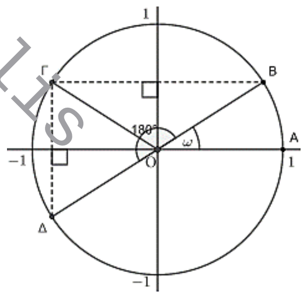
123. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x-2+\sqrt[3]{x-2}-2\geq 0$ **β)** $x-3\sqrt{x}+2<0$

γ) $x^2+1+\sqrt{x^2+1}-2\leq 0$ **δ)** $\sqrt[3]{x^2-6x+9}-2\sqrt[3]{x-3}-3>0$

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

124. Για τη γωνία ω του διπλανού σχήματος ισχύει $5\eta\mu^3\omega-8\eta\mu^2\omega-7\eta\mu\omega+6=0$.



α) Να δείξετε ότι $\eta\mu\omega=\dfrac{3}{5}$.

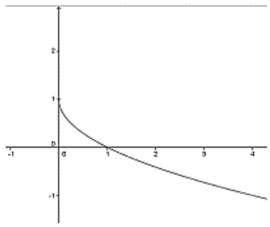
β) Να βρείτε:

i. την τιμή του συνω,

ii. τις συντεταγμένες των σημείων Β, Γ και Δ,

iii. το ημίτονο και το συνημίτονο των θετικών γωνιών $A\hat{O}B$, $A\hat{O}\Gamma$ και $A\hat{O}\Delta$.

125. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$.



α) Να βρείτε την μονοτονία της και την μέγιστη τιμή της.

β) Αν $f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$ και $0<\alpha<\frac{1}{4}<\beta$, να βρείτε το πρόσημο του γινομένου $P=\left(2f(\alpha)-1\right)\left(2f(\beta)-1\right)$.

γ) Έστω ότι η συνάρτηση του προβλήματος είναι η $f(x)=1-\sqrt{x},\ x\geq 0$. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης με την ευθεία $y=2x$.

126. Μία κυβική δεξαμενή Α έχει ακμή με μήκος x μέτρα. Αν αυξηθεί η μία μόνο ακμή της κατά μία μονάδα θα μετατραπεί στη δεξαμενή Β σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου με τετράγωνη βάση.

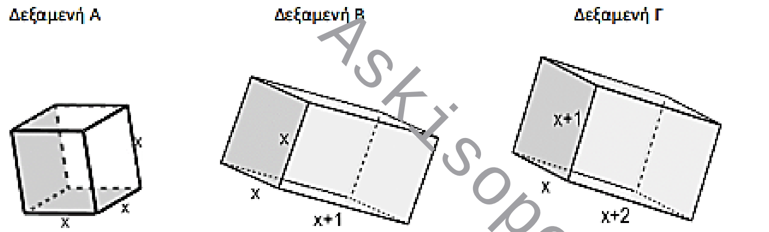
α) Να βρείτε τη διαφορά Δ(x) των όγκων των δύο δεξαμενών ως συνάρτηση του x.

β) Αν ο όγκος της δεξαμενής Β είναι 36 κυβικά μέτρα να βρείτε:

i. Τις διαστάσεις των δεξαμενών Α και Β.

ii. Τη διαφορά των όγκων Δ(x).

γ) Αν επιπλέον αυξηθεί η μία ακμή της βάσης της δεξαμενής Β κατά 2 μονάδες, να βρείτε τη μικρότερη τιμή του x ώστε ο όγκος της νέας δεξαμενής Γ να είναι τουλάχιστον 60 κυβικά μέτρα. (Μονάδες 8) Βοηθητικά δίνονται τα σχήματα των δεξαμενών Α, Β και Γ



ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

127. Δίνεται το πολυώνυμο : $P(x)=x^4-3x^3+(\alpha+2\beta)x^2-3x+\alpha+\beta$.

Αν έχει ρίζα το 1 και παράγοντα το x-2 :

α) Να βρείτε τα α ,β

β) Αν α=β=1

i) να λύσετε την εξίσωση P(x)=0

ii) να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{-\dfrac{P(x)}{x^2+1}}=2-x$

iii) να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{P(x)}{2x^2-5x+2}\leq 0$

iv) να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{P(x)}{x^2-9}>x^2-3x+2$

128. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=ax^3+(\beta-1)x^2-3x-2\beta+6$,όπου α,β πραγματικοί αριθμοί.

α) Αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου P(x) και το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το x+1 είναι ίσο με 2 ,να βρείτε τα α και β.

β) Αν α=2 και β=4

i) να βρείτε τα σημεία στα οποία η πολυωνυμική συνάρτηση P(x) τέμνει τον άξονα χ΄χ

ii) να βρείτε τα διαστήματα στα οποία βρίσκεται πάνω από τον άξονα χ΄χ

iii) να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{\mathrm{P(x)}}{x^2-x-12}\le 0$

129. Δίνεται το πολυώνυμο: $\mathrm{P}(\mathrm{x})=2\mathrm{x}^4-3\mathrm{x}^3+3\mathrm{x}^2-3\mathrm{x}+1$

α) Να αποδείξετε ότι το $\mathrm{P}(\mathrm{x})$ διαιρείται με το πολυώνυμο $2\mathrm{x}-1$. Ποιο είναι το πηλίκο $\pi(\mathrm{x})$;

β) Να λύσετε την εξίσωση $\mathrm{P}(\mathrm{x})=0$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\mathrm{P}(\mathrm{x})\le 0$.

δ) Να βρείτε το υπόλοιπο υ της διαίρεσης του $\mathrm{P}(\mathrm{x})$ με το $\mathrm{x}+1$.

ε) Να λύσετε την εξίσωση: $2\eta\mu^4\mathrm{x}-3\eta\mu^3\mathrm{x}-3\sigma\upsilon\nu^2\mathrm{x}-3\eta\mu\mathrm{x}+4=0$

130. Δίνεται το πολυώνυμο $\mathrm{P}(\mathrm{x})=(\mathrm{x}-10)(\mathrm{x}-20)^{20}(\mathrm{x}-30)^{30}$.

α) Να βρείτε το βαθμό του.

β) Να λύσετε την εξίσωση $\mathrm{P}(\mathrm{x})=0$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $\mathrm{P}(\mathrm{x})=-\mathrm{x}+10$

δ) Να λύσετε την ανίσωση $\mathrm{P}(\mathrm{x})>0$

131. Έστω πολυώνυμο $\mathrm{P}(\mathrm{x})$ το οποίο έχει παράγοντα το $\mathrm{x}-2$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του με το $\mathrm{x}+1$ είναι -18.

α) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $\mathrm{P}(\mathrm{x})$ με το $(\mathrm{x}-2)(\mathrm{x}+1)$.

Έστω $\mathrm{P}(\mathrm{x})=2\mathrm{x}^3-7\mathrm{x}^2+7\mathrm{x}-2$.

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης P βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x.

γ) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\mathrm{f}(\mathrm{x})=\sqrt{\mathrm{P}(\mathrm{x})}$.

δ) Να λύσετε την ανίσωση $\mathrm{P}^2(\mathrm{x})>-2\mathrm{P}(\mathrm{x})$.

132. Δίνεται το πολυώνυμο $\mathrm{P}(\mathrm{x})=4\mathrm{x}^3-3\eta\mu\omega\cdot\mathrm{x}^2-\sigma\upsilon\nu^2\omega\cdot\mathrm{x}+2,\ \omega\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$.

α) Να βρείτε το ω για το οποίο το υπόλοιπο της διαίρεσης του $\mathrm{P}(\mathrm{x})$ με το $\mathrm{x}-\eta\mu\omega$ να είναι ίσο με 2.

β) Να λύσετε την εξίσωση $\mathrm{P}(\mathrm{x})=(2\eta\mu\omega)^2$ για $\omega=\dfrac{3\pi}{4}$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $6\etaμω + 2P(1) - 11 = 0$.

133. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - x^3 + \kappa x^2 + x + \lambda$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ όταν το πολυώνυμο P(x) έχει ρίζα το 1 και παράγοντα το x + 2 .

β) Για κ = -7 και λ = 6 να λυθεί η εξίσωση P(x) = 0 .

γ) Για κ = -7 και λ = 6 να λυθεί η ανίσωση $\dfrac{P(x)}{x-5} \geq 0$.

134. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 7x + \alpha + 5$, για το οποίο γνωρίζουμε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το x είναι ίσο με 6 και ότι έχει ρίζα το 1.

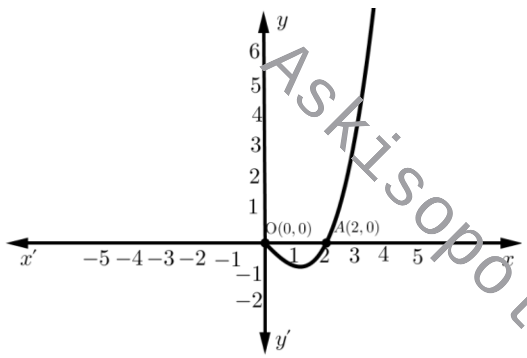
α) Να βρείτε τις τιμές των α και β

β) Για $\alpha = 1$ και $\beta = 0$, να λύσετε

i. την ανίσωση $P(x) \geq 0$

ii. την εξίσωση $\sqrt{P(x)} = x - 1$

135. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + \gamma x + \delta, x \in R$ και γ, δ πραγματικές σταθερές.



α) Με βάση τη γραφική παράσταση, να αποδείξετε ότι γ = -1 και δ = 0.

β) Θεωρώντας τώρα δεδομένο ότι $f(x) = \dfrac{1}{4}x^3 - x, x \in R$:

i. Να αποδείξετε ότι $f(-x) = f(x)$, για κάθε $x \in R$.

ii. Να μεταφέρετε στην κόλα σας το σχήμα και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f για x < 0.

iii. Να επαληθεύσετε ότι $f(1) = -\dfrac{3}{4}$ και, στη συνέχεια, να λύσετε τις εξισώσεις

$$f(x) = -\frac{3}{4} \text{ και } f(x) = \frac{3}{4}.$$

ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Δυνάμεις με ρητό εκθέτη

Αν α>0,μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος ,τότε ορίζουμε:	$\boxed{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}=\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}}$
Επιπλέον αν μ ,ν θετικοί ακέραιοι ,ορίζουμε :	$\boxed{0^{\frac{\mu}{\nu}}=0}$

Δυνάμεις με άρρητο εκθέτη

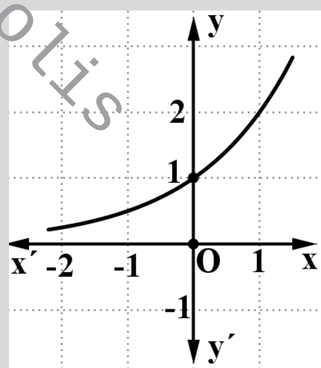
Αν α,β είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί και $x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$,τότε :		
$\alpha^{x_1}\cdot\alpha^{x_2}=\alpha^{x_1+x_2}$	$\alpha^{x_1}:\alpha^{x_2}=\alpha^{x_1-x_2}$	$\left(\alpha^{x_1}\right)^{x_2}=\alpha^{x_1+x_2}$
$(\alpha\beta)^x=\alpha^x\beta^x$	$\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^x=\dfrac{\alpha^x}{\beta^x}$	

Εκθετική συνάρτηση

Αντιστοιχίζοντας κάθε $x\in\mathbb{R}$,στη δύναμη α^x ,ορίζουμε την συνάρτηση :
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\alpha^x$, η οποία στην περίπτωση που είναι $\alpha\neq 1$,λέγεται εκθετική συνάρτηση με βάση α .
Αν είναι $\alpha=1$,τότε έχουμε την σταθερή συνάρτηση $f(x)=1$.

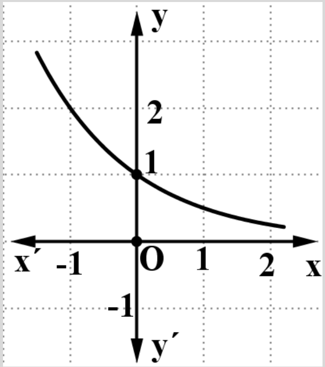
Για κάθε συνάρτηση της μορφής $f(x)=\alpha^x$ με $\alpha>1$,
ισχύει ότι :

- ***Έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$***
- ***Έχει σύνολο τιμών το διάστημα $(0,+\infty)$***
- ***Είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.***
  Δηλαδή για κάθε $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι
  $\alpha^{x_1}<\alpha^{x_2}$
- ***Η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο A(0,1) και έχει ασύμπτωτη τον αρνητικό ημιάξονα των x.***



Για κάθε συνάρτηση της μορφής $f(x)=\alpha^x$ με $0<\alpha<1$, ισχύει ότι :

- ***Έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$***
- ***Έχει σύνολο τιμών το διάστημα $(0,+\infty)$***
- ***Είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.***
  Δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι $\alpha^{x_1} > \alpha^{x_2}$
- ***Η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο Α(0,1) και έχει ασύμπτωτη τον θετικό ημιάξονα των x.***



Ο αριθμός e

Αποδεικνύεται ότι $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}=2{,}718280...$ Τον αριθμό στον οποίο τείνει η ποσότητα $\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}$ καθώς το ν αυξάνεται απεριόριστα τον συμβολίζουμε με e (Euler).

Εκθετικές εξισώσεις

Για να λύσουμε μία εκθετική εξίσωση :

- ***Αν έχουμε δυνάμεις της μορφής $\alpha^{\gamma x+\delta}$ χρησιμοποιούμε την ιδιότητα $\alpha^{\gamma x+\delta}=\alpha^{\gamma x}\cdot a^{\delta}$.***

✓ ***Αν έχουμε δυνάμεις με την ίδια βάση και τον ίδιο εκθέτη ,τις μεταφέρουμε στο ένα μέλος και τους αριθμούς στο άλλο,οπότε έχουμε :***
$\kappa_1\alpha^{f(x)}+k_2a^{f(x)}+...=\lambda_1+\lambda_2+...$
Κάνουμε τις πράξεις που γίνονται(αναγωγή ομοίων όρων κ.λ.π) οπότε καταλήγουμε $\alpha^{f(x)}=\beta\Leftrightarrow\alpha^{f(x)}=\alpha^{\varepsilon}\overset{1-1}{\Leftrightarrow}f(x)=\varepsilon.....$

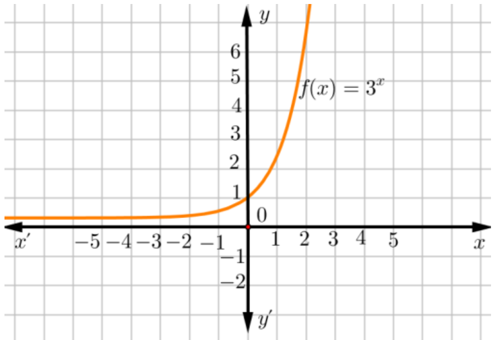
✓ ***Αν έχουμε δυνάμεις με την ίδια βάση και εκθέτες πολλαπλάσια της ίδιας παράστασης $\kappa_1\alpha^{\lambda f(x)}+k_2\alpha^{\mu f(x)}+k_2\alpha^{\nu f(x)}+....=....,\ \lambda\neq\mu\neq\nu$:***

- ***Θέτουμε $\alpha^{f(x)}=\omega$ (1) και καταλήγουμε σε πολυωνυμική εξίσωση $\alpha_\nu x^{\nu}+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+\alpha_1 x+a_0=0$,την οποία λύνουμε όπως μάθαμε στην αντίστοιχη παράγραφο.***
- ***Τέλος αντικαθιστούμε τις λύσεις του ω που βρήκαμε στην (1) και βρίσκουμε τις λύσεις της εξίσωσης όπως στην προηγούμενη περίπτωση.***

✓ ***Αν έχουμε δυνάμεις με διαφορετική βάση και ίδιο εκθέτη διαιρούμε με την εκθετική με τη μεγαλύτερη βάση ή με τη μικρότερη και μετά έχουμε μία από τις προηγούμενες περιπτώσεις..***

Ασκήσεις

1. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=3^x$, με $x\in R$



α) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x)=3^x+1$ και $h(x)=3^x-1$, μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

β) Ποια είναι η ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g και ποια της γραφικής παράστασης της h;

(τράπεζα θεμάτων)

2. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $2^{x-1}=\sqrt{2}$ **β)** $3^{x^2-4x+6}=27$ **γ)** $5^{x^4-5x^2+4}=1$

δ) $\left(\frac{1}{9}\right)^{x+4}=\left(\sqrt{27}\right)^{2x+18}$ **ε)** $18^{8-4x}=\left(54\sqrt{2}\right)^{3x-2}$

3. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\left(\frac{3}{5}\right)^{2x-1}=\left(\frac{5}{3}\right)^{x+6}$ **β)** $\left(\sqrt{3}+1\right)^{x^4-5x^2+4}=1$ **γ)** $5^{\sqrt{x}}=625$

δ) $3^{x^2-9x+11}=27$ **ε)** $2^{x^2-2x}=8^{x-2}$ **στ)** $3^x=81^{2-|x|}$

ζ) $27^{\frac{x+1}{x-2}}=3^{2x-4}$ **η)** $3^{x^2-3x}=\frac{1}{9}$ **θ)** $\left(4^{3-x}\right)^{2-x}=1$

ι) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2}=\left(\frac{3}{2}\right)^{4-5x}$ **κ)** $\sqrt[x-2]{27^{x+1}}=9^{x-2}$

4. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $2^{x+3}-2^{x+2}+2^{x+1}=48$ **β)** $3^{x+2}+5\cdot 3^x+3^{x-1}-3^{x-2}=128$

γ) $3^{x-1}-\frac{15}{3^{x+1}}+3^x-\frac{21}{3^{x+1}}=0$ **δ)** $5^{x^2+1}+25^{x^2}=6$ **ε)** $3^x-4\sqrt{3^x}+3=0$

στ) $e^{2x}+e=e^x+e^{x+1}$ **ζ)** $8^x-3\cdot 4^x-3\cdot 2^{x+1}+8=0$

η) $3^{x-1}-\frac{4}{3}\sqrt{3^x}=-1$ **θ)** $3\left(\frac{3}{2}\right)^x+2\left(\frac{2}{3}\right)^x=5$

5. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\left(5^{x}-\sqrt{5}\right)\left(e^{x}+1\right)=0$ **β)** $\left(13^{2x+1}-1\right)\left(e^{3x-3}-\frac{1}{e^{2}}\right)=0$

γ) $\left(2^{|2x-4|}-2\right)\left(3^{x^{2}-4}-3\right)\cdot\left(x^{2}-5x+6\right)=0$ **δ)** $\left(2^{x}-3\cdot\sqrt{2^{x}}+2\right)\left(2^{3x}-7\cdot2^{x}+6\right)$

ε) $\left(3^{2x}+2018\right)\left(e^{2018x+2018}+2018\right)\cdot x=0$

6. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $7^{2x}-8\cdot7^{x}+7=0$ **β)** $13^{2x}-11\cdot13^{x}=26$

γ) $2^{2x}-3\cdot2^{x+3}+128=0$ **δ)** $3^{2x}+81=10\cdot3^{x+1}$

δ) $2^{x}-5\cdot\sqrt{2^{x+4}}+64=0$ **ε)** $5^{x}-6\cdot\sqrt{5^{x+2}}+125=0$

7. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $2^{x+3}-3^{x+1}=3^{x+3}-3\cdot2^{x+2}$ **β)** $3^{x+1}-2^{x}=3^{x-1}+2^{x+3}$

γ) $3\cdot2^{x-4}-2^{x-1}=5^{x-2}-6\cdot5^{x-3}$

8. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $7\cdot3^{x+1}-5^{x+2}=3^{x+4}-5^{x+3}$ **β)** $5^{x+3}-51\cdot7^{x}=7^{x+2}-71\cdot5^{x}$

γ) $\frac{1}{2}\cdot3^{x-1}+2\cdot5^{x}=5^{x+1}-\frac{3}{2}\cdot3^{x+1}$

9. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $2\cdot4^{x}+3\cdot9^{x}=5\cdot6^{x}$ **β)** $9^{x}+6^{x}=2\cdot4^{x}$ **γ)** $4^{x}=-2\cdot14^{x}+3\cdot49^{x}$

10. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $7\cdot25^{x}-12\cdot35^{x}+5\cdot49^{x}=0$ **β)** $27\cdot4^{x}+8\cdot9^{x}=30\cdot6^{x}$

γ) $2\cdot9^{x}-5\cdot6^{x}+3\cdot4^{x}=0$

11. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\left(x^{2}-2x\right)^{x^{2}-3x}=1$ **β)** $\left(x^{2}-5x+6\right)^{x^{2}-2x}=1$ **γ)** $\left(x-3\right)^{x^{2}}=\left(x-3\right)^{x+2}$

Εκθετικές ανισώσεις

Για να λύσουμε μία εκθετική ανίσωση :

- ***Αν έχουμε δυνάμεις της μορφής $\alpha^{\gamma x+\delta}$ χρησιμοποιούμε την ιδιότητα $\alpha^{\gamma x+\delta}=\alpha^{\gamma x}\cdot \alpha^{\delta}$.***

✓ ***Αν έχουμε δυνάμεις με την ίδια βάση και τον ίδιο εκθέτη ,τις μεταφέρουμε στο ένα μέλος και τους αριθμούς στο άλλο ,οπότε έχουμε :***

$$\kappa_1\alpha^{f(x)}+k_2\alpha^{f(x)}+...>(<)(\geq)(\leq)\lambda_1+\lambda_2+...$$

Κάνουμε τις πράξεις που γίνονται(αναγωγή ομοίων ορων κ.λ.π) οπότε καταλήγουμε :

- Αν α>1 : $\alpha^{f(x)}>(\geq)\beta\Leftrightarrow\alpha^{f(x)}>(\geq)\alpha^{\varepsilon}\overset{\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x)>(\geq)\varepsilon.....$ ***ή***

$$\alpha^{f(x)}<(\leq)\beta\Leftrightarrow\alpha^{f(x)}<(\leq)\alpha^{\varepsilon}\overset{\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x)<(\leq)\varepsilon.....$$

- Αν 0<α>1 : $\alpha^{f(x)}>(\geq)\beta\Leftrightarrow\alpha^{f(x)}>(\geq)\alpha^{\varepsilon}\overset{\searrow}{\Leftrightarrow}f(x)<(\leq)\varepsilon.....$ ***ή***

$$\alpha^{f(x)}<(\leq)\beta\Leftrightarrow\alpha^{f(x)}<(\leq)\alpha^{\varepsilon}\overset{\searrow}{\Leftrightarrow}f(x)>(\geq)\varepsilon.....$$

✓***Αν έχουμε δυνάμεις με την ίδια βάση και εκθέτες πολλαπλάσια της ίδιας παράστασης*** $\kappa_1\alpha^{\lambda f(x)}+k_2\alpha^{\mu f(x)}+k_2\alpha^{\nu f(x)}+....>(<)(\geq)(\leq)....,\ \lambda\neq\mu\neq\nu$ ***:***

- Θέτουμε $\alpha^{f(x)}=\omega$ (1) και καταλήγουμε σε πολυωνυμική ανίσωση $\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+\alpha_1x+a_0>(<)(\geq)(\leq)0$,την οποία λύνουμε όπως μάθαμε στην αντίστοιχη παράγραφο.

- ***Τέλος αντικαθιστούμε στις ανισώσεις που προέκυψαν από τη λύση της πολυωνυμικής αντί για ω το ίσον του και βρίσκουμε τις λύσεις της ανίσωσης όπως στην προηγούμενη περιπτώσεις.***

✓ ***Αν έχουμε δυνάμεις με διαφορετική βάση και ίδιο εκθέτη διαιρούμε με την εκθετική με τη μεγαλύτερη βάση ή με τη μικρότερη και μετά έχουμε μία από τις προηγούμενες περιπτώσεις.***

Ασκήσεις

12.Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $2^{x^2-3x+2}<1$ **β)** $2^{x+1}<2^{2x-4}$ **γ)** $3^{x^2+3}<81$

δ) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x}\leq\left(\frac{1}{4}\right)^{x+\frac{5}{2}}$ **ε)** $4^{x^2-7x+6}>1$ **στ)** $\left(\frac{5}{13}\right)^{x^2-x}\geq 0$.

13.Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $3^{x+2}-2\cdot3^{x+1}+3^x\leq 36$ **β)** $7^{x-2}+2\cdot7^{x-1}+7^{x+1}-7^x>2127$

γ) $2^{x-2}-\frac{8}{2^{x+2}}+2^x-\frac{14}{2^{x+1}}\geq 0$ **δ)** $5^{x^2+1}+2\cdot5^{x^2}<7$

ε) $13^x-14\sqrt{13^x}+13\leq 0$ **στ)** $e^{2x}+e\geq e^x+e^{x+1}$

ζ) $27^x - 3\cdot 9^x + 3^{x+2} - 27 > 0$ **η)** $2^{x-1} - \frac{3}{4}\sqrt{2^x} \le 5$

θ) $5\left(\frac{5}{2}\right)^x + 2\left(\frac{2}{5}\right)^x > 7$

14. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $\left(2^x - \sqrt{2}\right)\left(17^x + 5\right)\left(3^{2x} - 1\right)\left(5^x - 5\right) > 0$

β) $\left(3^{5x-\frac{1}{2}} - 9\sqrt{3}\right)\left(e^{2x+1} - \frac{1}{e^3}\right)\left(5^x - 1\right) \le 0$

γ) $\left(11^x + 2017\right)\left(17^{x^3} - 17\right)\left(5^{x^2} - 1\right) > 0$

δ) $\left(10^{2x-1} - 1000\right)\left(6^x + 6\right)\left(17^{3x-3} - 17\right) \ge 0$

ε) $\left(49 - 7^x\right)\left(25 - 5^x\right)\left(27 - 3^x\right) \le 0$

στ) $\left(8^x \cdot 4^{x-9} - 64\right)\left(11^x - 11\right)\cdot 2018^x < 0$

15. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $4\sqrt{2^x} - 8.2^x > 0$ **β)** $4^x + 8 < 6\cdot 2^x$

γ) $6^x + 6^{x+1} < 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}$ **δ)** $25^x - 4\cdot 5^x - 5 \ge 0$

16. Να λύσετε τις ανισώσεις: **α)** $\left(e^x + 3\right)\left(e^x - 1\right) > 0$ **β)** $\frac{2^x - 4}{2^x - 8} \le 0$.

17. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $3\cdot 2^{x+2} - 3^{x+3} \ge 3^{x+1} - 2^{x+3}$ **β)** $5\cdot 2^x - 5\cdot 3^{x+1} \le 12\cdot 3^x - 3\cdot 2^x$

γ) $6\cdot 3^x - 2\cdot 7^{x+1} > 35\cdot 7^x - 3^{x+1}$

18. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $7\cdot 3^{x+1} + 5^{x+3} < 3^{x+4} + 5^{x+2}$ **β)** $125\cdot 5^x - 7^{x+2} \le 51\cdot 7^x - 71\cdot 5^x$

γ) $6\cdot 3^{x-1} - 5^{x+1} \ge 2\cdot 5^x - 3\cdot 3^{x+1}$

19. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $7\cdot 9^x + 3\cdot 49^x < 10\cdot 21^x$ **β)** $9^x - 11\cdot 15^x + 10\cdot 25^x > 0$

γ) $10\cdot 4^x \ge 29\cdot 10^x - 10\cdot 25^x$

20. Να λύσετε την ανίσωση: $1 + 25^{\text{συν}^2 x} \ge 10\cdot 5^{2\text{συν}^2 x - 1}$.

21. Να λύσετε την ανίσωση: $4^{2\text{ημ}x + \frac{1}{2}} + 2^{\text{ημ}x} < 3$.

22. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $(x-3)^{x^2-1}>1$ για $x>3$ **β)** $(x+2)^{x^2-3x-4}\geq 1$,για $x>-2$.

Εκθετικά συστήματα

Ασκήσεις

✓ ***Συνηθισμένες περιπτώσεις είναι :***

- ***Να αποτελείται από 2 εκθετικές εξισώσεις με ίδια βάση,τις οποίες λύνουμε όπως έχουμε μάθει.***
- ***Να είναι της μορφής*** $\begin{cases}\kappa_1\cdot\alpha^x+\kappa_2\cdot\beta^x=\mu\\ \kappa_3\cdot\alpha^x+\kappa_4\cdot\beta^x=\nu\end{cases}$ ***το οποίο μετατρέπεται σε γραμμικό σύστημα με τη βοήθεια βοηθητικών αγνώστων*** $\left(\alpha^x=\omega,\beta^x=\varphi\right)$

23. Να λυθούν τα συστήματα:

α) $\begin{cases}8^{2x+1}=32\cdot 2^{4y-1}\\ 5\cdot 5^{x-y}=\sqrt{25^{2y+1}}\end{cases}$ **β)** $\begin{cases}4^{x-2}\cdot 2^{y-3}=1\\ 3^x\cdot 3^{y-3}=9\end{cases}$ **γ)** $\begin{cases}3^x-2^{y+3}=-5\\ 2^y-3^{x-3}=3\end{cases}$

24. Να λύσετε τα συστήματα

α) $\begin{cases}5^{x+1}=25^{y-3}\\ 9^{x+y}=27\cdot 3^y\end{cases}$ **β)** $\begin{cases}17^{x^2-4x+3}=1\\ x-y=4\end{cases}$

γ) $\begin{cases}5^{x-1}\cdot 25^y=1\\ 2^x\cdot 2^{y-1}=8\end{cases}$ **δ)** $\begin{cases}2\cdot 3^x-5^y=1\\ 7\cdot 3^x+3\cdot 5^y=10\end{cases}$

25. Να λύσετε τα συστήματα

α) $\begin{cases}3^x+5^y=34\\ 5\cdot 3^x-3\cdot 5^y=-30\end{cases}$ **β)** $\begin{cases}7^x-5^y=44\\ 5\cdot 7^x-9\cdot 5^{y+1}=200\end{cases}$

γ) $\begin{cases}11^{3x+1}\cdot 11^{y-x}=121\\ 13^{2x-13}\cdot 13^{x-y}=13\end{cases}$ **δ)** $\begin{cases}3^{5x+1}\cdot 9^{y-2x}=8\\ 2^{2x-11}\cdot 2^{2-y}=1\end{cases}$

26. Να λυθούν τα συστήματα :

α) $\begin{cases}3^x=2y\\ 2^x=3y\end{cases}$ β) $\begin{cases}5^x=49y\\ 7^x=25y\end{cases}$.

Εκθετικές συναρτήσεις

Ασκήσεις

✓***Για να βρούμε τις τιμές μιας παραμέτρου έστω λ για τις οποίες μία συνάρτηση της μορφής $\left(f(\lambda)\right)^x$:***

- ***ορίζεται σ' όλο το $\mathbb{R}$ λύνουμε την ανίσωση $f(\lambda)>0$***
- ***είναι εκθετική λύνουμε την ανίσωση $f(\lambda)>0$ και $f(\lambda)\neq 1$.***
- ***είναι γνησίως αύξουσα λύνουμε την ανίσωση $f(\lambda)>1$.***
- ***είναι γνησίως φθίνουσα λύνουμε την ανίσωση $f(\lambda)<1$ και συναληθεύουμε με τις λύσεις της ανίσωσης $f(\lambda)>0$.***

✓ ***Για να βρούμε το πεδίο ορισμού μίας συνάρτησης που έχει συναρτήσεις της μορφής $\left(f(\lambda)\right)^x$ χρησιμοποιούμε ότι έχουμε μάθει στις εκθετικές ανισώσεις και εξισώσεις.***

27.Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\left(4-\lambda^2\right)^x$.

α) Για ποιες τιμές του λ ορίζεται η f;
β) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του λ για τις οποίες η f είναι γνησίως αύξουσα.
γ) Να βρείτε το λ ώστε η γραφική παράσταση της f(x) να περνάει από το σημείο $P\left(1,\frac{1}{2}\right)$.
δ) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η γραφική παράσταση της f(x) να περνάει από το σημείο Σ(2,1).

28.Δίνεται συνάρτηση $\alpha^x:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ με $\alpha^{38}<\alpha^{24}, a\in(0,1)\cup(1,+\infty)$.

α) Να προσδιορίσετε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης $f(x)=0$ αιτιολογώντας την απάντησή σας.
β) Να λύσετε την ανίσωση $2^{x-1}<\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+5}$.

(τράπεζα θεμάτων)

29.Να βρείτε για ποιες τιμές του λ ∈ R η συνάρτηση f με $f(x)=(\lambda^2-2\lambda+1)^x$:

α) είναι γνησίως αύξουσα
β) είναι γνησίως φθίνουσα

30.Να βρείτε για ποιες τιμές του λ ∈ R ώστε η συνάρτηση f με $f(x)=\left(\frac{\lambda+3}{6-\lambda}\right)^x$:

α) ορίζεται σε όλο το R
β) είναι εκθετική
γ) είναι γνησίως αύξουσα
δ) είναι γνησίως φθίνουσα

31. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\sqrt{(2018^x-1)(x^2-4x+3)(x-2)}$

β) $g(x)=\sqrt{\left(16-2^x\right)(2017x-2017)\left(2^{2x}-3\cdot 2^x+2\right)}$

γ) $h(x)=\sqrt{(e^{3x+3}-1)(e^x-1)\left(3^x-9\right)}$

δ) $k(x)=\dfrac{\sqrt{27^x-3}}{21\cdot 3^x+5^{x+3}-3^{x+4}-5^{x+2}}$

32. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\sqrt{e^{-x+3}-1}$ **β)** $f(x)=\sqrt{\left(1-e^x\right)(x-2017)}$

γ) $f(x)=\sqrt{1-\left(\dfrac{2017}{2018}\right)^{4x-5}}$ **δ)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{81-3^x}}{2017^x-1}$.

33. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f με :

α) $f(x)=\sqrt{\left(e^x-e^2\right)\left(x^2-1\right)}$ **β)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{16-2^x}}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^x-4}+\dfrac{1}{x+3}$

γ) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-\left(\dfrac{2018}{2017}\right)^{4x^2-4}}}{x}$ **δ)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{e-e^x}}{e^{2x}-(e+1)e^x+e}$

34. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των:

α) f(x)= $\sqrt{\dfrac{1}{9^x}-\sqrt{3}}$ **β)** f(x) = $\sqrt{25^x-6\cdot 5^x+5}$ **γ)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{27^x-3}}{3^x-4\cdot 9^x+3\cdot 27^x}$.

Σύνθετα Θέματα

35.α) Να λύσετε την εξίσωση: $3\cdot 4^x + 2\cdot 5^x = 4\cdot 3^x + 5\cdot 2^x$

β) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 3\cdot 4^x + 2\cdot 5^x$ και $g(x) = 4\cdot 3^x + 5\cdot 2^x$. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της .

36. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\dfrac{2\alpha+2}{3\alpha-3}\right)^x$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in R$ η f είναι

i) γνησίως αύξουσα **ii)** γνησίως φθίνουσα.

β) Για α=-3 να λύσετε τις ανισώσεις :

i) $3f(x) + f(x+1) < \dfrac{10}{9}$ **ii)** $\dfrac{3f(2x)+3}{10f(x)} > 1$.

γ) Για α=17 να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} f(x) + 3\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^y = 4 \\ 3f(-x) + 2\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-y} = 5 \end{cases}$.

37. Δίνεται η γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση $f(x) = (\lambda^3 - \lambda - 5)^x$.

α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές της παραμέτρου λ.

β) Να λύσετε την ανίσωση: $f(7\cdot 3^{x+1} + 5^{x+3}) < f(3^{x+4} + 5^{x+2})$.

γ) Να βρείτε τη τιμή του λ για την οποία η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(1,19)$.

δ) Αν $\lambda = 3$, να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f(-x) = 2$.

38. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ και $g(x) = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια και η g περιττή συνάρτηση.

β) Να αποδείξετε ότι $f^2(x) - g^2(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) Να αποδείξετε ότι $g(\alpha-\beta) = g(\alpha)f(\beta) - g(\beta)f(\alpha)$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + 2g(x) = 1$.

39. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(\lambda^2-4\lambda+4\right)^x$

α) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να βρείτε το λ ώστε η γραφική της παράσταση να διέρχεται από το σημείο $A(1,9)$.

γ) Αν $\lambda\in(2,3)$, να λύσετε την ανίσωση $f\left(x^2\right)>f(5x-6)$.

δ) Αν $\lambda=4$, να λύσετε την ανίσωση $2f(x)+3\cdot 9^x-5\cdot 6^x\le 0$.

40. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=5^x+x$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Αν $\alpha<\beta$ να αποδείξετε ότι $5^\alpha-5^\beta<\beta-\alpha$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $5^{x^2-1}+x^2=5^{x+1}+x+2$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $5^x+x>6$

41. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3^x+x$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι $3^x-3^{x+1}<1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού x για τις οποίες $3^x-3^{x^2}>x^2-x$.

δ) Να λύσετε την ανίσωση $3^{x^2-3x}+x^2+6<3^{4x-6}+7x$.

42. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+x-1$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Να λύσετε τη εξίσωση $e^x=1-x$.

γ) Αν $\alpha<\beta$ να αποδείξετε ότι $e^\alpha-e^\beta<\beta-\alpha$.

δ) Να λύσετε την ανίσωση $e^{x^3}-e^x>x-x^3$.

43. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{2x}+e^x-2$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $e^{2x}=2-e^x$.

γ) Να βρείτε το πρόσημο της f.

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f\left(e^{2x}-1\right)-f\left(-e^x+1\right)<0$.

ε) Να λύσετε την εξίσωση $e^{2e^x}-e^{2e^2}=e^{e^2}-e^{e^x}$.

44. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=4^x+2$ και $g(x)=6\cdot 2^x-6$.

α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g.

β) Να λύσετε την ανίσωση $g(x)+2g(-x)>0$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x-1)-5\sqrt{f(x-2)-2}-1=0$

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f\left(2^x\right) > g\left(2^x\right)$.

ε) Να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{g(x)}{g(x)-6} < 0$.

45. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = 21 \cdot 3^x + 5^{x+3}$ και $g(x) = 3^{x+4} + 5^{x+2}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι f,g είναι γνησίως αύξουσες συναρτήσεις.
β) Να λύσετε την εξίσωση $21 \cdot 3^x + 5^{x+3} = 32$.
γ) Να λύσετε την εξίσωση $3^{x+4} + 5^{x+2} = 10$.
δ) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g.

46. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{9^x + 3^x - 12}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > \sqrt{78}$.
δ) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(x^3 + 1\right) - f(3x - 1) = 0$.
ε) Να αποδείξετε ότι $9^\alpha - 9^\beta < 3^\beta - 3^\alpha$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$.

47. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4^x + 2^x - 20}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > \sqrt{52}$.
δ) Να λύσετε την ανίσωση $f\left(3^x - 3^{-x}\right) > f\left(3^{-x} - 1\right)$.
ε) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f(3x) = f(2x) + f(4x)$

48. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (\lambda - 1)^x$ η οποία έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το λ.
β) Αν $\lambda = 3$ να λύσετε την ανίσωση $f(2x) + 16 \le 5f(x+1)$.
γ) Αν $1 < \lambda < 2$ να λύσετε την ανίσωση $f\left(2^x + 3\right) - f\left(12 - 2^{3-x}\right) > 0$.
δ) Αν $\lambda > 2$ να δείξετε ότι για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) + f(3x) < f(2x) + f(4x)$.

49. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(-3, 8)$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha = \dfrac{1}{2}$
β) Να διατάξετε τους αριθμούς $f(\pi)$, $f(0{,}789)$, $f(e)$.
γ) Να δείξετε ότι $f(x+y) = f(x)f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

δ) Να δείξετε ότι $f(x)+f(-x)\geq 2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ε) Να λύσετε την εξίσωση $2f(2x)-5f(x)+2=0$.

στ) Να λύσετε την ανίσωση $f(-x)-f(x)>3\left(1-f(x)\right)$.

ζ) Να λύσετε την ανίσωση $3\cdot 9^x+2f(-2x)\leq 5\cdot 6^x$.

η) Να λύσετε την ανίσωση $f(-x)+3x<5$.

θ) Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} 3^y f(-x)=4 \\ f(-y)\cdot 3^x=9 \end{cases}$.

50. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=21\cdot 3^x+5^{x+3}$ και $g(x)=3^{x+4}+5^{x+2}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι f,g είναι γνησίως αύξουσες συναρτήσεις.

β) Να λύσετε την εξίσωση $21\cdot 3^x+5^{x+3}=32$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $3^{x+4}+5^{x+2}=10$.

δ) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g.

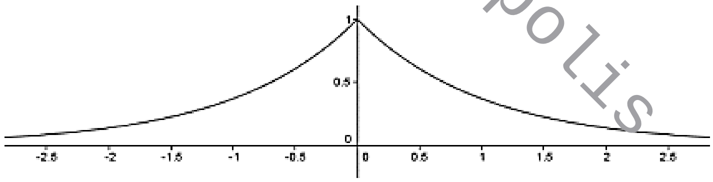
ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

51. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=3^x, x\in\mathbb{R}$.

α) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x)=3^x+1$ και $h(x)=3^x-1$, μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

β) Ποια είναι η ασύμπτωτη ευθεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g και ποια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h ;

52. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f διπλού τύπου.



α) Αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση αντιστοιχεί σε μια ακριβώς από τις παρακάτω συναρτήσεις να επιλέξετε ποιος είναι ο τύπος της συνάρτησης f.

Α. $f(x)=\begin{cases} e^x \ , x<0 \\ e^{-x}, x\geq 0 \end{cases}$ Β. $f(x)=\begin{cases} e^{-x} \ , x<0 \\ e^x, x\geq 0 \end{cases}$

β) Να βρείτε τη μονοτονία και την μέγιστη τιμή της.

γ) Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές του α, το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία $y=\alpha, \alpha\in\mathbb{R}$.

δ) Να αιτιολογήσετε γιατί το μοναδικό κοινό σημείο της γραφικής παράστασης C_f

της f με την παραβολή $y = x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$ είναι το σημείο (0, 1).

53. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot 2^x + \beta$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία Α(1,3) και Β(2,13).

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β . (Μονάδες 7)

Αν α = 5 και β = - 7

β) Να βρείτε το κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα y΄y .

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 4^x - 3$.

54. Όταν ένας ασθενής παίρνει μια δόση ενός φαρμάκου τη χρονική στιγμή t = 0, τότε ο οργανισμός του το μεταβολίζει έτσι ώστε η ποσότητά του f (t) (σε mg) να μειώνεται μετά από t ημέρες σύμφωνα με τη συνάρτηση $f(t) = q_0 \cdot \alpha^t$, $t \geq 0$, όπου οι αριθμοί α, q_0 είναι κατάλληλες θετικές σταθερές.

α) Να εξηγήσετε τι παριστάνει η σταθερά q_0 στο πλαίσιο του προβλήματος και να αιτιολογήσετε γιατί ισχύει 0 < α< 1 .

β) Υποθέτουμε τώρα ότι μία ημέρα μετά τη λήψη του φαρμάκου, η ποσότητά του στον οργανισμό του ασθενούς έχει υποδιπλασιαστεί.

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha = \frac{1}{2}$.

ii. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης f , εκφράζοντας τις τιμές f (t) ως συνάρτηση της αρχικής τιμής q_0 .

t	0	1	2	3	4	5	6
$f(t)$	q_0	$\frac{q_0}{2}$					

γ) Υποθέτουμε τώρα ότι $\alpha = \frac{1}{2}$ και ότι η ποσότητα του φαρμάκου που παραμένει στον οργανισμό στο τέλος της 4ης ημέρας είναι 25 mg.

i. Να υπολογίσετε την ποσότητα της δόσης που πήρε ο ασθενής.

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0,6]$.

55. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \to$ με τύπους $f(x) = 4^x$ και $g(x) = 2^x - \frac{1}{4}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο Α , του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g , με εξαίρεση το σημείο Α .

γ) Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις f και g στο ίδιο σύστημα αξόνων.

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

Ορισμός

Ο $\log_{\alpha}\theta$ ***είναι ο εκθέτης στον οποίο πρέπει να υψώσουμε τον α για να βρούμε το***
Δηλαδή: $\alpha^{x}=\theta \Leftrightarrow x=\log_{\alpha}\theta$

Συνέπειες

$\log_{\alpha}\alpha^{x}=x$	$\alpha^{\log_{\alpha}\theta}=\theta$	$\log_{\alpha}1=0$	$\log_{\alpha}\alpha=1$

✓ *Ο δεκαδικός λογάριθμος logx*

$10^{x}=\theta \Leftrightarrow x=\log\theta$

$\log 10^{x}=x$	$10^{\log\theta}=\theta$	$\log 1=0$	$\log 10=1$

✓ *Ο φυσικός λογάριθμος lnx*

$e^{x}=\theta \Leftrightarrow x=\ln\theta$

$\ln e^{x}=x$	$e^{\ln\theta}=\theta$	$\ln e^{\theta}=\theta$	$\ln e=1$

Ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε το x ώστε να αληθεύουν οι ισότητες:

α) $\log 100=x$ **β)** $\ln\sqrt[4]{e}=x$ **γ)** $\log\frac{1}{1000}=x$

δ) $\ln\sqrt[3]{e^{4}}=x$ **ε)** $\log\sqrt[6]{x}=\sqrt[3]{2}$ δ) $\ln\sqrt[8]{x^{3}}=\sqrt[4]{27}$

2. Να υπολογίσετε τους λογαρίθμους:

α) $\ln\frac{e\cdot\sqrt[3]{e^{2}}}{\sqrt[5]{e}}$ **β)** $\ln e^{5}$ **γ)** $\ln\frac{e^{4}}{\sqrt[4]{e^{8}}}$

δ) $\ln\frac{1}{e^{5}}$ **ε)** $\ln\frac{\sqrt{e}}{e}$ **στ)** $\ln\frac{\sqrt[3]{e^{2}}}{e}$

3. Να βρείτε τις τιμές των επόμενων παραστάσεων:

α) $e^{\ln 7}$ **β)** $\ln e^{2017}$ **γ)** $\log 10^{2018}$

δ) $10^{\log\left(\ln e^{10}\right)}$ **ε)** $\sqrt{e}^{\ln 16}$ **στ)** $e^{\ln(\log 10000)}$

4. Να βρείτε τις τιμές των επόμενων παραστάσεων:

α) $\log\left(\ln e^{10}\right)$ **β)** $\ln\left(\log 10^{e^2}\right)$ **γ)** $\log\left(\ln \sqrt[100]{e}\right)$

δ) $\log\left(\log\sqrt{10^4}\right)$ **ε)** $\ln\left(\ln e^{e^{2017}}\right)$ **στ)** $\ln\left(\ln\left(\ln\left(e^e\right)\right)\right)$

Ιδιότητες λογαρίθμων

Αν $\alpha>0$ και $\alpha\neq 1$ τότε για οποιαδήποτε $\theta_1,\theta_2,\theta>0$ και $k\in\mathbb{R}$ ισχύουν:

1. $\log_\alpha(\theta_1\cdot\theta_2)=\log_\alpha\theta_1+\log_\alpha\theta_2$
2. $\log_\alpha\dfrac{\theta_1}{\theta_2}=\log_\alpha\theta_1-\log_\alpha\theta_2$
3. $\log_\alpha\theta^k=k\log_\alpha\theta$

Ο δεκαδικός λογάριθμος logx

1. $\log(\theta_1\cdot\theta_2)=\log\theta_1+\log\theta_2$
2. $\log\dfrac{\theta_1}{\theta_2}=\log\theta_1-\log\theta_2$
3. $\log\theta^k=k\log\theta$

Ο φυσικός λογάριθμος lnx

1. $\ln(\theta_1\cdot\theta_2)=\ln\theta_1+\ln\theta_2$
2. $\ln\dfrac{\theta_1}{\theta_2}=\ln\theta_1-\ln\theta_2$
3. $\ln\theta^k=k\ln\theta$

Ασκήσεις

✓***Θα ασχοληθούμε με τις ασκήσεις που αναφέρονται στο φυσικό και στο δεκαδικό λογάριθμο.***

5. Να αποδείξετε ότι αληθεύουν οι ισότητες:

α) $\log 32+2\log 4-\log 64=\log 8$ **β)** $\log 3+2\log 4-\log 12=2\log 2$

γ) $\dfrac{\log\sqrt{125}+\log\sqrt{27}-\log\sqrt{8}}{\log 15-\log 2}=\dfrac{3}{2}$ **δ)** $2\log\dfrac{5}{2}+\log\dfrac{3}{11}-\log\dfrac{40}{77}-\log\dfrac{105}{32}=0$

ε) $3\log2+\frac{1}{2}\log16=5\log2$ **στ)** $2+3\log2-\log10=1+3\log2$

ζ) $2\log5+3\log2-\log60+\log3=1$ **η)** $3\log2+2\log6-\log4-\log8=2\log3$.

6. Να βρεθούν οι τιμές των παραστάσεων :

α) $\dfrac{\ln\sqrt[4]{343}-\ln\sqrt[4]{8}-\ln\sqrt[4]{27}}{\ln7-\ln6}$ **β)** $\dfrac{\log70+\log30-2}{\log7+\log3}$

γ) $\dfrac{2\log5+\log3+4\log2-2}{\log30+2\log20-3}$ **δ)** $\dfrac{\ln\left(9e^4\right)-2\ln3-2}{\ln\left(2e^2\right)-\ln2+1}$.

7. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A=\dfrac{\log\sqrt{27}-\frac{1}{4}\log\frac{1}{64}}{\log\sqrt{8}+\log\sqrt{27}}$.

8. Να δείξετε ότι : $\log8+2\log\sqrt{27}-\log2-\log243=-2\log\frac{3}{2}$.

9. Να δείξετε ότι :

α) $\log\left(10-4\sqrt{5}\right)+\log\left(10+4\sqrt{5}\right)-\log2=2$.

β) $\log220-\log\left(5-\sqrt{3}\right)-\log\left(5+\sqrt{3}\right)=1$.

γ) $2\ln(3+\sqrt{3})+\ln(12-6\sqrt{3})=2\ln6$.

δ) $3\log\sqrt[4]{4\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}+2\log5$.

10. Να δείξετε ότι : $\dfrac{\log\sqrt{216}+\log\sqrt{343}-\log\sqrt{125}}{\log42-\log5}=\dfrac{3}{2}$.

11. Να υπολογισθεί η τιμή της παράστασης : $A=10^{3-\frac{1}{3}\log1000}$.

12. Να δείξετε ότι :

α) $\frac{1}{2}\ln2+\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{2})+\frac{1}{2}\ln(2-\sqrt{2})=\ln2$

β) $\frac{1}{3}\log3+\frac{1}{3}\log(3+\sqrt[3]{3})+\frac{1}{3}\log(9-3\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})=\log3$.

γ) $\frac{1}{2}\log5+\frac{1}{2}\log\left(5+\sqrt{5}\right)+\frac{1}{2}\log(\sqrt{10}+\sqrt{5+\sqrt{5}})+\frac{1}{2}\log(\sqrt{10}-\sqrt{5+\sqrt{5}})=2$.

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

13. Δίνεται η παράσταση $A=\log_4 3+\log_4 \alpha-\log_4 \beta$ όπου α, β θετικοί αριθμοί.

α) Να αποδείξετε ότι $A=\log_4 \frac{3\alpha}{\beta}$.

β) Αν για τους αριθμούς α, β ισχύει $3\alpha=16\beta$, να βρείτε την τιμή της παράστασης Α.

14. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha=\ln 2,\ \beta=\ln 4,\ \gamma=\ln 8$.

α) Να αποδείξετε ότι $2\beta=\alpha+\gamma$.

β) Να αποδείξετε ότι $\beta+\gamma=5\alpha$.

15. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha=\ln 2$ και $\beta=\ln 3$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί $0<\alpha<\beta$.

β) Να αποδείξετε ότι $\beta-\alpha<1$.

Δίνεται $e\simeq 2.71$.

16. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3-9x^2+(\alpha-2)x-6$ το οποίο έχει παράγοντα το $x-1$.

α) Να βρείτε τον αριθμό α.

β) Για α =15

i. να κάνετε τη διαίρεση $P(x):(x^2-3x+2)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

ii. αν $P(x)=(x^2-3x+2)(2x-3)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x)<0$.

iii. να αποδείξετε ότι $P(\ln 2)<0$.

17. Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)=e^{\ln e}x^3+4x^2\ln\sqrt{e}+2$.

α) Να δείξετε ότι $P(x)=ex^3+2x^2+2$.

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ με την ευθεία ε: $y=ex+4$.

γ) Να βρείτε τα διαστήματα του x που η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ είναι πάνω από την ευθεία ε: $y=ex+4$.

δ) Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $P(e)-e^2-4$.

18. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2+x$, $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$ και $\alpha\neq 0$ το οποίο το οποίο έχει 3 ακέραιες ρίζες διαφορετικές ανά δύο.

α) Να βρείτε τις ακέραιες ρίζες του $P(x)$.

β) Να αποδείξετε ότι α = -1 και β = 0.

γ) Με α = - 1 και β = 0,

i. να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$.

ii. να αποδείξετε ότι $P\left(\log\sqrt{10}\right) > 0$.

19. Ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το πολυώνυμο $4x^2 - 1$ δίνει πηλίκο $3x - 2$ και υπόλοιπο 1.

α) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 1$.

β) Να αποδείξετε ότι $P(\log 5) \neq 1$.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$.

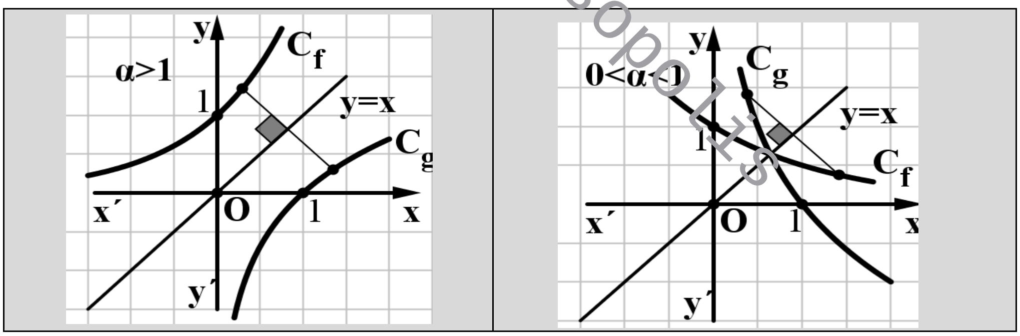
ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Ορισμός

Αν $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$ τότε η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \log_\alpha x$ λέγεται λογαριθμική συνάρτηση με βάση το α.

Επειδή $\log_\alpha x = y \Leftrightarrow \alpha^y = x$, αν το $M(\xi, \eta)$ είναι σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y = \log_\alpha x$ τότε το $N(\eta, \xi)$ θα είναι σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y = \alpha^x$ και αντιστρόφως. Τα σημεία, όμως, Μ και Ν είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$. Επομένως:

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = \log_\alpha x$ και $y = \alpha^x$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$.



Τέλος, από τη μονοτονία της λογαριθμικής συνάρτησης προκύπτει ότι:

αν $x_1 \neq x_2$ τότε $\log_\alpha x_1 \neq \log_\alpha x_2$

και με απαγωγή σε άτοπο έχουμε ότι: αν $\log_\alpha x_1 = \log_\alpha x_2$ τότε $x_1 = x_2$.

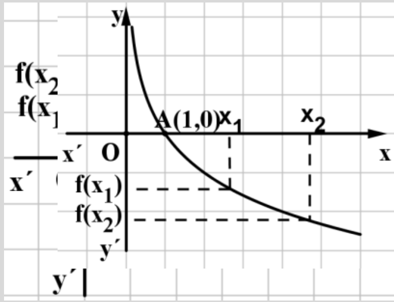
Επομένως ισχύει η ισοδυναμία: $\log_\alpha x_1 = \log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

Αν $0<\alpha<1$, τότε η λογαριθμική συνάρτηση $g(x)=\log_\alpha x$:

- ***Έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(0,+\infty)$.***
- ***Έχει σύνολο τιμών το σύνολο $\mathbb{R}$.***
- ***Είναι γνησίως φθίνουσα, που σημαίνει ότι: αν $x_1<x_2$ τότε $\log_\alpha x_1>\log_\alpha x_2$***

  Για κάθε $0<x<1$ είναι $\log_\alpha x>0$ και

  για κάθε $x>1$ είναι $\log_\alpha x<0$.
- ***Έχει γραφική παράσταση που τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο Α(1,0) και έχει ασύμπτωτο τον ημιάξονα Oy.***



Λογαριθμικές εξισώσεις

Για να λύσουμε μία λογαριθμική εξίσωση :

✓ ***Βρίσκουμε τις τιμές του x για τις οποίας ορίζονται οι συναρτήσεις που υπάρχουν στην εξίσωση,τις οποίες συναληθεύουμε,***
Κυρίως χρησιμοποιούμε ότι η παράσταση μέσα σε μία λογαριθμική συνάρτηση πρέπει να είναι μεγαλύτερη του μηδενός.

✓ ***Εφαρμόζουμε ιδιότητες λογαρίθμων, όπου είναι δυνατό.***

✓ ***Μεταφέρουμε στα αντίστοιχα μέλη και καταλήγουμε :***

- $\ln f(x)=\ln g(x)\overset{1-1}{\Leftrightarrow} f(x)=g(x)\ldots$ ή $\ln f(x)=0=\ln 1\overset{1-1}{\Leftrightarrow} f(x)=1\ldots.$

- $\log f(x)=\log g(x)\overset{1-1}{\Leftrightarrow} f(x)=g(x)\ldots.$ ή $\log f(x)=0=\log 1\overset{1-1}{\Leftrightarrow} f(x)=1\ldots.$

✓ ***Αν έχουμε $a_\nu \log^\nu f(x)+a_{\nu-1}\log^{\nu-1} f(x)+\ldots.=\ldots,$:***

- ***Θέτουμε $\log f(x)=\omega$ (1) και καταλήγουμε σε πολυωνυμική εξίσωση***

  $\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+a_0=0$ ***,την οποία λύνουμε όπως μάθαμε στην αντίστοιχη παράγραφο.***

- ***Τέλος αντικαθιστούμε τις λύσεις του ω που βρήκαμε στην (1) και βρίσκουμε τις λύσεις της εξίσωσης όπως στην προηγούμενη περίπτωση.***

✓ ***Αν έχουμε $a_\nu \ln^\nu f(x)+a_{\nu-1}\ln^{\nu-1} f(x)+\ldots.=\ldots.,$:***

- ***Θέτουμε $\ln f(x)=\omega$ (1) και ακολουθούμε την προηγούμενη διαδικασία***

✓ ***Αν έχουμε εξίσωση με ισότητα δυνάμεων με θετική βάση λογαριθμίζουμε κατά μέλη και καταλήγουμε σε προηγούμενες περιπτώσεις….***

Ασκήσεις

20. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\log(x-2)^2=2\log 4$ **β)** $\log(x-6)+\log(x-7)=1-\log 5$

γ) $2\log x-\log 4=\log(x-1)-\log 3$ **δ)** $2^{\log x}+2^{5-\log x}=12$

ε) $\log\left(4^{x-2}+9\right)-\log\left(2^{x-2}+1\right)=1-\log 2$

στ) $2\log(2x-1)-\log\left(3x-2x^2\right)=\log(4x-3)-\log x$

21.Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\log(2x+3)+\log(6x+2)=2\log(3x+1)$

β) $2\log(2x-1)-\log\left(3x-2x^2\right)=\log(4x-3)-\log x$

γ) $\frac{1}{3}\log(x-1)=\log x-\log 2$

δ) $\frac{\log x+3}{\log x}+\frac{\log x-2}{\log x-3}=\frac{9}{2}$

22.Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\log 25+x\log 5=\log 9+x\log 3$

β) $x\log 3+\log\left(3^x-4\right)=\log\left(3^x+1\right)+\log\left(3^x-1\right)$

γ) $\ln 5+x\ln 7=\frac{1}{2}\ln 25$

δ) $x\ln 2+\ln\left(2^x-2\right)=\ln\left(2^x-1\right)$.

23.Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $5^{3x-1}=2^{x+3}$ **β)** $2^x=11$ **γ)** $7^{x-2}=5^{x-1}$

δ) $e\cdot x^{\ln x}=x^2\sqrt{x}$ **ε)** $x^{2-\log x}=\frac{10}{\sqrt{x}}$.

24.Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\log^2 x-5\log x+4=0$ **β)** $\ln^2 x-3\ln x+2=0$

γ) $\log^2(x+1)-2\log(x+1)+1=0$ **δ)** $\ln^2 x-5=4\ln x$

25.Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\log^4 x-4\log^2 x-5=0$ **β)** $\ln^4 x-7\ln^2 x+6=0$

γ) $\log^6(x+1)-7\log^3(x+1)-8=0$ **δ)** $\ln^{10} x-3=2\ln^5 x$

26.Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\log^3 x-7\log x+6=0$ **β)** $\ln^4 x-\ln^3 x-\ln x-1=0$

γ) $\log^3 x+2\log^2 x-\log x-2=0$ **δ)** $\ln^3 x-6=6\ln^2 x-11\ln x$

27.Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $3^{\ln x}+3^{1-\ln x}=4$ **β)** $5^{\sqrt{\ln x}}-5^{1-\sqrt{\ln x}}=4$

28. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\log\left(x^2 - x - 2\right) = 1$ **β)** $\log\left[\log\left(3x - 5\right)\right] = 0$

γ) $\ln\left(9^x - 3^x - 5\right) = 0$ **δ)** $\log\left(2x^2 - 10x\right) = 2$.

29. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $x^{\log x} = 10$ **β)** $x^{\log(x-1)} = x - 1$

γ) $x^{\ln x} = 9$ **δ)** $x^{\ln\sqrt{x}} = e^2$.

30.α) Να αποδείξετε ότι: $2^{\log x} = x^{\log 2}$, $x > 0$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $2^{\log x} + x^{\log 2} = 16$.

31. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\log\left(3^{2x-2} + 10\right) = 1 + \log\left(3^{x-1} - 1\right)$

β) $\log x + \log\left(\log x\right) = 1$

Λογαριθμικές ανισώσεις

Για να λύσουμε μία λογαριθμική ανίσωση :

- ✓ ***Βρίσκουμε τις τιμές του x για τις οποίας ορίζονται οι συναρτήσεις που υπάρχουν στην εξίσωση,τις οποίες συναληθεύουμε,***
  Κυρίως χρησιμοποιούμε ότι η παράσταση μέσα σε μία λογαριθμική συνάρτηση πρέπει να είναι μεγαλύτερη του μηδενός.
- ✓ ***Εφαρμόζουμε ιδιότητες λογαρίθμων, όπου είναι δυνατό.***
- ✓ ***Μεταφέρουμε στα αντίστοιχα μέλη και καταλήγουμε :***

  - $\ln f(x) > (<) \ln g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.... ή $\ln f(x) = 0 = \ln 1 \overset{1-1}{\Leftrightarrow} f(x) = 1$....

  - $\log f(x) = \log g(x) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} f(x) = g(x)$.... ή $\log f(x) = 0 = \log 1 \overset{1-1}{\Leftrightarrow} f(x) = 1$....
- ✓ ***Αν έχουμε*** $a_\nu \log^\nu f(x) + a_{\nu-1} \log^{\nu-1} f(x) + ... = ...$, :
  - ***Θέτουμε*** $\log f(x) = \omega$ ***(1) και καταλήγουμε σε πολυωνυμική εξίσωση***
    $\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + ... + \alpha_1 x + a_0 = 0$ ***,την οποία λύνουμε όπως μάθαμε στην αντίστοιχη παράγραφο.***
  - ***Τέλος αντικαθιστούμε τις λύσεις του ω που βρήκαμε στην (1) και βρίσκουμε τις λύσεις της εξίσωσης όπως στην προηγούμενη περίπτωση.***
- ✓ ***Αν έχουμε*** $a_\nu \ln^\nu f(x) + a_{\nu-1} \ln^{\nu-1} f(x) + ... = ...$, :
  - ***Θέτουμε*** $\ln f(x) = \omega$ ***(1) και ακολουθούμε την προηγούμενη διαδικασία***
- ✓ ***Αν έχουμε εξίσωση με ισότητα δυνάμεων με θετική βάση λογαριθμίζουμε κατά μέλη και καταλήγουμε σε προηγούμενες περιπτώσεις….***

Ασκήσεις

32. Να συγκριθούν μεταξύ τους οι αριθμοί:

α) $\log 3$,0, $\log\frac{1}{3}$ **β)** $\ln e^2, 0, \ln\frac{1}{e^2}$ και $\log_{\frac{1}{2}} 11$.

33. Να βρείτε το πρόσημο των αριθμών $\log 11,\ \log\frac{1}{2},\ \ln\pi,\ \ln\frac{1}{3}$.

34. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $\ln x > 1$ **β)** $\log\left(2x+\frac{2}{5}\right) < -1$

γ) $\ln(x-2) < -1$ **δ)** $\log(3x-3) \le \log(x-2)+1$.

35. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $2^x \le 7$ **β)** $3^{x-3} \ge 5^{x+1}$

γ) $\left(\frac{3}{4}\right)^x \le 2$ **δ)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-4} > \left(\frac{1}{5}\right)^{2-x}$

36. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $\log^2 x - 3\log x - 4 \ge 0$ **β)** $2\ln^2 x - 5\ln x + 3 \ge 1$

γ) $2\log^2 x - \log x^2 - 4 \le 0$ **δ)** $\log^2 x^3 - \log x - 8 > 0$.

37. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $\log^2 x \ge 9$ **β)** $\ln^2 x \le \ln x$

γ) $\ln^2 x > 0$ **δ)** $\log^3 x < 27$

38. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $\log^2 x \ge \log x^6$ **β)** $\ln\sqrt{x} \le \ln^2 x$

γ) $4\log\sqrt[4]{x} > \log^3 x$ **δ)** $25\ln\sqrt[5]{x} < \ln^2 x^3$

39. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $\log(2x-3) > \log(24-6x)$ **β)** $\log\left(x^2-5x+7\right) < 0$

γ) $\log\left[\log\left(x^2-7x+22\right)\right] < 0$.

40. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α) $\log\left(x^2-5x+7\right) < 0$ **β)** $\log\left(\log\left(x^2-3x+12\right)\right) < 0$

γ) $\log\left(x^2+1\right) > 1 - \log x$.

41. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $\ln^2 x < |2\ln x|$ **β)** $\ln(e^3 + |3-x|) \geq 3$

γ) $\log(|1-x|-1) < 0$ **δ)** $\ln(2-|x+4|) \leq 0$

42. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $(2\log x - 2)(3\log x + 3) \geq 0$ **β)** $\log x \cdot (\log x - 1) \cdot (2 - \log x) \leq 0$

γ) $(3^x - 9)(1 - \log x) \leq 0$ **δ)** $(\ln x - \ln\frac{1}{3})\left[\left(\frac{3}{5}\right)^x - \frac{25}{9}\right](1 - \ln x) \leq 0$.

43. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $(x-1)(2\log x - 2)(3e^x + 3) \geq 0$ **β)** $(x^2-1)\cdot(1-\ln x)\cdot(e^x - e^2) \leq 0$

γ) $(5^x - 25)\cdot(1-\log x)(2x^2 - 5x + 2) \leq 0$ **δ)** $(\ln x - \ln\frac{1}{3})\left[\left(\frac{3}{5}\right)^x - \frac{25}{9}\right](1 - \ln x) \leq 0$

44. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $\dfrac{\ln x}{1 - \ln x} \leq 1$ **β)** $\dfrac{\log x - 1}{\log x} \geq \dfrac{3\log x - 3}{\log x + 1} \leq 0$

γ) $\ln x \leq \dfrac{3}{\ln x - 2}$ **δ)** $\dfrac{\ln x^2 + 1}{\ln(e \cdot x)} > 1$.

45. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α) $9^x - 5\cdot 3^x + 6 < 0$ **β)** $\dfrac{49^x - 5}{7^x + 1} \leq 1$

γ) $\dfrac{8e^{2x} - 12}{e^x + 1} < 4$ **δ)** $\dfrac{4^x - 11}{2^x - 1} < 5$.

46. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α) $\log(5\cdot 10^x - 6) > 2x$ **β)** $x^{\ln x} > e$

γ) $\ln(2e^{2x} - 1) < -x$ **δ)** $e^{2\ell n\sqrt{x^2-2x+2}} > 5$

47. Έστω συνάρτηση $f(x) > 0$ η οποία είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

α) $\log f(2)$ και $\log f(5)$ **β)** $\ln f(e)$ και $\ln f(e^2)$

Λογαριθμικά συστήματα

Ασκήσεις

- ***Για να λύσουμε σύστημα με λογαρίθμους χρησιμοποιούμε ιδιότητες λογαρίθμων και τα γνωστά μας από τα συστήματα.***
- ***Αν είναι της μορφής*** $\begin{cases} \kappa_1 \cdot \log f(x) + \kappa_2 \cdot \log\left(g(x)\right) = \mu \\ \kappa_3 \cdot \log f(x) + \kappa_4 \cdot \log\left(g(x)\right) = \nu \end{cases}$***,***

  μετατρέπεται σε γραμμικό σύστημα με τη βοήθεια βοηθητικών αγνώστων $\left(\log f(x) = \omega, \log\left(g(x)\right) = \varphi\right)$

48. Να λυθούν τα συστήματα:

α) $\begin{cases} x + y = 65 \\ \log x + \log y = 3 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} \log x + \log y = \dfrac{3}{2} \\ \log x - \log y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} \log^2 x + \log^2 y = 10 \\ \log x - \log y = 2 \end{cases}$

49. Να λυθούν τα συστήματα:

α) $\begin{cases} x + 2y = 30 \\ \log x + \log y = 2 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} \log x - \log y = \log 3 \\ \log(y - x) = 1 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} \log x + \log y = 4 \\ 2\log x + 3\log y = 11 \end{cases}$

50. Να λυθούν τα συστήματα:

α) $\begin{cases} 2^{\log x} + 3^{\log y} = 13 \\ 4^{\log x} + 9^{\log y} = 97 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} 3^{\log x} + 5^{\log y} = 8 \\ 9^{\log x} + 25^{\log y} = 34 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} 13^{\log x} + 5^{\log y} = 18 \\ 2 \cdot 13^{\log x} + 3 \cdot 5^{\log y} = 41 \end{cases}$.

51. Να λυθούν τα συστήματα:

α) $\begin{cases} x^{\log x} = 10000 \\ x \cdot y = 200 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} \dfrac{100^x}{10^y} = \dfrac{1}{100} \\ \log x + \log y = 4 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} \log x + \log y = 3\log 2 \\ 4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0 \end{cases}$

Λογαριθμική συνάρτηση

Ασκήσεις

- ***Θα ασχοληθούμε με τις ασκήσεις που αναφέρονται στο φυσικό και στο δεκαδικό λογάριθμο.***
- ***Το πεδίο ορισμού κάθε λογαριθμικής συνάρτησης είναι το $(0,+\infty)$.***
  Άρα για να βρούμε το πεδίο ορισμού της $\ln f(x)$ βρίσκουμε τις τιμές του x για τις οποίες $f(x)>0$
- ***Για να αποδείξουμε ότι μία συνάρτηση της μορφής $\ln f(x)$ είναι περιττή, διευκολύνει : $\ln f(-x)=-\ln f(x) \Leftrightarrow \ln f(-x)+\ln f(x)=0 \Leftrightarrow$***
  $\ln\big(f(-x)\cdot f(x)\big)=0 \Leftrightarrow \ldots$

52. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

α) $f(x)=\log x$, $g(x)=\log(x-3)$ και $h(x)=\log(x+3)$.

β) $f(x)=\log x$, $g(x)=\log x-3$ και $h(x)=\log x+3$.

53. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x)=5\log(x-1)$ **β)** $f(x)=\ln(2-2x)$ ` **γ)** $f(x)=\log(2x-3)+\log(2-x)$.

54. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\log(x^2-25)$ **β)** $f(x)=\log(x^3-8)-7\log(x^2-6x+9)$

γ) $f(x)=2\log(x^2-4)-3\log(9-x^2)$ **δ)** $f(x)=\ln(4-4x^2)$

55. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\log\dfrac{2x-4}{5-x}$ **β)** $f(x)=\log\left(\dfrac{3-x}{3+x^2}\right)$ **γ)** $f(x)=\log\dfrac{x^2-1}{2-x}$.

56. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=\log\dfrac{x+2}{2-x}$ **β)** $f(x)=\dfrac{\log(x^2-8x+15)}{\sqrt{16-x^2}}$

57. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=\log(4^x+4)$ **β)** $f(x)=\ln\left(\left(\dfrac{3}{5}\right)^x-1\right)$

γ) $f(x)=\log(2^{2x-4}-1)$ **δ)** $f(x)=\ln(e^x-e)$

58.Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=\log\left(4^x-5\cdot 2^x+4\right)$ **β)** $f(x)=\ln\left(-9^x+4\cdot 3^x-3\right)$

γ) $f(x)=\log\left(25^x-6\cdot 5^x+5\right)$ **δ)** $f(x)=\ln\left(e^x-(e+1)x+e\right)$.

59.Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=\log\left(2^{x+3}-3^{x+1}-3^{x+3}+3\cdot 2^{x+2}\right)$ **β)** $f(x)=\ln\left(2\cdot 4^x+3\cdot 9^x-5\cdot 6^x\right)$

γ) $f(x)=\log\left(3^{x+1}-2^x-3^{x-1}-2^{x+3}\right)$ **δ)** $f(x)=\ln\left(7\cdot 3^{x+1}-5^{x+2}=3^{x+4}-5^{x+3}\right)$

60.Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=\ln|x-2|$ **β)** $f(x)=\log\sqrt{x^2-4}$

γ) $f(x)=\ln\left(|3x-3|-5\right)$ **δ)** $f(x)=\log\left(2-|x|\right)$

61.α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση
$A=\ln x+\ln(x+6)$

β) Να λύσετε την εξίσωση : $\ln x+\ln(x+6)=\dfrac{1}{2}\ln 49$.

62.Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι περιττές:

α) $f(x)=\ln\dfrac{3-x}{3+x}$ **β)** $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

63.Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες:

α) $f(x)=x^3\cdot\ln\dfrac{5-x}{5+x}$ **β)** $f(x)=\ln\left(\sqrt{4x^2+1}-2x\right)\cdot ημx$

64.Αν $f(x)=\log\dfrac{1-x}{1+x}$, δείξτε ότι $f(\alpha)+f(\beta)=f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta}\right)$.

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

65.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log\left(10^x-1\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το διάστημα $(0,+\infty)$

β) Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x.

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x)+x=\log\left(10^{2x}-10^x\right)$, $x>0$.

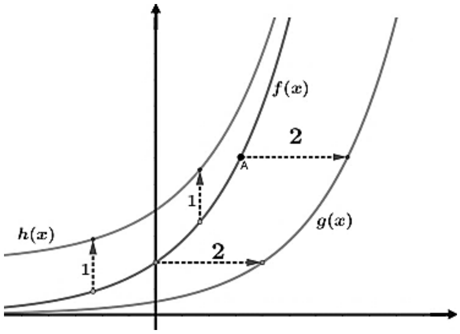
δ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μοναδικού κοινού σημείου της γραφικής παράστασης της f και της ευθείας $y=-x$.

66. Δίνεται η εξίσωση $\log\left(x^2+1\right)=1+\log 3-\log 6$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση γράφεται $\log\left(x^2+1\right)=\log 5$.

β) Να λύσετε την εξίσωση.

67. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=2^x$, $x\in\mathbb{R}$ και δύο άλλων συναρτήσεων g(x) και h(x), $x\in\mathbb{R}$ που προέκυψαν από μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της f(x).



α) Να εξηγήσετε με τι είδους μετατοπίσεις προέκυψαν οι γραφικές παραστάσεις των g(x) και h(x) από την γραφική παράσταση της f(x).

β) Να γράψετε τους τύπους των συναρτήσεων g(x) και h(x).

γ) Να βρείτε την τετμημένη του σημείου Α της γραφικής παράστασης της f του οποίου η τεταγμένη είναι 16.

68. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(e^x-1\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

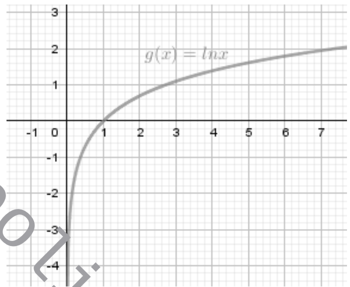
β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

69. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x+2)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x.

γ) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\ln x$.



Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να χαράξετε τη γραφική παράσταση της $f(x)=\ln(x+2)$ μετατοπίζοντας κατάλληλα την γραφική παράσταση της g.

70. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(x^2-2x+3\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το $f(3)$.

β) Να δείξετε ότι $\ln 3+3\ln 2-f(3)=\ln 4$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\ln 4$.

71. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x+1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής (αν υπάρχουν) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες x΄x και y΄y .
γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της $y = \ln x$.

72. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(x^2 + 4)$ και $g(x) = \ln x + \ln 4$.
α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .
β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

73.α) Να λύσετε την εξίσωση: $\ln(x+1) = \ln(2x)$.
β) Να λύσετε την ανίσωση: $\ln(x+1) > \ln(2x)$.

74.α) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση $A = \ln x + \ln(x+6)$.
β) Να λύσετε την εξίσωση $\ln x + \ln(x+6) = \ln 7$.

75. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x^2 - 2x$.
α) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.
β) Να λύσετε την εξίσωση $\ln^3 x - \ln^2 x - 2\ln x = 0$.
γ) Να λύσετε την ανίσωση $\ln^3 x - \ln^2 x - 2\ln x > 0$.

76. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$.
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
β) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας το O(0,0).
γ) Να υπολογίσετε την παράσταση $f(\ln 2) + f\left(\ln\dfrac{1}{2}\right)$.
δ) Να αποδείξετε ότι $f(\eta\mu\theta) + f(\eta\mu(\pi+\theta)) = 0$, για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$.

77. Δίνεται η παράσταση $A = \ln\left(\dfrac{e^{2x}-1}{e^x-3}\right)$.
α) Να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{\omega^2-1}{\omega-3} > 0$.
β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A.
γ) Να λύσετε την εξίσωση $A = -\ln 3$.

78. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln x^2,\ x \neq 0$.
α) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα y΄y .

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε x > 0 ισχύει $f(x)=\ln x$.

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $f(x)=\frac{1}{2}\ln x^2,\ x\neq 0$.

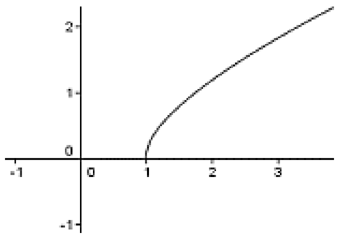
δ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική της παράσταση είναι κάτω από την ευθεία y = 2.

79. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x\ln x}$ και $g(x)=\sqrt{\ln x}$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού τους.

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση της f είναι από τη γραφική παράσταση της g και πάνω.

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της f.



γ) i. Να βρείτε τη μονοτονία της.

ii. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\frac{5}{3}\right)$ και $f\left(\frac{7}{5}\right)$.

δ) Να σχεδιάσετε την ευθεία $y=1-x$ και να βρείτε γραφικά τη λύση της εξίσωσης $f(x)=1-x$.

80. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log\frac{4^x-1}{2^x+5}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\log 3-\log 7$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>\log 3-\log 7$.

81. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(e^x-2\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

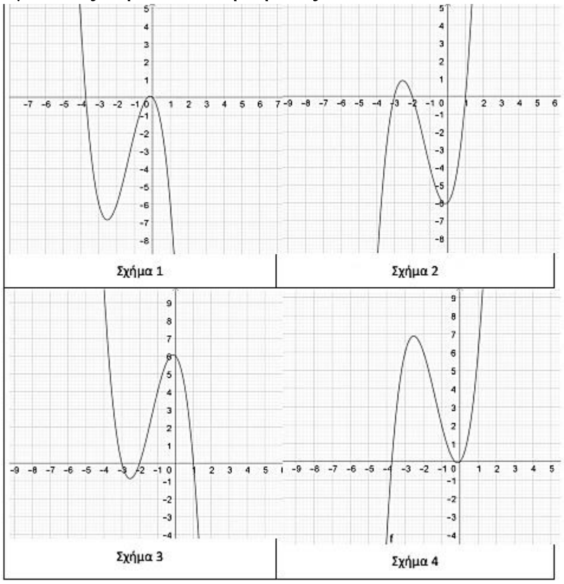
β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)+x=3\ln 2$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)+x\geq 3\ln 2$.

82. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=-x^3-4x^2-x+6$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $P(x)<0$.

β) Από τα παρακάτω σχήματα, ένα μόνο μπορεί να αντιστοιχεί στην γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$. Να βρείτε ποιο αιτιολογώντας την απάντησή σας.



γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωσή $P(x)=\ln x$ έχει μοναδική λύση την x =1.

83. Σε ένα πείραμα εργαστηρίου, ο αριθμός των βακτηρίων δίνεται από τον τύπο $P(t)=200e^{ct}$,

Όπου t ο χρόνος σε ώρες από την αρχή του πειράματος (t = 0). Σε μία ώρα ο αριθμός των βακτηρίων ήταν 328. (Δίνεται ότι ln(1,64) ≅ 0,5 και ln10 ≅ 2,3)

α) Να βρείτε τον αριθμό των βακτηρίων όταν ξεκίνησε το πείραμα.

β) Να αποδείξετε ότι $c=\frac{1}{2}$.

γ) Να βρείτε το χρονικό διάστημα κατά το οποίο ο αριθμός των βακτηρίων είναι μεγαλύτερος από το δεκαπλάσιο και μικρότερος από το εκατονταπλάσιο της αρχικής του τιμής.

84. Μια ποσότητα Q ραδιενεργού υλικού (σε κιλά) θάβεται και με την πάροδο του χρόνου t (σε έτη), μειώνεται ακολουθώντας το νόμο της εκθετικής μεταβολής $Q(t)=Q_0e^{ct}$. Γνωρίζουμε ότι μετά από δύο χρόνια έχει απομείνει το 1/3 της αρχικής ποσότητας και μετά από τέσσερα χρόνια έχει απομείνει 1 κιλό.

α) Να δείξετε ότι $Q(t)=Q_0\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t$.

β) Να βρείτε την αρχική ποσότητα που θάφτηκε (για t = 0).

γ) Να βρείτε μετά από πόσα χρόνια η ποσότητα που θα έχει απομείνει θα είναι $\frac{1}{81}$ κιλά.

85. Σε ένα ανοιχτό δοχείο υπάρχουν 10 λίτρα ενός υγρού. Το υγρό εξατμίζεται έτσι ώστε ο όγκος του να μειώνεται κατά 15% ανά εβδομάδα.

α) Να βρείτε την ποσότητα του υγρού που υπάρχει στο δοχείο στο τέλος της 1ης και στο τέλος της 2ης εβδομάδας.

β) Ο όγκος V του υγρού μετά από t εβδομάδες δίνεται από τη συνάρτηση $V(t) = V_0 \cdot \alpha^t$ όπου V_0 και α σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Να βρείτε τους αριθμούς V_0 και α .

γ) Αν ο όγκος του υγρού μετά από t εβδομάδες δίνεται από τη σχέση $V(t) = 10 \cdot (0,85)^t$, να βρείτε πότε ο όγκος του υγρού που υπάρχει στο δοχείο είναι μικρότερος από το μισό της αρχικής του τιμής.

(Δίνεται ότι: log(0,5) = - 0,3 και log(0,85) = - 0,07).

86. Στην Αστρονομία, οι αστέρες ταξινομούνται ανάλογα με την λαμπρότητα τους με βάση την σχέση $m - M = 5\log\left(\frac{d}{10}\right)$, (Ι) όπου d η απόσταση του αστέρα από τον παρατηρητή, m είναι το φαινόμενο μέγεθός τους (το πόσο λαμπροί φαίνονται) και M το απόλυτο μέγεθός τους. Το απόλυτο μέγεθος ορίζεται να είναι το φαινόμενο μέγεθος σε απόσταση 10 parsec από τον παρατηρητή, όπου 1 parsec είναι η μονάδα μέτρησης της απόστασης d και ισούται με 3,26 έτη φωτός = $30,9 \cdot 10^{12}$ km .

α) Για ποιες τιμές της απόστασης d το φαινόμενο μέγεθος ενός αστέρα είναι μικρότερο από το απόλυτο μέγεθός του;

β) Ένας αστέρας έχει φαινόμενο μέγεθος m = 1,157 και βρίσκεται σε απόσταση d = 100 parsec από έναν παρατηρητή. Ποιο είναι το απόλυτο μέγεθος αυτού του αστέρα;

γ) Να επιλύσετε την σχέση (Ι)ως προς d.

δ) Ο αστέρας Betelgeuse έχει φαινόμενο μέγεθος 0,46 και απόλυτο μέγεθος –5,14. Ποια είναι η απόστασή του από τον παρατηρητή; Δίνεται ότι $\sqrt[25]{10^{53}} \cong 131$.

Σύνθετα θέματα

87. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log\left[(k-1)x^2 - 2(k-3)x + k\right]$.

α) Να βρείτε τις τιμές του k για τις οποίες η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

β) Αν $k = 2$, να αποδείξετε ότι $f(0)f(-2) + 1 > \log\frac{1}{100^{f(0)}}$.

88. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log\frac{x-3}{x^2 - 2x} + 2\log(x-2)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\log\dfrac{(x-3)(x-2)}{x}$.

γ) Να βρείτε το $k\in\mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει ότι $2kf(6)=\log 2^{k-2}$.

89. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\log(x-1)-\log(x^2-2x)$ και $g(x)=1-\log(x+1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο των συναρτήσεων f,g.
β) Να βρείτε τη τετμημένη του σημείου τομής των γραφικών τους παραστάσεων.
γ) Να λύσετε τις εξισώσεις: **i.** $f(x)=0$ και **ii.** $g(x)=0$.
δ) Να αποδείξετε ότι: $f(4)-3g(1)+4=\log 30$.

90. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left|\log(x+1)\right|$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
β) Να γράψετε την f χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.
γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

91. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+\ln\dfrac{e^x-3}{e^x+5}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
β) Να βρείτε τις τιμές του χ για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x.

92. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha(\log x)^4+8(\log x)^2\cdot\log(100x),\ x>0,\ \alpha\in\mathbb{R}$

α) Να βρείτε τη τιμή του α για την οποία η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(10,25)$.

β) Αν α = 1, τότε:

i. να αποδείξετε ότι η f παίρνει τη μορφή: $f(x)=\left(\log^2 x+4\log x\right)^2$

ii. να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

93. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log x^2$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της. **β)** Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.
γ) Να κάνετε τη γραφική της παράσταση.
δ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=f(x+2)$ με την ευθεία $y=2\log 4$.

94. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\log(3x-14)}{\log(x-4)}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $y=2$.

γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y=1$.

95. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left|\ln(x-2)\right|$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
β) Να απαλλάξετε τον τύπο της f από την απόλυτη τιμή.
γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
δ) Να λύσετε την εξίσωση $\ln^2(x-2)-f(x)-2=0$.

96. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log\left|\log(x-4)\right|$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x.
γ) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες $f(x)<0$.

97. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log\left(\log(x-1)\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x.
γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x+7)-f(x+1)>\log 2$.
δ) Να αποδείξετε ότι $3f(101)+2f(1001)=f(10001)+\log 18$

98. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)-x$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.
β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή.
γ) Να διατάξετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(0)$.
δ) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x)+f(x+1)+1+2x=0$.

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ-ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗΣ

99. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(2^x-5\right)$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.
β) Τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.
γ) Να βρείτε τα διαστήματα του x που η C_f είναι πάνω από τον άξονα x΄x.

100. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\ln\dfrac{4^x-2^x}{2^{x+1}+4}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.tr

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=-2\ln 2$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)<0$.

δ) Να αποδείξετε ότι: $f(x)=(x-1)\ln 2+\ln\dfrac{2^x-1}{2^x+2}$

101. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln\left(e^x-1\right)$ και $g(x)=\ln\left(2e^{1-x}-2\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο των συναρτήσεων f,g.

β) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f,g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(-2x)>g(x+1)$.

δ) Να αποδείξετε ότι $g(1-x)=f(x)+\ln 2$.

102. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log\left(2x^2-4x+4\right)-2\log x$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $10^{(2x+1)f(1)}-5\cdot 10^{xf(1)}+10^{f(1)}=f(2)$

δ) Να αποδείξετε ότι $x^{f(1)}=2^{\log x}$ και να λύσετε την εξίσωση $x^{2f(1)}=2+2^{\log x}$

103. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln\left(e^{2x}-2e^x+3\right)$ και $g(x)=\ln 3+\ln\left(e^x-1\right)$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των f και g.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=g(x)$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>2g(x)$.

δ) Να αποδείξετε ότι η g είναι $1-1$.

ε) Να λύσετε την εξίσωση $g(x)-g(1)=f(0)$

104. Δίνεται η $f(x)=\ln\left(e^{2x}-e^x\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=x+\ln\left(e^x-1\right)$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=x$.

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>x+2\ln 2$.

ε) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1 και να λύσετε την εξίσωση.

105. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=36^x-225^x-3\cdot 4^x+3\cdot 25^x$.

α) Να βρείτε το σημείο τομής της με τον άξονα x΄x.

β) Να αποδείξετε ότι

$$2\log\frac{f(0)+5}{f(0)+2}+\log\frac{f(0)+3}{f(0)+11}-\log\frac{f(0)+40}{f(0)+77}-\log\frac{f(0)+105}{f(0)+32}=0$$

106. α) Να λύσετε την εξίσωση: $3\cdot 4^x+2\cdot 5^x=4\cdot 3^x+5\cdot 2^x$.

β) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=3\cdot 4^x+2\cdot 5^x$ και $g(x)=4\cdot 3^x+5\cdot 2^x$. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της .

107. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log(\log(x-1))$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x+7)-f(x+1)>\log 2$.

δ) Να αποδείξετε ότι $3f(101)+2f(1001)=f(10001)+\log 18$

108. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\log(x-1)-\log(x^2-2x)$ και $g(x)=1-\log(x+1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο των συναρτήσεων f,g.

β) Να βρείτε τη τετμημένη του σημείου τομής των γραφικών τους παραστάσεων.

γ) Να λύσετε τις εξισώσεις: **i.** $f(x)=0$ και **ii.** $g(x)=0$.

δ) Να αποδείξετε ότι: $f(4)-3g(1)+4=\log 30$.

109. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)-x$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή.

γ) Να διατάξετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς $f\left(-\frac{1}{2}\right), f\left(\frac{1}{2}\right), f(0)$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x)+f(x+1)+1+2x=0$.

110. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha(\log x)^4+8(\log x)^2\cdot\log(100x), x>0, \alpha\in\mathbb{R}$

α) Να βρείτε τη τιμή του α για την οποία η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(10,25)$.

β) Αν α = 1, τότε:

i. να αποδείξετε ότι η f παίρνει τη μορφή: $f(x)=(\log^2 x+4\log x)^2$

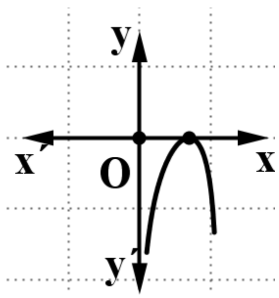
ii. να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

111. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(\dfrac{e^{2x}-1}{e^{x}+5}\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=2\ln 2$.
γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>0$.
δ) Έστω η συνάρτηση $g(x)=\left(e^{x}+5\right)e^{f(x)}$.

i. Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα.
ii. Να λύσετε την εξίσωση $g(\eta\mu x+x)=g(x)$

112. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(-e^{2x}+4e^{x}-3\right)$ της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
β) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.
γ) Να δικαιολογήσετε (αλγεβρικά) γιατί δεν υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της f που να βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x.

113. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(e^{2x}-6e^{x}+8\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της .
β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\geq \ln 3$
γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=x+\ln 3$

114. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right)$ και $g(x)=\dfrac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια και η g περιττή συνάρτηση.
β) Να αποδείξετε ότι $f^{2}(x)-g^{2}(x)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
γ) Να αποδείξετε ότι $g(\alpha-\beta)=g(\alpha)f(\beta)-g(\beta)f(\alpha)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.
δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)+2g(x)=1$.

115. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log x^{2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
β) Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.
γ) Να κάνετε τη γραφική της παράσταση.
δ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=f(x+2)$ με την ευθεία $y=2\log 4$.

116. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\log(3x-14)}{\log(x-4)}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $y=2$.
γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y=1$.

117. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left|\ln(x-2)\right|$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
β) Να απαλλάξετε τον τύπο της f από την απόλυτη τιμή.
γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
δ) Να λύσετε την εξίσωση $\ln^2(x-2)-f(x)-2=0$.

118. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log\left|\log(x-4)\right|$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα χ΄χ.
γ) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες $f(x)<0$.

119. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(\lambda^2-4\lambda+4\right)^x$

α) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η f είναι γνησίως αύξουσα.
β) Να βρείτε το λ ώστε η γραφική της παράσταση να διέρχεται από το σημείο $A(1,9)$.
γ) Αν $\lambda\in(2,3)$, να λύσετε την ανίσωση $f\left(x^2\right)>f(5x-6)$.
δ) Αν $\lambda=4$, να λύσετε την ανίσωση $2f(x)+3\cdot 9^x-5\cdot 6^x\le 0$.

120. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln x+1}{\ln x-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x.
γ) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{1}{f\left(\dfrac{1}{x}\right)}$ για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{1}{e}\right)\cup\left(\dfrac{1}{e},e\right)\cup(e,+\infty)$.

Επανάληψη

1. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} x+y=2\mu \\ (\mu+1)x+(\mu-1)y=2(\mu^2-1) \end{cases}$,όπου $\mu \in \mathbb{R}^*$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$ το σύστημα έχει μοναδική λύση .

β) Να βρείτε τη μοναδική λύση (x_0, y_0).

γ) Να προσδιορίσετε το $\mu \in \mathbb{R}$, ώστε η παράσταση $\Pi = 2x_0 + y_0{}^2$ να γίνει ελάχιστη.

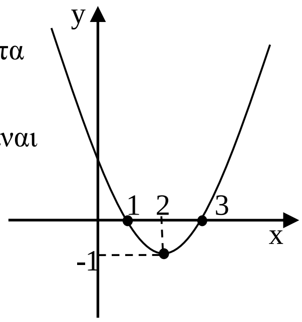
2. **α)** Να αποδείξετε ότι η παραβολή του διπλανού σχήματος είναι η $f(x)=x^2-4x+3$.

β) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση $g(x)=f(x)+2x$.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=f(x)+4x$ είναι άρτια.

δ) Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

i. $h^2(x)-3h(-x)=4$ **ii.** $\sqrt{h(x)}=x+1$



3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\beta x}{2}\right)$ όπου β <0 και $\alpha \in \mathbb{R}$. Αν γνωρίζετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $A(0, \beta+5)$, και B $\left(\frac{4\pi}{\beta}, 4\beta^2\right)$ τότε:

α) Να αποδείξετε ότι α = 4 και β = - 1.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία $y=4$.

γ) Να βρείτε τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f καθώς και την περίοδό της.

δ) Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων $A = f(4\pi) - f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ και

$$B = 3f(0)\frac{f(0)^{2010}-1}{f(0)-1}+4.$$

4. Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} \eta\mu(\pi-\theta)\cdot x-\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2}-\omega\right)\cdot y=1 \\ -3\eta\mu(\pi+\theta)\cdot x+2\sigma\upsilon\nu(-\omega)\cdot y=8 \end{cases}$, $\theta,\omega\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση, την οποία και να βρείτε.

β) Να βρείτε τα θ,ω για τα οποία το ζεύγος $\left(4,\sqrt{2}\right)$ είναι λύση του συστήματος.

5. **α)** Δείξτε ότι $A(x)=\dfrac{2}{\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)+\varepsilon\varphi(\pi+x)}=\eta\mu 2x$

β) Δείξτε ότι η $B(x)=\dfrac{(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)^2-\eta\mu 2x}{2}=\dfrac{1}{2}$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $A(x)=B(x)$

δ) Έστω η συνάρτηση $f(x)=A(x)-B(x)$. Βρείτε τη μέγιστη τιμή Μ, την ελάχιστη τιμή ε και την περίοδο της συνάρτησης $f(x)$.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha\eta\mu\left(\dfrac{3\pi}{2}+\beta x\right)$ όπου $\alpha\in\mathbb{R}$ και $0<\beta\le 1$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία Α(0,-2), Β(π,-1).

α) Να βρείτε τις τιμές των α και β.

Αν $f(x)=-2\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{x}{3}\right)$

β) i. Να βρείτε τη μέγιστη, την ελάχιστη τιμή της f και την περίοδό της.

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο διάστημα [0,6π] και να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία στο ίδιο διάστημα.

γ) Δίνεται το γραμμικό σύστημα: $(\Sigma)\ \begin{cases} \lambda f(0)x+f(2014\pi)y=4\lambda \\ \lambda f(-\pi)x+\lambda f(2\pi)y=0 \end{cases}$. Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου λ $(\lambda\in\mathbb{R})$ ώστε το παραπάνω σύστημα να έχει άπειρες λύσεις καθώς και τη μορφή των απείρων λύσεων.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\sigma\upsilon\nu 2x-1$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρεθεί η μέγιστη τιμή, η ελάχιστη τιμή και η περίοδος της συνάρτησης f(x).

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα x'x στο [0, 2π].

γ) Να βρεθεί η τιμή της παράστασης $K=\dfrac{f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)f\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)+f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)}{1-f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)}$.

8. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f\left(x\right)=x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$, για την οποία ισχύουν:

- Το υπόλοιπο της διαίρεσης της f(x) δια x +2 είναι 24**.**
- Η C_f διέρχεται από το σημείο Α(0,8).
- Η f (x) έχει παράγοντα το x - 1.

α) Να δείξετε ότι: α = 1, β = -10 και γ = 8.

β) i. Να λυθεί η εξίσωση f(x) = 0.

ii. Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η C_f είναι κάτω από τον άξονα x'x.

γ) Να λύσετε την ανίσωση: $\dfrac{x+4}{f\left(x\right)}\leq\dfrac{2}{f\left(x\right)+f\left(-x\right)-18}$.

9. Έστω $P\left(x\right)=x^3+2\alpha x^2-\alpha^2x+2$ πολυώνυμο, $\alpha\in\mathbb{R}$. Αν το πολυώνυμο P(x) διαιρεθεί με το x -1, δίνει υπόλοιπο 3α +1.

α) Να βρείτε τις τιμές του αριθμού α.

β) Για α = 1 και πολυώνυμο $Q(x) = x^2 + x + 1$:

i) Να αποδείξετε ότι το πηλίκο π(x) και το υπόλοιπο υ(x) της Ευκλείδειας διαίρεσης του P(x) με το Q(x) είναι x + 1 και -3x +1 αντίστοιχα.

ii) Να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{P\left(x\right)+x-2}{Q\left(x\right)}\geq 1$

iii) Να λύσετε την εξίσωση $\pi\left(x\right)=\sqrt{Q\left(x\right)}$.

10. Δίνεται το πολυώνυμο $\mathrm{P}\left(\mathrm{x}\right)=4\mathrm{x}^3-3\eta\mu\omega\cdot\mathrm{x}^2-\sigma\upsilon\nu^2\omega\cdot\mathrm{x}+2$.

α) Να βρείτε το ω για το οποίο το υπόλοιπο της διαίρεσης του $\mathrm{P}\left(\mathrm{x}\right)$ με το $\mathrm{x}-\eta\mu\omega$ να είναι ίσο με 2.

β) Αν $\omega=\dfrac{\pi}{4}$, να λύσετε την εξίσωση $\mathrm{P}\left(\mathrm{x}\right)=\left(2\eta\mu\omega\right)^2$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $6\eta\mu\omega+2\mathrm{P}\left(1\right)-11=0$.

11. Δίνεται το πολυώνυμο $\mathrm{f}\left(\mathrm{x}\right)=2\mathrm{x}^3-5\mathrm{x}^2+\alpha\mathrm{x}+\beta,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$, το οποίο έχει παράγοντα το $\left(\mathrm{x}-1\right)^2$.

α) Χωρίς να υπολογίσετε τα α,β, να αποδείξετε ότι $\left|\alpha\right|+\left|\beta\right|\geq 3$.

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha=4$ και $\beta=-1$.

γ) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $2\eta\mu^3\mathrm{x}-5\eta\mu^2\mathrm{x}+4\eta\mu\mathrm{x}=1$.

ε) Δίνεται το σύστημα $\begin{cases}\lambda\mathrm{x}-\mathrm{f}\left(0\right)\mathrm{y}=\sqrt{2}\\ \mathrm{x}+\lambda\mathrm{y}=\sqrt{2}+\mathrm{f}\left(1\right)\end{cases}$.

i. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το σύστημα έχει μοναδική λύση

(x_0, y_0).

ii. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες υπάρχει $\theta \in \mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει: $ημθ = x_0$ και $συνθ = y_0$.

12.Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

β) Να λύσετε τις τριγωνομετρικές εξισώσεις $ημx = α$, $συνx = β$ όπου α η διπλή ρίζα της παραπάνω εξίσωσης και β η άλλη ρίζα της ίδιας εξίσωσης.

γ) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ έτσι, ώστε η γραφική παράσταση της f, να μην είναι πάνω από τον άξονα x΄x.

δ) Να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης $f(-x) : (x^2 + 1)$.

13.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = αx^3 + βx^2 + αx - α - 1$ που έχει παράγοντα το $x + 1$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του με το $x - 1$ είναι 8.

α) Να αποδείξετε ότι $α = 2$ και $β = 7$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$.

γ) Αν $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, να λύσετε την εξίσωση $2ημ^3ω + 7ημ^2ω + 2ημω - 3 = 0$.

14.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (1 + ημφ)x^2 - (1 + ημ^2φ)x - (1 - ημφ)ημφ$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $φ \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το πολυώνυμο είναι 1ου βαθμού.

β) Αν το $P(x)$ είναι 2ου βαθμού και x_1, x_2 είναι ρίζες του, να αποδείξετε ότι: $x_1 + x_2 + x_1x_2 = 1$.

γ) Αν $Q(x) = ημφ \cdot x^3 + αx^2 + βx$, να βρείτε τα $α, β, φ$ για τα οποία τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα.

15.Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} (k+1)x - 2y = k + 1 \\ kx - ky = 1 \end{cases}$,όπου k πραγματικός αριθμός

α) Να βρείτε το k ώστε το σύστημα να έχει μοναδική λύση.

β) Να βρείτε τη μοναδική λύση (x_0, y_0) για τις παραπάνω τιμές του k.

γ) Αν $k = 1$,

i. να λύσετε την εξίσωση $ημ^2θ + y_0ημθ - x_0 = 0$.

ii. να λύσετε την ανίσωση $21 \cdot 3^{-x_0 t} + x_0 \cdot 5^{t+3} = 3^{t+4} + 5^{t+y_0}$.

16. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3-7x^2+\alpha x+\beta$ το οποίο έχει παράγοντα το $x-1$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του με το $x+1$ είναι -18.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=7$ και $\beta=-2$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $2\eta\mu^3 2x-7\eta\mu^2 2x+7\eta\mu 2x-2=0$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $2\cdot 8^x-7\cdot 4^x+7\cdot 2^x-2>0$.

17. Δίνεται το πολυώνυμο $f(x)=x^4+5^{2\lambda-1}x^3-2\cdot 3^{\lambda+\frac{1}{2}}x^2+25^{\lambda}x-1$, $\lambda\in\mathbb{R}$

α) Αν το (x – 1) είναι παράγοντας του $f(x)$, να βρείτε το λ.

β) Για $\lambda=\dfrac{1}{2}$

i. να δείξετε ότι το $(x-1)^2$ είναι παράγοντας του $f(x)$.

ii. να βρείτε τα διαστήματα, στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x.

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(2\eta\mu\omega)^x$, $\omega\in(0,2\pi)$. Να βρείτε τις τιμές του ω για τις οποίες η f είναι:

α) σταθερή στο $\mathbb{R}$

β) γνησίως αύξουσα

γ) γνησίως φθίνουσα

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(2)+f(1)=6$.

19. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} \eta\mu(\pi+\theta)x+\sigma\upsilon\nu(-\theta)y=1 \\ \eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)x+\sigma\upsilon\nu(\theta-\pi)y=1 \end{cases}$, $\theta\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση την $(x,y)=(\sigma\upsilon\nu\theta-\eta\mu\theta,\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta)$, $\theta\in\mathbb{R}$.

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(10^{\alpha}-3)\sigma\upsilon\nu x-4$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

i) Να βρείτε την τιμή του α για την οποία η συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή το 3.

ii) Για α = 1, να βρείτε τις τιμές του $\theta\in\mathbb{R}$ για τις οποίες $xy=f(\theta)$ όπου (x, y) είναι η μοναδική λύση του συστήματος.

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{9^x+3^x-12}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να λύσετε την εξίσωση $\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x=f(1)$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $x^3-7x+6>f(1)$.

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=1-x-\ln x$, $x>0$

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο $A(1,0)$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $f\left(e^x\right) > 1 - e^{2x-5} - x$.

γ) Αν $0 < x < 1$ να αποδείξετε ότι $f\left(x\right) > 0$.

δ) Να δείξετε ότι για κάθε $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει ότι $\text{συν}\theta < \ln\left(\frac{e}{\text{συν}\theta}\right)$.

22. Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right) = \ln\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + k$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Αν $f\left(\frac{\pi}{6}\right) - \ln\pi = \ln\frac{e}{2}$, να βρείτε το k.

γ) Αν $k = 1$, τότε:

i. να λύσετε στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ την εξίσωση:

$$\ln\left(\text{ημ}x\right) + f\left(\pi\right) - 2\ln 2 = f\left(\frac{\pi}{6}\right) - \ln 3.$$

ii. να λύσετε την εξίσωση $\text{συν}\left(e^{f(x)-1}\right) = \text{ημ}\left(e^{f(x+\pi)-1}\right)$.

23. Δίνεται το πολυώνυμο $P\left(x\right) = x^3 + 3x^2 + \left(\log k - 4\right)x - \log k$, $k > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι το $x - 1$ είναι παράγοντας του $P\left(x\right)$.

β) Να βρείτε τις τιμές του k, για τις οποίες το πολυώνυμο $P\left(x\right)$ έχει τρεις πραγματικές ρίζες.

γ) Για $k = 1000$ να λύσετε:

i. την ανίσωση $P\left(e^x\right) < 0$ **ii.** την εξίσωση $P\left(\text{ημ}x\right) = -\text{συν}^2 x$

24. Δίνεται το πολυώνυμο $P\left(x\right) = x^3 + \alpha x^2 - x - 4\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P\left(x\right)$ με το $\left(x^2 - x\right)$ είναι $2x + 4$ τότε :

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$ και $\beta = -1$.

β) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P\left(x\right)$ με το $x + 1$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $P\left(10^{-x}\right) > 10^{-2x} + 5$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $\log\left(x - \frac{1}{2}P\left(1\right)\right) - \log x = \log\frac{3}{P\left(0\right)}$.

25. Θεωρούμε το πολυώνυμο $P\left(x\right) = x^3 - \alpha x + 2\alpha - 4\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

α) Αν έχει παράγοντα το $\left(x - 1\right)^2$, να βρείτε τα α και β.

Αν $\alpha = 3$ και $\beta = 1$, τότε:

β) να λύσετε την ανίσωση $P(x)>0$

γ) να λύσετε την εξίσωση $P(\sigma\upsilon\nu x)=0$

δ) να αποδείξετε ότι $10^{2-\frac{1}{2}\log(3P(2)+2P(0))}=25$

26. Έστω D, D_x, D_y οι ορίζουσες ενός συστήματος 2x2 που έχει μοναδική λύση. Αν $D_x-D_y=4D$ και $D_x+D_y=2D$, να αποδείξετε ότι :

α) το σύστημα έχει μοναδική λύση $(x_0,y_0)=(3,-1)$.

β) υπάρχει $\theta\in\mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει: $\eta\mu\theta=\frac{x_0-y_0}{5}$, $\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{x_0}{5}$.

γ) $\log 32-\log(x_0-y_0)-x_0\log 2=0$.

27. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log(\log x)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της. **β)** Να λύσετε την ανίσωση $f(x)<1$.

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\left[f(\lambda)\right]^x$ για την οποία γνωρίζουμε ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

i. Να βρείτε τις δυνατές τιμές του λ.

ii. Να λύσετε την ανίσωση $g(x^3+4x)>g(x-4)$

28. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της. **β)** Να αποδείξετε ότι είναι περιττή.

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

29. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^4+\alpha x^3+2x^2+\alpha x+\beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ και η συνάρτηση $f(x)=\log P(x)$. Αν το $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x-1)^2$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=-2$ και $\beta=1$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(2\sigma\upsilon\nu x)=0$.

γ) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

δ) Να αποδείξετε ότι $f(7)-f(2)=f(3)+\log 9$.

30. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+\ln(e^x-3)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(1821)$ και $f(2015)$.

δ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f και της ευθείας $y=\ln 10$.

ε) Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu^2 x+\ln\left(e^{\eta\mu^2 x+3}-3\right)=1+\ln\left(e^4-3\right)$

31. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(\dfrac{\ln\alpha-\ln 3}{\ln\beta-\ln\alpha}\right)^{x}$ με $3<\alpha<\beta$ η οποία είναι γνησίως φθίνουσα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.

α) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\ln\alpha$ και $\ln\beta$.

β) Να αποδείξετε ότι: $\alpha^2<3\beta$.

γ) Αν $\alpha=6$ και $\beta=24$ τότε:

i. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}$

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$ ισχύει η ανισότητα:

$2\cdot f\left(\dfrac{\kappa+\lambda}{2}\right)\le f(\kappa)+f(\lambda)$

iii. Να λυθεί η εξίσωση $f\left(-\eta\mu^2 x\right)+f\left(-\sigma\upsilon\nu^2 x\right)=3$.

32. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+6$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τις τιμές των α και β ώστε το πολυώνυμο P(x) να έχει παράγοντα το x +1 και η αριθμητική τιμή του για x = 2 να είναι ίση με 12.

β) Για α=-2 και β=3

i. Να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) με το x - 2 .

ii. Να λύσετε την ανίσωση $P(x)\le -x+14$.

iii. Να λύσετε την ανίσωση $P(\ln x)\le -\ln x+14$.

33. Έστω x, y θετικοί αριθμοί, με $x\neq 1$.

α) Δείξτε ότι ισχύει: $\ln y\cdot\log x=\log y\cdot\ln x$

β) Αν ισχύει η ισότητα $\left(\dfrac{\ln y}{\ln x}\right)^2-4\dfrac{\log y}{\log x}+4=0$ βρείτε ποια σχέση συνδέει τους αριθμούς x, y.

γ) Αν είναι $y = x^2$ και το y είναι λύση της εξίσωσης $e^{2y^2-3y+1}=(2004)^0$, να βρείτε τους αριθμούς x, y.

δ) Αν για το πολυώνυμο $P(x)=x^2-4x+4$ ισχύει $P(\ln x)\le 1$, να δείξετε ότι $y\in\left[e^2,e^6\right]$.

34. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x+\alpha-\beta)$,όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Α. Αν $\ln 6+f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)-\ln 5=\ln\pi$,τότε:

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{3}$. **β)** Να λύσετε την εξίσωση

$$ημ\left(e^{f(x)}\right)συν\left(e^{f(x)}\right)=\frac{1}{2}.$$

Β. Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξοναx'x στοσημείοΑ(1,0), τότε:

α) Να αποδείξετε ότι: $α-β=0$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $16\cdot 2^{f(x)}<2^{\ln\left(2e^4\right)}$

35.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2\ln x+1}{2\ln x-1}$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και το σημείο τομής της γραφικής της παράστασης με τον άξονα x'x.

β) Να δείξετε ότι $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{f(x)}$ για κάθε $x>0$ και $x\neq e^{\frac{1}{2}}, x\neq e^{-\frac{1}{2}}$.

γ) Να λυθεί η εξίσωση $f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=3$ για κάθε $x>0$ και $x\neq e^{\frac{1}{2}}, x\neq e^{-\frac{1}{2}}$.

δ) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$A=\ln f\left(e^{1000}\right)+\ln f\left(e^{1001}\right)+\ln f\left(e^{1002}\right)+\ln f\left(e^{1003}\right)+\ln f\left(e^{1004}\right)$.

36.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(\dfrac{4-x}{4+x}\right)$.

α) Να ορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι γραφική της παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β) Να υπολογίσετε τη τιμή της παράστασης

$A=f(-3)+f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)+f(3)$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)-f(-x)<-2\ln 3$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $e^{2f(x)}+3=4e^{f(x)}$.

37.Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x)=\dfrac{\ln x}{\ln 2}$ και $f(x)=\dfrac{1}{\ln\left(2^x-3\right)}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g και να συγκρίνετε τους αριθμούς $g(3)$, 2.

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

γ) Αν $κ>4$ να λύσετε την ανίσωση $f\left(\log_2 κ\right)<\dfrac{1}{2}$.

δ) Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης $\left(-x^3-7x^2+6\right):(x+1)$ είναι το πολυώνυμο

$υ(x)=\left(f(β)-1\right)x+g(α)+g\left(α^2\right)+g\left(α^3\right)+...+g\left(α^{20}\right)-\dfrac{210}{\ln 2}$ να δείξετε ότι

$α+3=e^{β\ln 2}$ όπου α ανήκει στο πεδίο ορισμού της g και β ανήκει στο πεδίο ορισμού της f.

38. Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=\dfrac{\left[\ln\left(e^x-e^2\right)\right]^2-3}{\ln\left(e^x-e^2\right)-2}$.

α) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\ln\left(2e^2\right)$, $\ln\left(e^3+e^2\right)$, 2 και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{y^2-3}{y-2}\geq 6$

γ) Έστω $x_0=\ln\left(e^3+e^2\right)$:

i) Να αποδείξετε ότι $f\left(x_0\right)=6$.

ii) Να αποδείξετε ότι $f\left(x\right)\geq f\left(x_0\right)$ για κάθε $x\in\left(\ln\left(2e^2\right),+\infty\right)$. Είναι το ελάχιστο της συνάρτησης;

39. Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=\ln\left(\dfrac{4-2^x}{4\cdot 2^x-1}\right)$.

α) Να αποδείξετε ορισμού της f είναι το διάστημα Α = (-2,2).
β) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.
γ) Να βρείτε (αν υπάρχει) την τετμημένη του σημείου τομής της γραφικής παράστασης της f με γραφική παράσταση της συνάρτησης $h\left(x\right)=x\ln 2-\ln 3$.

δ) Να λύσετε την ανίσωση $-\ln^2\left(e^2\right)\cdot f\left(x\right)>4f\left(-x\right)+\ln^2|x|-\ln x^2-3$.

40. Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=2\eta\mu 2x+1$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη περίοδο την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση σε διάστημα μιας περιόδου.
β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(x\right)=f\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

δ) Να αποδείξετε ότι $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\log 2+\log\left(f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\right)+3\log\left(f\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)\right)=\log 128$.

ε) Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ για τα οποία το πολυώνυμο $P\left(x\right)=x^3-6x^2+\alpha x+\beta$ έχει παράγοντες τα $\left(x-f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$ και $\left(x-f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\right)$

41. Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=\dfrac{2\sigma\upsilon\nu^2 2x-1}{2\eta\mu^2 x-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
β) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(x\right)=0$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $\log\left(x-f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)+\log\left(x+f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=\log 3$.

42. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=2^x-\left(\frac{1}{2}\right)^x$ με $x\in\mathbb{R}$ και

$h(x)=\ln\frac{3}{x}+\ln\left(1-\frac{1}{x+1}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{x+2}\right)+\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)$ με x > 0.

α) Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\ln\left(f(\ln x)\right)$.

i. Να υπολογίσετε το $f(\ln x)$.

ii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x)=\ln\left(f(\ln x)\right)$.

β) Να δείξετε ότι $h(x)=\ln\frac{3}{2}$

γ) Να λύσετε την εξίσωση g(x) = h(x) με x >1.

δ) Να βρείτε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$ ώστε να υπάρχει $\theta\in\mathbb{R}$ και να ισχύει

$$\eta\mu\theta=\frac{f(1)\ln^2 x-2f(2)\ln x}{6f(1)}.$$

43. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log x-\left(\log\sqrt{x}\right)^2$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα χ΄χ.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(\eta\mu x)=0$.

δ) Αν για τους θετικούς αριθμούς α,β με $\alpha\neq\beta$ ισχύει ότι $f(\alpha)=f(\beta)$, να αποδείξετε ότι $\alpha\beta=10.000$.

44. Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=\ln\left(\frac{e^{2x}-(e+1)e^x+e}{e^{x+1}-e}\right)$ και $g(x)=e^{2x-1}-4e^{x-1}+3$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να απλοποιηθεί ο τύπος της.

β) Να λυθεί η εξίσωση $g(x)=e^{\ln\frac{5+3e}{e}}$

γ) Βρείτε τις τιμές του x ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$ να μην είναι πάνω από τον άξονα x΄x.

δ) Να λύσετε την ανίσωση $e^{f(x)}\geq g(x)+\frac{6-4e}{e}$.

45. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln\frac{x^2+68}{100-x^2}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της

β) Να λύσετε την εξίσωση $e^{f(x)}=\log 50-\log 5$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \geq 0$.

46. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{4}x^2-2\ln a\cdot x+4\ln a-1 \quad , \quad a>0.$

α) Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός α ώστε η εξίσωση f(x)=0 να έχει διπλή ρίζα.

β) Να λυθεί η εξίσωση $f(0)=\ln^2 a-2\ln a+4$.

γ) Να λυθεί η ανίσωση $a+\dfrac{f(-2)}{8}>\ln(e^{2a}\cdot a-2a)$.

47. Δίνεται η συνάρτηση: $f\left(x\right)=\dfrac{e^{2x}\cdot\ln x-\ln x-e^{2x}+1}{e^x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να δείξετε ότι :

$$f\left(x\right)=\frac{\left(\ln x-1\right)\left(e^{2x}-1\right)}{e^x}.$$

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα χ΄χ.

Επιπλέον δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{\left(e^x+1\right)\left(e^x-1\right)}{e^x}$.

γ) Να βρείτε διαστήματα του x για τα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της g

δ) Να λυθεί η εξίσωση $f(x)\cdot\left(2\sigma\upsilon\nu^2 x+5\eta\mu x-3\right) = g(x)\cdot\left(\ln x-1\right)$

48. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο : $f\left(x\right)=\ln\dfrac{e^{2x}-e^2}{e^{2x}+e^{x+1}-e^x-e}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $e^{2x}+e^{x+1}-e^x-e=0$.

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

γ) Να δείξετε ότι $f\left(x\right)=\ln\dfrac{e^x-e}{e^x-1}$.

δ) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=3x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

49. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο : $f\left(x\right)=\sqrt{\left(e^x-1\right)\cdot\ln x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $\mathrm{A}\left(e,\sqrt{e^e-1}\right)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τη γραφική παράσταση της $g\left(x\right)=\sqrt{e^x-1}\cdot\ln x$.

δ) Να βρείτε τα διαστήματα του x στα οποία η γραφική παράσταση της f δεν βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $h\left(x\right)=\sqrt{\ln x}\cdot\left(e^x-1\right)$.

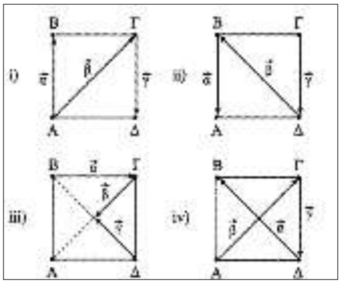
14ο Λύκειο Περιστερίου

Μαθηματικά Κατεύθυνσης Β΄ Λυκείου

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

1. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Σε καθένα από τα διπλανά σχήματα να βρείτε το άθροισμα $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}$



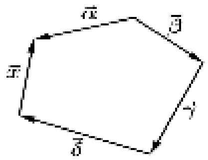
2. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Να βρείτε τα παρακάτω αθροίσματα :

α) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta}$ **β)** $\overrightarrow{\Delta A}-\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ **γ)** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ **δ)** $\overrightarrow{\Gamma B}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}+\overrightarrow{A\Gamma}$

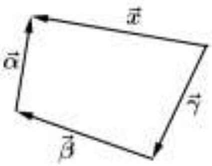
3. Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Κ,Λ,Μ,Ν τυχαία σημεία. Να γράψετε ως ένα διάνυσμα τα αθροίσματα:

α) $\overrightarrow{\Delta K}-\overrightarrow{\Gamma\Lambda}-\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{\Delta\Lambda}$ **β)** $\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{\Gamma M}-\overrightarrow{\Lambda K}-\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{\Lambda B}-\overrightarrow{\Delta N}$

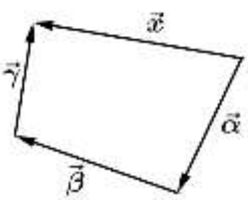
4. Να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{x}$ του διπλανού σχήματος ως συνάρτηση των διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma},\vec{\delta}$

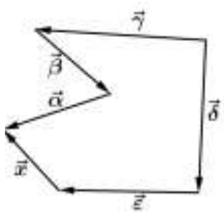


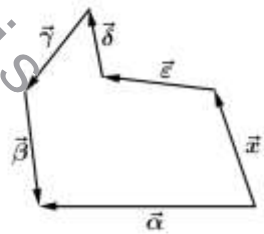
5. Να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{x}$ του διπλανού σχήματος ως συνάρτηση των διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$



6. Να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{x}$ του διπλανού σχήματος ως συνάρτηση των άλλων διανυσμάτων που δίνονται :







7. Αν ισχύει $\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{NM}$,να αποδείξετε ότι τα σημεία Α και Β ταυτίζονται.

8. Αν ισχύει $\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{\Gamma A}-\overrightarrow{\Delta E}$,να αποδείξετε ότι τα σημεία Α και Β ταυτίζονται.

9. Αν ισχύει $\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{\Gamma M}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{\Gamma N}$,να αποδείξετε ότι το Γ είναι μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.

10. Αν ισχύει $\overrightarrow{A\Delta}-\overrightarrow{Z\Gamma}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{B\Delta}-\overrightarrow{ZE}$,να αποδείξετε ότι το Β είναι μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΓ.

11. Έστω ότι για τα μη συνευθειακά σημεία Α,Β,Γ,Δ ισχύει $\overrightarrow{K\Delta}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{K\Gamma}$.Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

ΜΕΤΡΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

12. Αν ισχύουν $|\vec{\alpha}|=2$ και $|\vec{\beta}|=5$,να αποδείξετε ότι $3\leq|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|\leq 7$.

13. Αν ισχύουν $|\vec{\alpha}|=3, |\vec{\beta}|=2$ και $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|\geq 5$,να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ομόρροπα.

14. Δίνονται τα ομόρροπα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν $|\vec{\alpha}|=1, |\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=4$ και $|\vec{\beta}+\vec{\gamma}|=8$. Να βρείτε :

α) το $|\vec{\beta}|$ **β)** το $|\vec{\gamma}|$ **γ)** το $|\vec{\alpha}+\vec{\gamma}|$

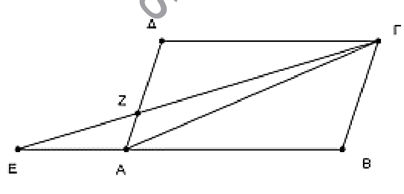
15. Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$,με $|\vec{\alpha}|=2$ και $|\vec{\beta}|=3$.Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε διάνυσμα $\vec{\gamma}$ ισχύει ότι : $|\vec{\alpha}+\vec{\gamma}|+|\vec{\beta}-\vec{\gamma}|\geq 5$.

16. Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύει ότι $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$ και $\dfrac{|\vec{\alpha}|}{5}=\dfrac{|\vec{\beta}|}{3}=\dfrac{|\vec{\gamma}|}{2}$, να αποδειχτεί ότι : **α)** $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$ **β)** $\vec{\beta}\uparrow\uparrow\vec{\gamma}$

17. Αν ισχύουν $|\vec{\alpha}|=4, |\vec{\gamma}|=3$ και $2\vec{\alpha}+\vec{\beta}+5\vec{\gamma}=0$, να αποδείξετε ότι $7\leq|\vec{\beta}|\leq 23$.

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

18. Θεωρούμε το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και έστω $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A\Delta}=\vec{\beta}$.Τα σημεία Ε και Ζ είναι τέτοια ώστε $\overrightarrow{AE}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AZ}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{A\Delta}$.



α) Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{EZ}=\dfrac{1}{2}\vec{\alpha}+\dfrac{1}{3}\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{Z\Gamma}=\vec{\alpha}+\dfrac{2}{3}\vec{\beta}$.

β) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{Z\Gamma}=2\overrightarrow{EZ}$.

γ) Να δείξετε ότι τα σημεία Ζ, Ε και Γ είναι συνευθειακά.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑ

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

19. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε σημεία Α,Β,Γ,Δ ισχύει ότι :
$4\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{A\Gamma}=4\overrightarrow{\Delta B}+3\overrightarrow{\Delta\Gamma}-7\overrightarrow{\Delta A}$

20. Έστω Α,Β,Γ,Δ σημεία μη συνευθειακά για τα οποία ισχύει ότι
$5\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{\Gamma\Delta}-3\overrightarrow{B\Delta}$.Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

21. Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Κτο κέντρο του. Αν Μ είναι το μέσο του ΚΓ, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta}=4\overrightarrow{AM}-2\overrightarrow{A\Gamma}$

22. Αν ισχύει $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{B\Gamma}$, να αποδείξετε ότι $3\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{O\Gamma}$.

23. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και το σημείο Μ για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{M\Gamma}=-2\overrightarrow{MB}$. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Delta}=2\overrightarrow{BA}$.

24. Έστω Α, Β δύο διαφορετικά σημεία. Να βρεθεί η τιμή του x για την οποία ισχύουν $\overrightarrow{A\Gamma}=x\overrightarrow{BA}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}=3\overrightarrow{AB}$.

25. Θεωρούμε τα διαφορετικά σημεία Α και Β, καθώς και σημείο Γ ,για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{A\Gamma}=3\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}=\lambda\overrightarrow{AB}$.Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in R$.

26. Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Να βρείτε σημείο Ρ τέτοιο, ώστε
$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{P\Gamma}=\overrightarrow{P\Delta}$.

27. Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Να βρείτε σημείο Ρ της πλευράς ΒΓ τέτοιο, ώστε ΡΓ=2ΡΒ .Να αποδείξετε ότι : $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{P\Delta}=2\overrightarrow{BA}$

28. Θεωρούμε σημεία Α,Β,Γ για τα οποία ισχύει $3\overrightarrow{AB}=5\overrightarrow{B\Gamma}$.

α) Να αποδείξετε ότι $8\overrightarrow{AB}=5\overrightarrow{A\Gamma}$

β) Αν $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ είναι οι διανυσματικές ακτίνες των σημείων Α,Β,Γ αντίστοιχα ως προς σημείο Ο, να εκφράσετε το $\vec{\beta}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$.

29. Έστω Α,Β,Γ,Δ σημεία μη συνευθειακά ανά τρία για τα οποία ισχύει ότι
$2\overrightarrow{A\Gamma}-6\overrightarrow{AB}-5\overrightarrow{B\Delta}=\overrightarrow{\Delta\Gamma}-3\overrightarrow{A\Delta}$

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Να βρείτε σημείο Μ, ώστε να ισχύει ότι : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Gamma}=3\overrightarrow{M\Delta}$

30. Έστω τα σημεία Α, Β, Γ και Δ με $Β \neq Γ$. Αν ισχύει $\overrightarrow{ΑΔ} = κ\overrightarrow{ΒΓ}, κ \in R$, να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει $\overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΓΔ} = x\overrightarrow{ΒΓ}$.

<u>ΠΑΡΑΛΛΗΛΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ</u>

31. Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $4\vec{α} + 6\vec{β} - 20\vec{γ}$ και $15\vec{γ} - 3\vec{α} - \frac{9}{2}\vec{β}$ είναι συγγραμμικά.

32. Αν ισχύει $2\overrightarrow{ΑΛ} + 3\overrightarrow{ΒΛ} + 2\overrightarrow{ΜΒ} = \overrightarrow{ΑΚ} + \overrightarrow{ΑΜ} + \overrightarrow{ΒΚ}$, να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{ΚΛ}$ και $\overrightarrow{ΜΛ}$ είναι αντίρροπα

33. Αν ισχύει ότι: $3\overrightarrow{ΒΔ} - \overrightarrow{ΓΑ} = 3\overrightarrow{ΒΓ} - \overrightarrow{ΔΒ}$, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{ΑΒ} \uparrow\downarrow \overrightarrow{ΓΔ}$.

34. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ .Να αποδείξετε ότι:

α) το διάνυσμα $\vec{v} = 4\overrightarrow{ΑΓ} - 2\overrightarrow{ΑΒ} - 2\overrightarrow{ΑΔ} + \overrightarrow{ΒΔ} + \overrightarrow{ΓΔ}$ είναι ομόρροπο με το $\overrightarrow{ΒΓ}$

β) το διάνυσμα $\vec{w} = 2\overrightarrow{ΓΒ} - 3\overrightarrow{ΑΒ} + 3\overrightarrow{ΔΓ} - \overrightarrow{ΑΓ} - \overrightarrow{ΒΔ}$ είναι αντίρροπο με το $\overrightarrow{ΑΔ}$

35. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = 4\vec{α} - 3\vec{β}$ και $\vec{v} = 2\vec{α} + \vec{β}$.Να αποδείξετε ότι :

α) το διάνυσμα $\vec{γ} = \vec{u} + 3\vec{v}$ είναι ομόρροπο με το $\vec{α}$

β) το διάνυσμα $\vec{δ} = \vec{u} - 2\vec{v}$ είναι αντίρροπο με το $\vec{α}$

36. Σ ’ ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχουμε $\overrightarrow{ΑΒ} = \vec{α} + 2\vec{β}, \overrightarrow{ΒΓ} = -4\vec{α} - \vec{β}$ και $\overrightarrow{ΓΔ} = -5\vec{α} - 3\vec{β}$.Να αποδείξετε ότι το ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο.

37. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε του επιπέδου του τέτοια ώστε :
$\overrightarrow{ΑΔ} = 5\overrightarrow{AB} + 8\overrightarrow{ΑΓ}$ και $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB} + 10\overrightarrow{ΑΓ}$. Να αποδειχθεί ότι : $\overrightarrow{ΔΕ} // \overrightarrow{ΒΓ}$.

<u>ΣΥΝΕΥΘΕΙΑΚΑ ΣΗΜΕΙΑ</u>

38. Αν ισχύει $4\overrightarrow{ΜΑ} + 5\overrightarrow{ΜΒ} - 9\overrightarrow{ΜΓ} = \vec{0}$,να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά.

39. Δίνονται σημεία Α,Β,Γ,Δ,Ε για τα οποία ισχύει ότι :
$5\overrightarrow{ΑΔ} - 3\overrightarrow{ΑΕ} - 4\overrightarrow{ΔΓ} = 4\overrightarrow{ΕΒ} - \overrightarrow{ΕΓ} + 9\overrightarrow{ΒΔ}$.Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β,Γ είναι συνευθειακά.

40. Θεωρούμε σημεία Ο,Α,Β,Γ για τα οποία ισχύει ότι : $\overrightarrow{ΟΑ} = 4\vec{α}$, $\overrightarrow{ΟΒ} = 2\vec{β}$ και $\overrightarrow{ΟΓ} = -2\vec{α} + 3\vec{β}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά.

41. Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$, $\overrightarrow{OB} = 5\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} + 4\vec{\gamma}$ και $\overrightarrow{O\Gamma} = 13\vec{\alpha} + 7\vec{\beta} + 10\vec{\gamma}$.Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά.

42. Αν ισχύει $(\kappa + 2)\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} = (\kappa + 5)\ \overrightarrow{P\Gamma}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά.

43. Να αποδείξετε ότι αν: $(\alpha + 4)\overrightarrow{KA} + 5\overrightarrow{KB} = (\alpha + 9)\overrightarrow{K\Gamma}$, όπου $\alpha \in R$, τότε τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

44. Αν ισχύει $\overrightarrow{AB} = \dfrac{\overrightarrow{A\Gamma} + \lambda\overrightarrow{A\Delta}}{1 + \lambda}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία Β, Γ και Δ είναι συνευθειακά.

<u>ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΚΤΙΝΑ ΜΕΣΟΥ</u>

45. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με διαμέσους ΑΜ,ΒΝ και ΓΚ .Αν $\overrightarrow{AB} = \vec{\gamma}$, $\overrightarrow{B\Gamma} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{\Gamma A} = \vec{\beta}$,να υπολογίσετε τα αθροίσματα :

α) $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$ **β)** $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{\Gamma K}$

46. Έστω Α, Β, Γ, Δ σημεία ενός επιπέδου και Μ, Ν τα μέσα των ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα.

α) Να εκφράσετε το $\overrightarrow{MN}$ ως συνάρτηση των $\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{B\Delta}$

β) Αν Ρ το σημείο για το οποίο ισχύει η σχέση $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{MN}$, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{B\Delta}$

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΡΔ είναι παραλληλόγραμμο.

47. Σε τετράπλευρο ΑΒΓΔ έστω Κ και Λ τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι :

α) $\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{B\Gamma} = 2\overrightarrow{K\Lambda}$

β) $\overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{B\Delta} = 2\overrightarrow{K\Lambda}$ και

γ) $\overrightarrow{\Lambda A} + \overrightarrow{\Lambda B} + \overrightarrow{K\Gamma} + \overrightarrow{K\Delta} = \vec{0}$

<u>ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ</u>

48. Αν τα σημεία Α και Β είναι διαφορετικά ,να βρείτε τον $x \in R$ για τον οποίο ισχύει : $x \cdot \overrightarrow{A\Gamma} - 2\overrightarrow{A\Delta} = x \cdot \overrightarrow{B\Gamma} + 2\overrightarrow{\Delta B}$

49. Δίνονται σημεία Α,Β,Γ,Δ, με Β $\not\equiv$ Γ,για τα οποία ισχύει $3\overrightarrow{A\Gamma} - 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$

α) Να αποδείξετε ότι : $\overrightarrow{A\Delta} \uparrow\downarrow \overrightarrow{B\Gamma}$

β) Να λύσετε την εξίσωση : $x\cdot\overrightarrow{\Delta\Gamma}-x\cdot\overrightarrow{AB}=(x+2)\cdot\overrightarrow{B\Gamma}$

50. Έστω $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δύο γνωστά διανύσματα .Θεωρούμε επίσης διάνυσμα $\vec{x}$ για το οποίο ισχύει : $\frac{1}{2}(2\vec{x}+\vec{\beta})=\frac{1}{4}(3\vec{x}+\vec{\alpha})$

α) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{x}$

β) Αν επιπλέον ισχύει ότι : $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}+4\vec{\beta}$, $\overrightarrow{OB}=4\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{O\Gamma}=-\vec{\alpha}+8\vec{\beta}$ να αποδείξετε ότι :

i) $\overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\vec{x}$ **ii)** $\overrightarrow{A\Gamma}\uparrow\downarrow\vec{x}$

51. Να λυθεί το σύστημα : $\begin{cases}2\vec{x}+3\vec{y}=7\vec{a}+\vec{\beta}\\ \vec{x}-2\vec{y}=-3\vec{\beta}\end{cases}$

52. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in R$ ισχύει $|(\lambda-3)\vec{\alpha}|<5|\vec{\alpha}|, \acute{o}\pi o\upsilon\ \vec{a}\neq\vec{0}$.

<u>ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ</u>

53. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Ρ τέτοιο, ώστε $\overrightarrow{BP}=3\overrightarrow{P\Gamma}$.

α) Να γράψετε το διάνυσμα $\overrightarrow{AP}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$

β) Να βρείτε τα κ,λ ∈R για τα οποία ισχύει : $8\overrightarrow{AP}-6\overrightarrow{AB}=\kappa\cdot\overrightarrow{B\Gamma}+\lambda\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$

54. Θεωρούμε τα μη συνευθειακά σημεία Ο,Α,Β και τα διανύσματα $\vec{v}=\overrightarrow{OA}-\lambda\cdot\overrightarrow{OB}$ και $\vec{u}=\lambda\cdot\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$. Να αποδείξετε ότι για κάθε λ ∈R τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{u}$ δεν είναι συγγραμμικά.

55. Αν $4\vec{\alpha}-2\vec{\beta}=3\vec{\gamma}$, να γράψετε το $\vec{\beta}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$.

56. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A\Delta}=\vec{\beta}$. Στη διαγώνιο ΑΓ παίρνουμε σημείο Ε ώστε $AE=\frac{1}{4}A\Gamma$. Στην πλευρά ΒΓ παίρνουμε σημείο Ζ ώστε $BZ=\frac{2}{3}B\Gamma$ και στην προέκταση της πλευράς ΔΓ σημείο Ρ ώστε $\Gamma P=\frac{3}{5}\Delta\Gamma$.

α) Να γράψετε τα διανύσματα $\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AZ},\overrightarrow{AP}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$.

β) Να γράψετε τα διανύσματα $\overrightarrow{EZ}$, $\overrightarrow{EP}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$.

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Ε , Ζ , Ρ είναι συνευθειακά.

57. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Δ το μέσο της ΑΒ. Στην ΒΓ παίρνουμε σημείο Ε ώστε ΒΕ=3ΒΓ και στην ΑΓ σημείο Ζ ώστε $ΑΖ = \frac{3}{5}ΑΓ$.

α) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{ΔΕ}$ και $\overrightarrow{ΔΖ}$ ως συνάρτηση των $\overrightarrow{ΑΒ} = \vec{α}$ και $\overrightarrow{ΑΓ} = \vec{β}$.

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ , Ε , Ζ είναι συνευθειακά.

58. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ τέτοιο ώστε $\overrightarrow{ΑΒ} = \vec{α}$, $\overrightarrow{ΑΓ} = \vec{β}$ και $\overrightarrow{ΔΓ} = 2\vec{α}$. Έστω Μ το σημείο τομής των διαγωνίων του.

α) Να γράψετε τα διανύσματα $\overrightarrow{ΑΔ}$,$\overrightarrow{ΒΔ}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{α}$, $\vec{β}$.

β) Αν $\overrightarrow{ΑΜ} = λ\overrightarrow{ΑΓ}$ και $\overrightarrow{ΒΜ} = μ\overrightarrow{ΒΔ}$, να βρείτε τα λ , μ.

59. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\overrightarrow{ΒΑ} = \vec{α}$ και $\overrightarrow{ΒΓ} = \vec{β}$. Αν Ε , Ζ τα μέσα των ΒΓ και ΓΔ αντίστοιχα και Ρ το σημείο τομής των ΑΕ και ΒΖ , να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{ΑΡ} = \frac{4}{5}\overrightarrow{ΑΕ}$ και $\overrightarrow{ΒΡ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{ΒΖ}$.

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

60. Δίνονται τα μη συνευθειακά σημεία του επιπέδου Α, Β, Γ και τα διανύσματα $\overrightarrow{ΒΔ}$ και $\overrightarrow{ΓΕ}$ τέτοια ώστε $\overrightarrow{ΒΔ} = \overrightarrow{ΒΑ} + \overrightarrow{ΒΓ}$ και $\overrightarrow{ΓΕ} = \overrightarrow{ΓΑ} + \overrightarrow{ΓΒ}$.

α) i. Να δείξετε ότι $\overrightarrow{ΑΔ} = \overrightarrow{ΒΓ}$ και $\overrightarrow{ΑΕ} = \overrightarrow{ΓΒ}$.

ii. Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{ΑΔ}$ και $\overrightarrow{ΑΕ}$ είναι αντίθετα.

β) Να δικαιολογήσετε γιατί τα σημεία Α Δ και Ε είναι συνευθειακά.

61. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Δ,Ε σημεία εσωτερικά των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα τέτοια ώστε $\overrightarrow{ΑΒ} = κ \cdot \overrightarrow{ΑΔ}$ και $\overrightarrow{ΑΓ} = λ \cdot \overrightarrow{ΑΕ}$, όπου κ και λ θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Αν $\overrightarrow{ΑΒ} = \vec{α}$ και $\overrightarrow{ΑΓ} = \vec{β}$, τότε:

α) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{ΔΕ}$ και $\overrightarrow{ΒΓ}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{α}$ και $\vec{β}$.

β) i. Αν κ=λ , να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{ΒΓ} // \overrightarrow{ΔΕ}$ και $|\overrightarrow{ΒΓ}| = κ|\overrightarrow{ΔΕ}|$.

ii. Αν κ=λ=2, να γράψετε τη σχέση που συνδέει τα διανύσματα $\overrightarrow{ΔΕ}$ και $\overrightarrow{ΒΓ}$ αι να διατυπώσετε λεκτικά ποιο γνωστό θεώρημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχει αποδειχθεί.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΗΜΕΙΩΝ

55. Δίνεται το σημείο $\mathrm{A}\left(\lambda^2-9,\ \lambda^2-\lambda\right)$ με $\lambda\in\mathbb{R}$.Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ το σημείο ανήκει
α) στον άξονα χ΄χ **β)** στον άξονα y΄ y

56. Δίνεται το σημείο $\mathrm{A}\left(\lambda+3,\ \lambda\right)$ με $\lambda<0$ το οποίο απέχει από τον άξονα y΄ y απόσταση 3.
α) Να βρείτε την τιμή του λ
β) Να βρείτε το συμμετρικό του Α ως προς τον :
i) τον άξονα χ΄χ **ii)** τον άξονα y΄ y
iii) την αρχή των αξόνων Π(0.0) **iv)** τη διχοτόμο 1ου-3ου τεταρτημορίου

57. Ποια είναι η θέση στο καρτεσιανό επίπεδο των σημείων Μ(x,y) για τα οποία ισχύει:
α) $y=2$ **β)** $x=-4$ **γ)** $|x|=3$
δ) $-2\le y\le 1$ **ε)** $|x|<1$ **στ)** $y=3$ και $-1<x<2$

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ –ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ - ΙΣΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

58. Αν $\mathrm{B}(3,5)$, να βρείτε το σημείο εφαρμογής του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ = (-1, 3).

59. Αν το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ = (2, 8) έχει σημείο εφαρμογής το Α(5, 4), να βρείτε το πέρας του.

60. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ ,με $\mathrm{A}(4,-2),\mathrm{B}(-3,8)$ και $\Gamma(-5,-6)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{B\Gamma}$ και $\overrightarrow{\Gamma\mathrm{A}}$.

61. Δίνεται το σημείο $A(5,-3)$.Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Β και Γ για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-3,9)$ και $\overrightarrow{\Gamma\mathrm{B}}=(3,2)$

62. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{a}=(x^2+5x)\vec{i}+(x^2-25)\vec{j}$. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει:
α) $\vec{\alpha}\,//\,\chi'\chi$ **γ)** $\vec{\alpha}\,//\,y'y$
β) $\vec{\alpha}\,//\,\chi'\chi$ και $\vec{a}\neq\vec{0}$ **δ)** $\vec{\alpha}\,//\,y'y$ και $\vec{a}\neq\vec{0}$

63. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(\lambda,2\lambda-4)$, $\vec{\beta}=(\mu,\mu+6)$ και $\vec{\gamma}=(7,-1)$.Να βρείτε Για ποιες τιμές των $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ ισχύει $2\vec{\alpha}-\vec{\beta}=\vec{\gamma}$.

64. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(\kappa-1,\lambda-2)$ και $\vec{\beta}=(\lambda,2\kappa-1)$.Να βρείτε τα $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε

α) το $\vec{\alpha}$ να είναι το μηδενικό διάνυσμα.

β) τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ να είναι ίσα.

γ) τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ να είναι αντίθετα.

65. Αν $A(-2,\ 1)$, $B(3,-2)$ και $2\vec{AM}-3\vec{BM}=\vec{0}$, να υπολογιστούν οι συντεταγμένες του Μ.

66. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(4,6)$,$\vec{\beta}=(-3,1)$ και $\vec{\gamma}=(-1,15)$.Να γράψετε το $\vec{\gamma}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

67. Δίνονται τα διανύσματα. $\vec{\alpha}=(1,-2)$ και $\vec{\beta}=(-3,2)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{\gamma}=-\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$ και $\vec{\delta}=\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$

β) Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$

<u>ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΜΕΣΟΥ</u>

68. Δίνονται τα σημεία $A(2,5)$ και $B(4,-9)$.Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Μ του ΑΒ.

69. Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με $A(-1,4)$ έχει μέσο το σημείο $M(-4,3)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Β

70. Δίνονται τα σημεία $A(\lambda,2\kappa-4)$,$B(-2\lambda-\kappa,3\lambda-\kappa)$ και $M(\kappa,\lambda-1)$,με $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές των $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε το Μ να είναι μέσο του ΑΒ.

71. Δίνονται τα σημεία $A(-3,\ 4)$,$B(5,-4)$,$\Gamma(-9,12)$ και $\Delta(1,-8)$. Αν Μ και Ν είναι τα μέσα είναι αντιστοίχως τα μέσα των ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα ,να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{MN}$.

72. Αν τα σημεία $\Delta(-1,\ 4)$,$E(5,\ 4)$,$Z(2,-1)$ είναι αντιστοίχως τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΓΑ και ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ, να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών του.

73. Δίνονται τα σημεία $A(3,-4)$ και $B(2,\ 1)$. Να βρεθεί:

α) το συμμετρικό του Α ως προς κέντρο συμμετρίας το Β.
β) το συμμετρικό του Β ως προς κέντρο συμμετρίας το Α.

74. Δίνονται τα σημεία $A(5,-1)$ και $B(-3,2)$.Να βρείτε :

α) το μέσο του τμήματος ΑΒ.
β) το σημείο Γ ,ώστε το Β να είναι μέσον του τμήματος ΑΓ.

75. Να βρείτε το αντιδιαμετρικό σημείο Β του $A(-3,2)$ ενός κύκλου με κέντρο $K(5,-4)$.

76. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ ,με $A(-1,3), B(6,4)$ και $\Gamma(5,-1)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες :

α) του κέντρου Κ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ
β) της κορυφής Δ

77. Σε ένα σύστημα συντεταγμένων οι τεταγμένες δύο σημείων Α και Β είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2-(\lambda^3-2)x-2=0.$ Να βρείτε την τιμή του λ ∈R,ώστε το μέσον του τμήματος ΑΒ να έχει τεταγμένη ίση με 3.

78. Οι τεταγμένες των σημείων Α, Β είναι οι ρίζες της εξίσωσης $y^2-\left(\lambda^2+3\lambda+10\right)y-4=0$. Να βρεθεί η τιμή του λ για την οποία το μέσο Μ του τμήματος ΑΒ να έχει τεταγμένη ίση με 5.

<u>ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ-ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΩΝ</u>

79. Αν $\vec{\alpha}=(-3,4)$ και $\vec{\beta}=(5,-12)$,να υπολογίσετε τα μέτρα :

α) $|-2\vec{\alpha}|$ **β)** $|3\vec{\alpha}-2\vec{\beta}|$

80. Αν $\vec{\alpha}=(-1,2)$ και $\vec{\beta}=(3,-2)$,να υπολογίσετε τα μέτρα :

α) $|-3\vec{\alpha}|$ **β)** $|3\vec{\alpha}+4\vec{\beta}|$

81. Να βρείτε το μέτρο των διανυσμάτων:

α) $6\vec{i}-8\vec{j}$ **β)** $(\sigma\upsilon\nu\theta)\vec{i}+(\eta\mu\theta)\vec{j}$

82. Να βρείτε το μέτρο των διανυσμάτων:

α) $-\sqrt{8}\vec{i}+\vec{j}$ **β)** $2(\eta\mu\theta)\vec{i}-2(\sigma\upsilon\nu\theta)\vec{j}$

γ) $(x-y)\vec{i}+2\sqrt{xy}\,\vec{j}$ **δ)** $\frac{\sqrt{3}}{4}\vec{i}-\frac{1}{4}\vec{j}$

83. Να βρείτε τις αποστάσεις των σημείων Α και Β σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις :

α) Α(-2,7) και Β(4,-1) **β)** Α(3,-5) και Β(3,2) **γ)** Α(-4,-2) και Β(2,-2)

84. Δίνονται τα σημεία $A(\lambda,1)$ και $B(-1,\lambda+3)$,με $\lambda\in\mathbb{R}$.Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η απόσταση των σημείων Α και Β είναι 5

85. Δίνεται το σημείο $A(3,-1)$.Να βρείτε σημείο Β του άξονα y΄y,που απέχει από το Α απόσταση 5.

86. Δίνονται τα σημεία $A(3,8)$ και $B(9,4)$. Να βρείτε σημείο Γ του άξονα χ΄χ το οποίο ισαπέχει από τα Α και Β.

87. Αν $\vec{v}=(1,2)$,να βρείτε διάνυσμα $\vec{u}$ που να έχει μέτρο διπλάσιο του $\vec{v}$ και να είναι ομόρροπο του $\vec{v}$.

88. Να βρείτε διάνυσμα $\vec{v}$ αντίρροπο του $\vec{\alpha}=(1,4)$ με μέτρο $\sqrt{17}$.

89. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(\lambda,7-\lambda)$ και $\vec{\beta}=(1-\lambda,\lambda-3)$,λ∈R.Να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει $|\vec{\alpha}|=13$ και $|\vec{\beta}|=10$.

90. **α)** Να βρείτε το $|\vec{v}|$, όταν $|\vec{v}|^2-4|\vec{v}|=5$.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\alpha}$,για το οποίο ισχύει $\vec{\alpha}=(|\vec{\alpha}|-4,8)$.

91. Αν $\vec{u}=(1,2),\vec{v}=(-1,0)$ και $\vec{\alpha}=\vec{u}+|\vec{\alpha}|\vec{v}$,να βρείτε το $|\vec{\alpha}|$.

92. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $A(2,1),B(3,-2)$ και $\Gamma(7,-4)$.

α) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{v}=-4\overrightarrow{A\Gamma}+7\overrightarrow{B\Gamma}$.

β) Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ ,να βρείτε το μήκος της διαμέσου ΑΜ.

93. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $A(-1,0),B(3,-2)$ και $\Gamma(2,0)$. Να βρείτε το μήκος της διαγωνίου ΒΔ.

94. Να βρεθεί το εμβαδόν τετραγώνου ΑΒΓΔ στο οποίο είναι $A(-2,1)$ και $\Gamma(0,\ 5)$.

95. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}=(\kappa^2+2\kappa+5,3\lambda-\mu^2)$ και $\vec{\beta}=(4\lambda-\lambda^2,15+6\kappa\mu)$, $\kappa,\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ίσα ,να βρείτε:

α) τους αριθμούς κ,λ,μ. **β)** το $|\vec{\alpha}|$

γ) διάνυσμα $\vec{\gamma}$,που είναι αντίρροπο του $\vec{\alpha}$ και έχει τριπλάσιο μέτρο από το $\vec{\alpha}$

96. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{a}$ για το οποίο $\vec{a} = (-4, |\vec{a}| - 2)$.

97. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{a}$ για το οποίο $\vec{\alpha} = \left(-3, \dfrac{|\vec{\alpha}|+3}{2}\right)$.

98. Να βρεθούν τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν
$\vec{\alpha} = (-3, |\vec{\beta}|)$ *και* $\vec{\beta} = (1 - |\vec{\alpha}|, \sqrt{2})$.

99. Δίνεται διάνυσμα ,μη παράλληλο στον $x'x$,για το οποίο ισχύει η σχέση :
$\vec{\alpha} = (4,-2) - |\vec{\alpha}| \cdot (1,-1)$.Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{a}$.

100. Δίνονται τα σημεία $A(-1,\ 2)$ και $B(-3,\ 0)$. Να βρείτε σημείο Γ του επιπέδου Oxy τέτοιο ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

101. Να αποδειχτεί ότι το τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές $A(3,-2), B(-2,\ 3)$ και $\Gamma(0,\ 4)$, είναι ορθογώνιο και να υπολογιστούν τα μήκη των πλευρών του.

102. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $B(3,5), \Gamma(5,-1)$ και $\Delta(-1,-1)$.
Να βρείτε :
α) τις συντεταγμένες της κορυφής Α
β)το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{A\Gamma}$.

103. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με διαγώνιες $\overrightarrow{A\Gamma} = (-9,12)$ και $\overrightarrow{B\Delta} = (-3,2)$.
Να υπολογίσετε τα μέτρα των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Delta}$.

<u>ΠΑΡΑΛΛΗΛΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ-ΣΥΝΕΥΘΕΙΑΚΑ ΣΗΜΕΙΑ</u>

104. Δίνονται τα σημεία $A(2,-3),\ B(-1,4)$ και $\Gamma(5,-10)$. Να δείξετε ότι είναι συνευθειακά.

105. Δίνονται τα σημεία $A(3,2),\ B(1,-4)$ και $\Gamma(-2,-13)$. Να δείξετε ότι είναι συνευθειακά.

106. Δίνονται τα σημεία $A(1,-4)$ και $B(4,2)$.Να βρείτε σημείο Γ του άξονα $x'x$, ώστε τα σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακά.

107. Τα σημεία Α,Β και Γ έχουν διανύσματα θέσης ως προς Ο τα $\vec{\alpha}=(-1,9)$, $\vec{\beta}=(5,-3)$ και $\vec{\gamma}=(1,5)$ αντίστοιχα .Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακά.

108. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(\lambda,-4)$ και . $\vec{\beta}=(\lambda-5,6)$ με $\lambda\in\mathbb{R}$.Να βρείτε για ποια τιμή του λ είναι $\vec{\alpha}//\vec{\beta}$.

109. Να βρεθεί η τιμή του $x\in\mathbb{R}$ για την οποία τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ = (3,x) και $\vec{\beta}$ = (6,4) είναι συγγραμμικά.

110. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ τα διανύσματα $\vec{\alpha}=4\lambda\vec{i}-9\vec{j}$ και $\vec{\beta}=-4\vec{i}+\lambda\vec{j}$ είναι :

α) παράλληλα **β)** ομόρροπα

111. α) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$,ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(\lambda-1,1)$ και $\vec{\beta}=(1,2\lambda-1)$ να είναι συγγραμμικά.

β) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(x+1,-3)$ και $\vec{\beta}=(2,x)$ είναι μη συγγραμμικά για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

112. Να βρείτε τις τιμές του $\kappa\in\mathbb{R}$,ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,\kappa-1)$ και $\vec{\beta}=(\kappa-1,9)$ να είναι αντίρροπα.

113. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(4,-1)$, $\vec{\beta}=(\lambda,3\lambda-2)$ και $\vec{\gamma}=(3,6)$ για τα οποία ισχύει ότι $\vec{\beta}//\vec{\gamma}$.

α) Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Αν $\mathrm{P}(-2,7)$ και $\Sigma(6,-4)$ να γράψετε το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{P}\Sigma}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

114. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2,3)$, $\vec{\beta}=(-10,2)$ και $\vec{\gamma}=2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.Να βρείτε :

α) το $|\vec{\gamma}|$

β) τον αριθμό $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε το διάνυσμα $\vec{\delta}=(\lambda,1-\lambda)$ να είναι παράλληλο στο $\vec{\gamma}$.

115. Δίνονται τα σημεία : $\mathrm{A}(\kappa-3,-2),\mathrm{B}(7-\kappa,\kappa)$ και $\Gamma(\kappa-6,-11)$, με $\kappa\in\mathbb{R}$.Να βρείτε για ποια τιμή του κ:

α) το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ είναι παράλληλο στον άξονα y΄y

β) τα σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακά.

116. Δίνονται τα σημεία $A(-2,\ 1)$ και $B(7,\ 4)$. Να βρείτε τα σημεία Μ, Ν για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$ και $\overrightarrow{AN}=-4\overrightarrow{NB}$.

ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗΣ-ΓΩΝΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ ΜΕ ΤΟΝ χ΄χ

117. Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης των διανυσμάτων :
α) $\vec{\alpha}=(2,-6)$ **β)** $\vec{\beta}=(8,-4)$ **γ)** $\vec{\gamma}=(-5,0)$ **δ)** $\vec{\delta}=(0,7)$

118. Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης (αν ορίζεται) του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ στις παρακάτω περιπτώσεις:
α) $A(-1,3), B(2,-3)$ **β)** $A(3,1), B(-5,1)$ **γ)** $A(-2,3), B(-2,7)$

119. Αν φ η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ με τον άξονα χ΄χ ,να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{\alpha}$ στις παρακάτω περιπτώσεις :
α) $\varphi=\frac{\pi}{6}$ **β)** $\varphi=120^{\circ}$ **γ)** $\varphi=\frac{3\pi}{4}$ **δ)** $\varphi=0^{\circ}$

120. Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης των διανυσμάτων:
α) $3\vec{i}-12\vec{j}$ **β)** $-2\vec{i}$ **γ)** $4\vec{j}$ **δ)** $3\vec{j}+12\vec{i}$

121. Να βρείτε τη γωνία ω που σχηματίζουν με τον άξονα χ΄χ τα διανύσματα :
α) $\vec{\alpha}=(\sqrt{3},3)$ **β)** $\vec{\beta}=(-6,\sqrt{12})$ **γ)** $\vec{\gamma}=(-4,-4)$ **δ)** $\vec{\delta}=(\sqrt{27},-9)$

122. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2,2)$ και $\vec{\beta}=(1,-\sqrt{3})$.

α) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει καθένα από τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ με τον άξονα χ΄χ.

β) Να βρείτε τη γωνία $\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)$.

123. Δίνονται τα σημεία $A(\mu-3,2)$ και $B(3\mu,\mu-3)$. Να βρείτε το $\mu\in\mathbb{R}$,ώστε το $\overrightarrow{AB}$ να σχηματίζει με τον άξονα χ΄χ γωνία $\frac{7\pi}{4}$.

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

124. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,-3)$ και $\vec{\beta}=(-2,-1)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{u}=3\vec{\alpha}-5\vec{\beta}$ και $\vec{v}=5\vec{\alpha}-9\vec{\beta}$.

β) Αν $\vec{w}=2\vec{u}-\vec{v}$, να γράψετε το $\vec{w}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$.

γ) Αν τα $\vec{\beta},\vec{w},\vec{u}$ είναι τα διανύσματα θέσης των σημείων Κ, Λ, και Μ αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι τα σημεία αυτά είναι συνευθειακά.

125. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=3\vec{i}+3\sqrt{3}\,\vec{j}$, $\vec{\beta}=\sqrt{2}\,\vec{i}$, $\vec{\gamma}=-3\vec{j}$ και $\vec{\delta}=(-1,1)$.

α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης καθενός από τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και $\vec{\delta}$.

β) Να γράψετε τη γωνία που σχηματίζει καθένα από τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ με τον θετικό ημιάξονα Οx.

γ) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$.

126. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(3,3)$ και $\vec{\beta}=\left(-\sqrt{3},1\right)$.

α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ καθώς και τη γωνία που σχηματίζει καθένα από αυτά με τον άξονα x΄x.

β) Να βρείτε τη γωνία $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$.

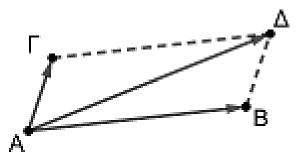
127. Δίνονται τα σημεία Α(2,1) και Β(6,7) του καρτεσιανού επιπέδου Οxy.

α) Να σχεδιάσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$.

β) Αν $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$ να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{v}$.

γ) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{u}=(-8,-12)$ και $\vec{v}$ του β) ερωτήματος είναι αντίρροπα.

128. Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy δίνονται τα σημεία Α(2,4), Β(11, 5), Γ(3, 7) και ένα σημείο Δ ώστε το $\overrightarrow{A\Delta}$ να είναι ίσο με το άθροισμα των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες:



α) των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

β) του διανύσματος $\overrightarrow{A\Delta}$.

γ) του σημείου Δ.

129. Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy δίνονται τα σημεία Α(−1, 6), Β(1, 2) και Γ(3, −2).

α) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$.

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά.

γ) Να αποδείξετε ότι το Β είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ.

130. Στο καρτεσιανό επίπεδο Οxy δίνονται τα σημεία $A(3,4)$, $B(2,1)$, $\Gamma(3,-1)$ και $\Delta(4,2)$.

α) Να σχεδιάσετε τα παραπάνω σημεία και Α, Β, Γ και Δ.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

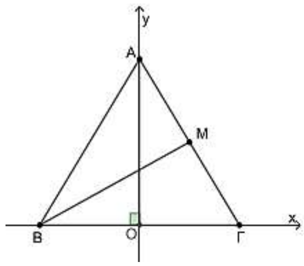
131. Δίνεται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2,3)$, $\vec{\beta}=(-1,1)$ και $\vec{\gamma}=(-5,-5)$.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\beta}$ με τον άξονα x΄x.

β) Να αποδείξετε ότι $|\vec{\gamma}|=5|\vec{\beta}|$.

γ) Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς λ, μ ώστε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ να γραφεί στη μορφή $\vec{\gamma}=\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}$.

132. Το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ έχει βάση ΒΓ και ύψος ΑΟ. Η κορυφή Α είναι σημείο του θετικού ημιάξονα Oy και οι κορυφές Β και Γ είναι σημεία του άξονα x΄x, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Έστω $(\text{ΒΓ})=12$, $(\text{ΑΟ})=8$ και Μ το μέσο της πλευράς ΑΓ.



α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\text{Α}(0,8)$, $\text{Β}(-6,0)$ και $\Gamma(6,0)$.

ii. Μ(3,4).

β) Να βρείτε το μήκος της διαμέσου ΒΜ.

133. Δίνονται τα σημεία $\text{Α}(-3,-1)$, $\text{Β}(0,3)$ και $\text{Μ}(x,y)$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{\text{ΑΜ}}$, $\overrightarrow{\text{ΜΒ}}$ και $\overrightarrow{\text{ΑΒ}}$.

β) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\overrightarrow{\text{ΑΜ}}$, $\overrightarrow{\text{ΜΒ}}$ και $\overrightarrow{\text{ΑΒ}}$.

γ) Να αποδείξετε ότι $|\overrightarrow{\text{ΑΜ}}|+|\overrightarrow{\text{ΜΒ}}|\geq 5$.

δ) Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Υπάρχει ζεύγος πραγματικών αριθμών (x,y) τέτοιο ώστε να ισχύει $\sqrt{(x+3)^2+(y+1)^2}+\sqrt{x^2+(y-3)^2}=4$.»
Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

134. Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy τα σημεία Α και Β έχουν διανύσματα θέσεως $\overrightarrow{\text{ΟΑ}}=2\vec{i}+\lambda\vec{j}$ και $\overrightarrow{\text{ΟΒ}}=(\lambda+1)\vec{i}+(\lambda+3)\vec{j}$, με $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{\text{ΑΒ}}=(\lambda-1)\vec{i}+3\vec{j}$.

β) Να βρείτε την απόσταση των σημείων Α και Β ως συνάρτηση του λ.

γ) Για ποιες τιμές του λ η απόσταση των σημείων Α και Β είναι ίση με 5;

δ) Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Υπάρχει πραγματικός αριθμός λ τέτοιος ώστε η απόσταση των σημείων Α και Β να παίρνει τη μικρότερη δυνατή τιμή.»
Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ</u>

<u>ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ</u>

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ</u>

124. Να υπολογιστεί το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a}\cdot\vec{\beta}$ δύο διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ αν:

α) $|\vec{a}|=5, |\vec{\beta}|=7, (\vec{a},\vec{\beta})=\frac{\pi}{6}$, **β)** $|\vec{a}|=\sqrt{5}, |\vec{\beta}|=\frac{2}{3}, (\vec{a},\vec{\beta})=\frac{5\pi}{6}$ **.**

125. Το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ είναι μοναδιαίο και ισχύουν $|\vec{\beta}|=6$ και $\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=60^\circ$.Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.

126. Τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι ομόρροπα,.με $|\vec{\alpha}|=3$ και $|\vec{\beta}|=7$.Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.

127. Τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι αντίρροπα με $|\vec{\alpha}|=9$ και $|\vec{\beta}|=4$.Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.

128. Δίνονται διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν $|\vec{\beta}|=\sqrt{12}$, $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-12$ και $\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=150^\circ$.Να βρείτε:

α) το μέτρο του διανύσματος $\vec{a}$.

β) το εσωτερικό γινόμενο $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})\cdot(\vec{\alpha}-\vec{\beta})$.

129. Δίνονται διανύσματα $\vec{a}$,$\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν : $|\vec{\alpha}|=\sqrt{12}$,$|\vec{\gamma}|=5$, $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=12$, $\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=\frac{\pi}{6}$ και $\left(\vec{\beta},\vec{\gamma}\right)=\frac{2\pi}{3}$.Να βρείτε :

α) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\beta}$.

β) $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})\cdot(\vec{\alpha}-\vec{\beta})$.

γ) $\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}$.

130. Δίνονται διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$,με $|\vec{\alpha}|=4$,$|\vec{\beta}|=5$,$\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=120^\circ$.Να βρείτε τα γινόμενα:

α) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ **β)** $(\vec{\alpha}-\vec{\beta})\cdot(3\vec{\alpha}+\vec{\beta})$ **γ)** $(2\vec{\alpha}+\vec{\beta})^2$

131. Δίνονται διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$,με $|\vec{\alpha}|=4$ και $\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=\frac{\pi}{3}$.Αν ισχύει

$\vec{\alpha}\cdot(\vec{\alpha}+2\vec{\beta})=28$ να βρείτε :

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.

β) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\beta}$.

γ) το εσωτερικό γινόμενο $(\vec{\alpha}-2\vec{\beta})\cdot(2\vec{\alpha}+\vec{\beta})$.

<u>ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΕΚΦΡΑΣΗ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ</u>

132. Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις :

α) $\vec{\alpha}=(3,5)$ και $\vec{\beta}=(4,2)$ **β)** $\vec{\alpha}=(2,-3)$ και $\vec{\beta}=(1,5)$

γ) $\vec{\alpha}=(-4,2)$ και $\vec{\beta}=(2,-6)$ **δ)** $\vec{\alpha}=(0,-3)$ και $\vec{\beta}=(7,-2)$

133. Δίνονται τα σημεία $\mathrm{A}(3,1),\mathrm{B}(2,-5),\Gamma(-4,3)$ και $\Delta(-1,-2)$. Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

134. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ ,με $\mathrm{A}(3,5)$, $\mathrm{B}(x,x-4)$ και $\Gamma(-5,11)$,όπου $x\in\mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=-32$

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x.

β) Αν Μ και Ν τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΑΒ αντίστοιχα, να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\Gamma\mathrm{N}}$.

135. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2,\lambda)$ και $\vec{\beta}=(\lambda-8,1)$,με $\lambda\in\mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-1$.

α) Να βρείτε τον αριθμό λ.

β) Το εσωτερικό γινόμενο $(\vec{\alpha}-2\vec{\beta})\cdot(\vec{\alpha}+\vec{\beta})$.

136. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(4,-3)$, $\vec{\beta}=(x,x+3)$ και $\vec{\gamma}=(-6,1)$, για τα οποία ισχύει ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=1$ και $\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=-47$.

α) Να αποδείξετε ότι $x=10$.

β) Να βρείτε για ποια τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$ ισχύει $(\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta})\cdot(\vec{\beta}+\vec{\gamma})=196$.

137. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(x,-1)$, $\vec{\beta}=(2,y)$ και $\vec{\gamma}=(x-5,3)$, για τα οποία ισχύει ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των x,y .

β) Να βρείτε για ποια τιμή του $\lambda\in R$ ισχύει $(\lambda\vec{\alpha}+\vec{\beta})\cdot(\vec{\beta}-\vec{\gamma})=38$.

ΑΠΟΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

138. Έστω διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$. Να αποδειχτούν οι παρακάτω σχέσεις:

α) $\left|\vec{a}+\vec{\beta}\right|^2-\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|^2=4\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.

β) $\left|\vec{a}+\vec{\beta}\right|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{\beta}|^2\Leftrightarrow\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$.

γ) $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|\geq\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right|$ Πότε ισχύει η ισότητα;

139. Δίνονται διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν $|\vec{\beta}|=2|\vec{\alpha}|$ και $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|4\vec{\beta}-5\vec{\alpha}|$.Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$.

140. Δίνονται διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν $|\vec{\beta}|=3|\vec{\alpha}|$ και $|2\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|$. Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$.

141. Αν ισχύει $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|$ τότε να δείξετε ότι $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=|\vec{\alpha}|\cdot\sqrt{3}$.

142. Αν για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $\left(\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}\right)\perp\left(\lambda\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)$ και $\left|\vec{\alpha}\right|=1$, να αποδείξετε ότι:

α) $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$ και $\left|\vec{\beta}\right|=1$ **β)** $\left|4\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\right|=5$

ΘΕΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

143. Δίνονται τα κάθετα διανύσματα $\vec{\alpha}=(\lambda,3)$ και $\beta=(-6,\lambda+2)$.Να βρείτε :

α) τον πραγματικό αριθμό λ.

β) για ποια τιμή του πραγματικού αριθμού μ είναι $\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)\perp\left(\mu\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)$.

144. Δίνονται τα κάθετα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν $|\vec{\beta}|=\sqrt{15}$ και $\left(\vec{\alpha}+3\vec{\beta}\right)\cdot\left(2\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)=5$.Να βρείτε :

α) Να βρείτε το $|\vec{\alpha}|$.

β) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{v}=2\vec{\alpha}+5\vec{\beta}$ και $\vec{w}=3\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$ είναι κάθετα.

145. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,\lambda)$ και $\vec{\beta}=(-3,4-\lambda)$ με $\lambda\in R$ για τα οποία ισχύει $\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\perp\left(13\vec{\alpha}+3\vec{\beta}\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda=-1$.

β) Να βρείτε για ποια τιμή του $\mu\in R$,το διάνυσμα $\vec{\gamma}=5\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$ είναι κάθετο στο $\vec{\delta}=(\mu,\mu-8)$.

146. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά α=2. Αν ΑΔ είναι το ύψος του, να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα: i. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$, ii. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}$, iii. $\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$.

147. Δίνονται δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$,για τα οποία ισχύει $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}^2$ και $\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=\frac{\pi}{3}$.

α) Να αποδείξετε ότι $|\vec{\beta}|=2|\vec{\alpha}|$

β) Να βρείτε για ποια τιμή του λ $\in$R τα διανύσματα $\vec{v}=2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{w}=\lambda\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ είναι κάθετα

148. Τα σημεία Α, Β, Γ, Δ έχουν, ως προς την αρχή Ο, των αξόνων διανύσματα θέσης $(2,\ 5),(4,\ 10),(-6,-15)$ και $(-16,\ \lambda-15)$, $\lambda\in\mathbb{R}$, αντίστοιχα. Να δείξετε ότι τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά. Να βρείτε το λ ώστε $\vec{AB}\perp\vec{\Gamma\Delta}$.

<u>ΜΕΤΡΟ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ</u> $\left|k\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}\right|$

149. Αν $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{\pi}{3},\left|\vec{\alpha}\right|=3,\left(3\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)\left(\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\right)=15$ και $\left|\vec{\alpha}\right|<\left|\vec{\beta}\right|$, να βρείτε το $\left|\vec{\beta}\right|$.

150. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=\sqrt{8}$, $\left|\vec{\beta}\right|=3$ και $(\vec{\alpha},\vec{\beta})=45^\circ$.

Να βρείτε το $|3\vec{\alpha}-2\vec{\beta}|$

151. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=3$, $(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\frac{\pi}{3}$ και $|\vec{\alpha}+2\vec{\beta}|=7$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\frac{15}{2}$.

β) Να βρείτε το $|4\vec{\alpha}+3\vec{\beta}|$.

152. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=2$, $\left|\vec{\beta}\right|=4$ και $|4\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}-2\vec{\beta}|$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=3$.

β) Να βρείτε το $|3\vec{\alpha}-2\vec{\beta}|$.

153. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$, $\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\perp\left(\vec{\alpha}-4\vec{\beta}\right)$ και $|2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}|=5$.

α) Να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha}|=2$ και $|\vec{\beta}|=1$.

β) Να βρείτε το $|3\vec{\alpha}+8\vec{\beta}|$.

154. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\dfrac{2\pi}{3}$, $\vec{\alpha}+\vec{\beta}\perp\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ και $\left|3\vec{\alpha}+2\vec{\beta}\right|=7$. Να υπολογιστούν τα $\left|\vec{\alpha}\right|,\left|\vec{\beta}\right|$.

155. Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν :

$(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\dfrac{\pi}{3}$, $\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\perp\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)$ και $\left|2\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=7$.

156. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=3$ και $(\vec{\alpha},\vec{\beta})=60^\circ$.Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ,με $\overrightarrow{\Gamma A}=\vec{\alpha}-4\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{\Gamma B}=4\vec{\alpha}-6\vec{\beta}$,για το οποίο ισχύει $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{91}$

α) Να αποδείξετε ότι $|\vec{\beta}|=5$.

β) Να βρείτε το μήκος της διαμέσου ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ.

<u>ΣΧΕΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ</u> $k\vec{a}+\lambda\vec{\beta}+\mu\vec{\gamma}$

157. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ με $\left|\vec{\alpha}\right|=1$, $\left|\vec{\beta}\right|=2$, $\left|\vec{\gamma}\right|=3$ και $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $K=\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\beta}\vec{\gamma}+\vec{\gamma}\vec{\alpha}$.

158. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ με $\left|\vec{\alpha}\right|=2$, $\left|\vec{\beta}\right|=3$, $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-54$ και

$\vec{\alpha}-2\vec{\beta}+4\vec{\gamma}=\vec{0}$.

α) Να αποδείξετε ότι $|\vec{\gamma}|=4$.

β) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$.

159. Δίνονται μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν $\dfrac{|\vec{a}|}{3}=\dfrac{|\vec{\beta}|}{4}=\dfrac{|\vec{\gamma}|}{10}$ και $2\vec{a}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$.Να αποδείξετε ότι : το $\vec{a}$ είναι ομόρροπο του $\vec{\beta}$, και ότι: το διάνυσμα $\vec{\beta}$ είναι αντίρροπο του $\vec{\gamma}$.

160. Αν για τα διανύσματα $\vec{a},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ ισχύει: $\vec{a}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$ και $\dfrac{|\vec{a}|}{2}=\dfrac{|\vec{\beta}|}{3}=\dfrac{|\vec{\gamma}|}{5}$, να δείξετε ότι:

το $\vec{a}$ είναι ομόρροπο του $\vec{\beta}$, και ότι: το διάνυσμα $\vec{\beta}$ είναι αντίρροπο του $\vec{\gamma}$.

161. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{O\Gamma}\right|$ και $3\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}=5\overrightarrow{O\Gamma}$ όπου Ο η αρχή των αξόνων. Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$.

<u>ΓΩΝΙΑ ΔΥΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ</u>

162. Να υπολογιστεί η γωνία $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$ των διανυσμάτων :

α) $\vec{a}=(1,-\sqrt{3})$ **,** $\vec{\beta}=(1,\sqrt{3})$**.** **β)** $\vec{a}=(4,3)$ **,** $\vec{\beta}=(7,-1)$**.**

γ) $\vec{a}=(1,\sqrt{3})$**,** $\vec{\beta}=(\sqrt{3},-\sqrt{3})$ **.** **δ)** $\vec{a}=(2,6)$ **,** $\vec{\beta}=(-3,1)$**.**

163. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι Α (1, 2), Β (-2, 1) και Γ (3, 6). Να αποδειχθεί ότι: $\hat{A}=\frac{3\pi}{4}$.

164. Δίνονται διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν: $2\vec{\alpha}+\vec{\beta}=(7,-1)$ και $3\vec{\alpha}-\vec{\beta}=(8,-19)$.Να βρείτε:

α) τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$,

β) τη γωνία $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$.

165. Έστω $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ δύο διανύσματα τέτοια ώστε: $|\vec{a}|=2, |\vec{\beta}|=5, (\vec{a},\vec{\beta})=\frac{2\pi}{3}$. Αν $\vec{\delta}=3\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$, να υπολογιστούν τα συνημίτονα των γωνιών $(\vec{\delta},\vec{\alpha})$ και $(\vec{\delta},\vec{\beta})$.

166. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύουν $|\vec{a}|=2, |\vec{\beta}|=\sqrt{2}$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=45°$, να υπολογιστεί η γωνία $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\alpha}-\vec{\beta}}\right)$.

167. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, με μέτρα $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=2$, που σχηματίζουν γωνία φ=$\frac{\pi}{3}$. Αν $\vec{u}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{v}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$, να βρεθούν τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$ και η μεταξύ τους γωνία.

168. Δίνονται διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, με $|\vec{\alpha}|=2$ και $|\vec{\beta}|=3$, για τα οποία ισχύει ότι: $(3\vec{\alpha}+7\vec{\beta})\perp(6\vec{\alpha}+\vec{\beta})$

α) Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

β) Θεωρούμε το διάνυσμα $\vec{\gamma}=\lambda\vec{\alpha}+\vec{\beta}$, με $\lambda\in R$, το οποίο είναι κάθετο στο $\vec{\beta}$.

Να βρείτε :

i) την τιμή του λ,

ii) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$,

iii) τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$.

169. Δίνονται μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, καθώς και τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$, για τα οποία ισχύουν: $2\vec{u}+\vec{v}=4\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ και $\vec{v}-\vec{u}=\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$ και . $(\vec{u},\vec{v})=60^\circ$

α) Να γράψετε καθένα από τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

β) Να βρείτε τη γωνία $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$.

170. Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $|\overrightarrow{AB}|=5, |\overrightarrow{A\Delta}|=4$ και $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Delta}}\right)=60°$.

Να βρεθεί το συνημίτονο της γωνίας που σχηματίζει η $\overrightarrow{AB}$ με τη διαγώνιο $\overrightarrow{A\Gamma}$ του ΑΒΓΔ.

171. Δίνεται τρίγωνο με κορυφές τα σημεία Α (1, 2), Β (-1, -2) και Γ (-3, 4). Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η διάμεσος ΑΜ με την πλευρά ΑΓ.

172. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία $A(-1,\ 1), B(1,\ 5)$ και $\Gamma(4,-4)$.

α) Να εξετάσετε αν η γωνία $\hat{A}$ είναι οξεία ή αμβλεία,

β) Να βρείτε τη γωνία $\hat{B}$.

Γεωμετρία και διανύσματα

173. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το άθροισμα των τετραγώνων των δύο καθέτων πλευρών ισούται με το τετράγωνο της υποτείνουσας και αντιστρόφως.

174. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο το ύψος που αντιστοιχεί στη βάση του είναι και διάμεσός του.

175. Να αποδείξετε ότι κάθε γωνία εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο είναι ορθή.

176. Να αποδείξετε ότι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

177. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο τα ύψη του διέρχονται από το ίδιο σημείο.

178. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο οι διαγώνιες του είναι ίσες.

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

179. Δίνονται τα σημεία Α(1,2), Β(3,4) και Γ(5,-2).

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}$ και να αποδείξετε ότι η γωνία Α είναι ορθή.

β) Αν Μ είναι το μέσο του ΒΓ, να βρείτε τα μέτρα των $\overrightarrow{AM}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$.

γ) Να γραφεί το $\overrightarrow{B\Gamma}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{AM}$.

180. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $A(-2,5), B(7,8), \Gamma(1,-4)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$.

γ) Να βρείτε, σε μοίρες, τη γωνία $B\hat{A}\Gamma$.

181. Θεωρούμε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ τέτοια, ώστε $|\vec{\alpha}| = 3, |\vec{\beta}| = 4$ και $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}$.

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

β) Να βρείτε τα $\vec{\alpha}^2$ και $\vec{\beta}^2$.

γ) Να αποδείξετε ότι $(3\vec{\alpha} - \beta) \cdot (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) = 15$.

182. Δίνονται τα $\vec{\alpha} = (1,2)$ και $\vec{\beta} = (2,3)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$.

γ) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$.

183. Δίνονται τα σημεία Α(2,1), Β(6,3), Δ(1, −2) και Γ(9,2). Να αποδείξετε ότι:

α) Το μέσο Μ του τμήματος ΑΒ έχει συντεταγμένες (4,2) και το μέσο Ν του τμήματος ΓΔ έχει συντεταγμένες (5,0).

β) $\overrightarrow{MN} = (1,-2)$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = (8,4)$.

γ) $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

184. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1,3)$, $\vec{\beta} = (3,-1)$. Να υπολογίσετε:

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και την γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

β) το διάνυσμα $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

185. Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = (2,1)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (3,-1)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{B\Gamma} = (1,-2)$.

β) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{B\Gamma}$.

γ) Να αποδείξετε ότι $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|$.

186. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2,-2)$ και $\vec{\beta} = (1,1)$ τα οποία έχουν κοινή αρχή το σημείο Κ(2,1).

α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα.

β) Αν το σημείο Α είναι το πέρας του διανύσματος $\vec{\alpha}$, Β είναι το πέρας του διανύσματος $\vec{\beta}$ και $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$ ένα τυχαίο σημείο της ευθείας ΑΒ,

i. να δείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων Α και Β είναι Α(4,- 1) και Β(3, 2).

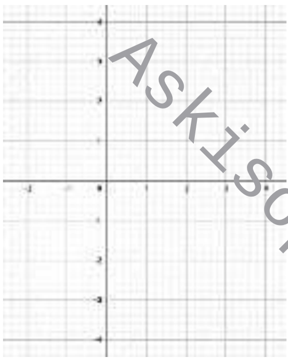
ii. να δείξετε ότι $3x_\Gamma + y_\Gamma = 11$.

iii. να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$, αν ισχύει ότι το Γ είναι εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ και $\left|\overrightarrow{K\Gamma}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

187. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{v} = (3,0)$ και $\vec{w} = (-3,4)$.

α) Να δείξετε ότι τα διανύσματα δεν είναι παράλληλα.

β) i. Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων να σχεδιάσετε τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{w}$



ii. Να προσδιορίσετε το είδος της γωνίας θ που σχηματίζουν τα διανύσματα.

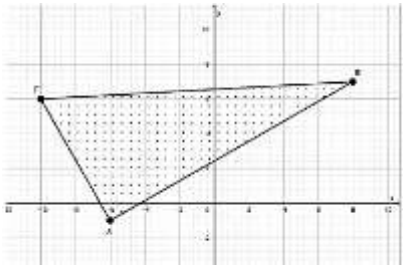
188. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 4$, $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}$ και το $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 4$.

β) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = 0$.

γ) Να βρείτε τη $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\gamma}})$.

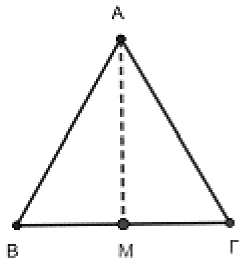
189. Δίνονται τα σημεία $A(-6,-1)$, $B(8,7)$, $\Gamma(-10,6)$, τα οποία ορίζουν τρίγωνο ΑΒΓ.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma}$ και του αθροίσματος τους $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}$.

β) Ένας μαθητής βλέποντας το τρίγωνο ΑΒΓ ισχυρίστηκε ότι είναι ορθογώνιο. Να ελέγξετε την αλήθεια του ισχυρισμού.

190. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς 10 και το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ.



α) Να βρεθούν τα μέτρα των γωνιών:

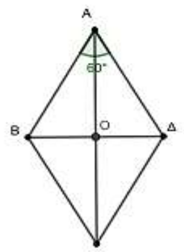
i. $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)$ **ii.** $\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B\Gamma}\right)$ **iii.** $\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{\Gamma A}\right)$

iv. $\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{\Gamma M}\right)$ **v.** $\left(\overrightarrow{\Gamma M},\overrightarrow{\Gamma B}\right)$

β) Να υπολογιστούν τα εσωτερικά γινόμενα:

i. $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}$ **ii.** $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{\Gamma A}$ **iii.** $\overrightarrow{\Gamma M}\cdot\overrightarrow{\Gamma B}$

191. Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με κέντρο Ο, πλευρά 4 και $\hat{A}=60^\circ$.
Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα :



α) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}$ **β)** $\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}$ **γ)** $\overrightarrow{O\Delta}\cdot\overrightarrow{AO}$

δ) $\overrightarrow{O\Delta}\cdot\overrightarrow{OB}$ **ε)** $\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{\Gamma\Delta}$

192. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2,-1)$ και $\vec{\beta}=(-3,2)$.

α) Να υπολογίσετε το γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\left(2\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)$.

β) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\gamma}=(x,y)$ όταν $\vec{\gamma}\perp\vec{\alpha}$ και $|\vec{\gamma}|=\sqrt{5}$.

193. Δίνονται τα σημεία Α(-2 , 3), Β (0 , 8), Γ (5 , 3) και Δ (10 , 5). Να υπολογίσετε:

α) το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

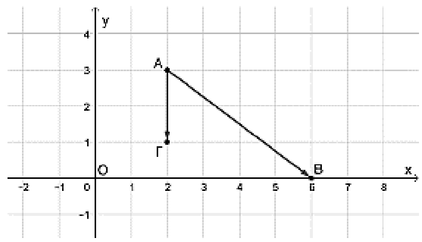
β) τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ με τον άξονα x΄x.

194. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $|\vec{\beta}| = \frac{1}{2}$ και $|3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}| = |\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -\frac{3}{8}$.

β) Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

195. Στο διπλανό σχήμα δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ του καρτεσιανού επιπέδου .



α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} = (4,-3)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (0,-2)$.

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

196. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = (1,1), \vec{w} = (-10,2)$ και τα σημεία Α(−1,2), Β(β, 0), Γ(0, γ).

Τα διανύσματα $\vec{u}, \overrightarrow{AB}$ είναι κάθετα και το διάνυσμα $\vec{w}$ είναι παράλληλο στο διάνυσμα $\overrightarrow{A\Gamma}$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ και να αποδείξετε ότι $\beta = 9$.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{A\Gamma}$ και να αποδείξετε ότι $\vec{\gamma} = \frac{9}{5}$

γ) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$.

197. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$, για τα οποία ισχύουν:

$|\vec{\alpha}| = 4$, $|\vec{\beta}| = 5$, $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = \frac{2\pi}{3}$ και $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$.Να υπολογίσετε:

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

β) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$.

198. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-1,3), \vec{\beta} = \left(-2,-\frac{1}{2}\right)$ και $\vec{v} = (x^2, x-1)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$.

β) Να βρείτε τους αριθμούς x για τους οποίους τα διανύσματα $\vec{u} = (3,4)$ και $\vec{v}$ είναι κάθετα.

γ) Να βρείτε τους αριθμούς x για τους οποίους τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά;

199. Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy, με μοναδιαία διανύσματα των αξόνων x΄x, y΄y τα $\vec{i}, \vec{j}$ αντίστοιχα, τα σημεία A και B έχουν διανύσματα θέσεως

$\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ και $\overrightarrow{OB} = 6\vec{i} - \vec{j}$.

Έστω M ένα σημείο τέτοιο ώστε $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{5}\left(2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$. **ii.** $\overrightarrow{OM} = \vec{j}$.

β) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OM}$.

200. Δίνονται τα σημεία $A(0,-1)$, $B(\lambda,1)$ και $\Gamma(\lambda-2,\lambda-3)$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε :

i. Τα σημεία A, B και Γ να είναι κορυφές τριγώνου.

ii. Το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ορθογώνιο με $A = 90^\circ$.

β) Για $\lambda = -2$,να βρείτε:

i. Το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$.

ii. Το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ

ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ

1. Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ε, αν αυτή έχει εξίσωση:

α) $y = 2x - 1$ **β)** $y = 3 - 5x$ **γ)** $y = \frac{5x - 6}{10}$ **δ)** $x = 2y + 3$

ε) $18x - 6y + 5 = 0$ **στ)** $x = 2$ **ζ)** $y = 2$.

2. Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης, αν υπάρχει, της ευθείας:

α) που διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}(2,-3)$ και $\mathrm{B}(-1,6)$.

β) που διέρχεται από τα σημεία $\Gamma(0,-2)$ και $\Delta(0,3)$.

γ) που είναι κάθετη στη ΓΔ.

3. Να βρεθεί η γωνία ω που σχηματίζει με τον άξονα χ΄χ η ευθεία:

α) που διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}(4,-2)$ και $\mathrm{B}(3,-3)$.

β) που διέρχεται από τα σημεία $\Gamma(3,-1)$ και $\Delta(-2,-1)$.

γ) που διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{E}(4,-2)$ και $\mathrm{Z}(4,1)$.

4. Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα x'x η ευθεία, η οποία έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με:

α) 1 **β)** -1 **γ)** $\sqrt{3}$ **δ)** 0 **ε)** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

5. Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει με άξονα x'x η ευθεία με εξίσωση:

α) $y = x - \frac{1}{2}$ **β)** $y = x\sqrt{3} + 1$ **γ)** $y = 1 - x$ **δ)** $y = 1$

ε) $y = \sqrt{3}$ **στ)** $x = 0$ **ζ)** $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

6. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες : η ευθεία $\varepsilon : y = (\alpha^2 - 10)x + 4$ σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία 135°.

7. Να βρεθεί ο $\alpha \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η ευθεία:

α) ε: $y = (\alpha^2 - \alpha - 2)x + 2$ να σχηματίζει 45° γωνία με τον άξονα x΄x

β) ε: $y = (\alpha^2 - \alpha - \sqrt{3})x + 1$ να σχηματίζει 30° γωνία με τον άξονα y΄y και κανένα σημείο της να μη βρίσκεται στο 1 ο τεταρτημόριο.

<u>ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ</u>

8. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνά από το $A(-1,3)$ και είναι :

α) παράλληλη στην ευθεία $\delta: y=-x+1$

β) κάθετη στην ευθεία δ: $y=\frac{1}{2}x+2$

γ) κάθετη στην ευθεία $\delta: x=5$

δ) παράλληλη στην ευθεία $\delta: y=-2$.

9. Να βρείτε την εξίσωση ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(3,-2)$ και :

α) είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\delta}(2,-5)$

β) είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\delta}(0,-3)$

γ) είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\delta}(-2,0)$

δ) είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\delta}(2,1)$

ε) είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\delta}(0,-4)$

στ) σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία $\hat{\omega}=135^\circ$

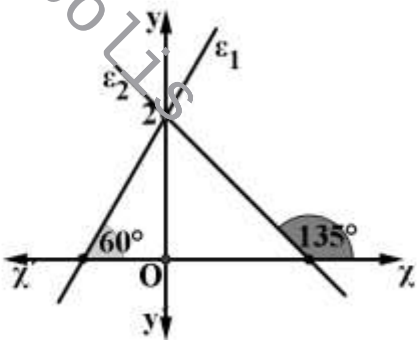
10. Δίνονται τα σημεία $A(1,4)$ και $B(-1,-5)$.

α) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του μέσου Μ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.

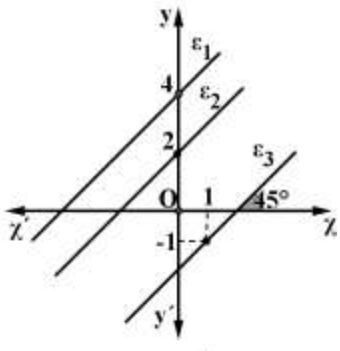
β) Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΑΒ.

γ) Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοκαθέτου ευθείας τον ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

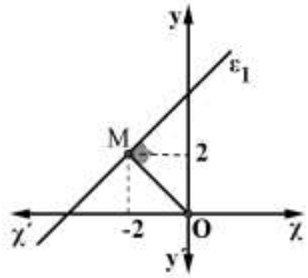
11. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών ε_1 και ε_2 του διπλανού σχήματος.



12. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3$ του διπλανού σχήματος.



13. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε του διπλανού σχήματος.



14. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από τις κορυφές $\mathrm{A}(2,-1), \mathrm{B}(4,-5)$ και $\Gamma(-3,\ 4)$ τριγώνου ΑΒΓ και είναι παράλληλες προς τις απέναντι πλευρές.

15. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που τέμνει τον άξονα χ΄χ στο σημείο $\mathrm{A}(-2,\ 0)$ και είναι παράλληλη στην διχοτόμο της γωνίας $x'\hat{O}y$.

16. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση: $y = 3x - 1$.

<u>**ΤΟΜΕΣ ΕΥΘΕΙΩΝ**</u>

17. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(1,10)$ και από το σημείο τομής των ευθειών :ε_1: $y = 2x + 5$ και $y = -5x - 9$.

18. Δίνεται η ευθεία ε: $y = 3x + 2011$. Να βρείτε :

α) την εξίσωση της ευθείας ζ_1 που είναι παράλληλη στην ευθεία ε και διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(1,-5)$

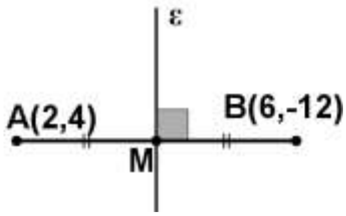
β) την εξίσωση της ευθείας ζ_2 που είναι κάθετη στην ε και διέρχεται από το σημείο $\mathrm{B}(-3,13)$

γ) το σημείο τομής των ευθειών ζ_1 και ζ_2

19.Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = x + 3$, $\varepsilon_2 : y = -2x + 15$ και $\varepsilon_3 : y = 3x - 5$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

20.Δίνονται τα σημεία $A(1,5), B(4,-1), \Gamma(3,7)$ και $\Delta(-1,-9)$. Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών ΑΒ και ΓΔ.

21.Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του τμήματος ΑΒ του διπλανού σχήματος.



22.Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοκαθέτου του τμήματος ΑΒ, όπου $A(-1,0)$ και $B(5,\ 2)$.

ΣΗΜΕΙΟ ΠΟΥ ΑΝΗΚΕΙ ΣΕ ΕΥΘΕΙΑ

23.Δίνονται τα σημεία $A(4,-3)$ και $B(-2,5)$. Να βρείτε :

α) την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία Α και Β.

β) για ποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο $\Gamma(-5, 2\lambda + 1)$.

24.Δίνονται τα σημεία $A(\alpha, \alpha - 3)$ και $B(7\alpha, 3\alpha - 1)$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.Η ευθεία $\varepsilon : y = 3x - 22$ διέρχεται από το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ .Να βρείτε :

α) τον αριθμό α

β) τα σημεία τομής της ευθείας ΑΒ με τους άξονες.

25.Θεωρούμε την ευθεία $y = \lambda x - 5$ και το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (3, \lambda + 4)$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.Η ευθεία ε είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$.

α) Να βρείτε τον αριθμό λ

β) Το σημείο $A(\mu, 7 - \mu)$,με $\mu \in R$,ανήκει στην ευθεία ε .Να βρείτε :

i) τον αριθμό μ

ii) την ευθεία ζ που διέρχεται από το Α και είναι κάθετη στην ε.

ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΟΥ ΩΣ ΠΡΟΣ ΕΥΘΕΙΑ

26.Δίνεται το σημείο $A(-3,5)$ και η ευθεία $y = -\frac{1}{2}x + 1$.Να βρείτε :

α) την προβολή του Α στην ε.

β) το συμμετρικό του Α ως προς την ευθεία ε.

27. Έστω η ευθεία $\varepsilon: y = x + 1$ το σημείο $\mathrm{A}(2,1)$.

α) Να βρεθούν οι συντεταγμένες της προβολής του σημείου Α πάνω στην ε.

β) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του συμμετρικού του Α ως προς την ε.

28. Δίνεται η ευθεία ε: $y = -x + 2$. Να βρείτε τη συμμετρική ευθεία της ε, ως προς:

α) τον άξονα χ΄χ **β)** τον άξονα y΄y

γ) την αρχή Ο των αξόνων **δ)** τη διχοτόμο $y = x$.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

29. Να αποδείξετε ότι :

α) τα σημεία $\mathrm{A}(1,2)$, $\mathrm{B}(3,6)$ και $\Gamma(4,10)$ είναι κορυφές τριγώνου,

β) τα σημεία $\mathrm{A}(1,2)$, $\mathrm{B}(3,\ 6)$ και $\Gamma(4,\ 8)$ δεν είναι κορυφές τριγώνου.

30. Δίνονται τα σημεία $\mathrm{A}(4,\ 5)$, $\mathrm{B}(6,-1)$ και $\Gamma(12,1)$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

β) Να βρείτε σημείο Δ, ώστε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ να είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

31. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία $\mathrm{A}(1,2), \mathrm{B}(-3,-2)$, $\Gamma(3,-4)$. Να βρεθούν οι εξισώσεις του ύψους, της διαμέσου και της μεσοκαθέτου που αντιστοιχούν στην πλευρά ΑΓ.

32. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία $\mathrm{A}(5,2)$, $\mathrm{B}(1,2)$, $\Gamma(3,4)$.
Να υπολογιστούν οι συντελεστές διεύθυνσης των πλευρών και να βρεθεί το είδος του τριγώνου.

33. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία $\mathrm{A}(2,1)$, $\mathrm{B}(-1,-1)$, $\Gamma(-3,2)$.

Να βρεθούν οι εξισώσεις :

α) του φορέα του ύψους ΒΔ

β) του φορέα της διαμέσου ΑΜ

γ) της μεσοκαθέτου της πλευράς ΒΓ

34. Σε τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε: $\mathrm{A}(-8,\ 2)$, $\mathrm{B}(7,\ 4)$ και $\mathrm{H}(5,\ 2)$ το ορθόκεντρο του. Να βρείτε:

α) την εξίσωση της πλευράς ΒΓ

β) τις συντεταγμένες της κορυφής Γ

γ) τις εξισώσεις των πλευρών του.

δ) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη στην ευθεία ΑΒ.

ε) Να βρεθεί το εμβαδόν τον τριγώνου που σχηματίζει η ΑΒ με τους άξονες..

35.Η κορυφή Α τριγώνου ΑΒΓ έχει συντεταγμένες $(2,1)$ και οι ευθείες πάνω στις οποίες βρίσκονται τα δύο ύψη του έχουν εξισώσεις $y=-3x+11$ και $y=x+3$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών Β, Γ του τριγώνου.

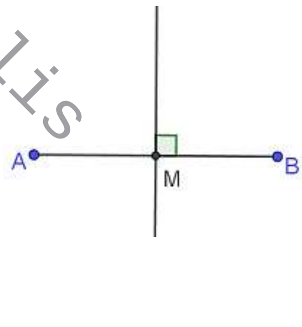
36.Η κορυφή Α ενός τετραγώνου ΑΒΓΔ έχει συντεταγμένες $(3,1)$ και μια πλευρά του βρίσκεται στην ευθεία με εξίσωση $y=x-1$. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών πάνω στις βρίσκονται οι άλλες τρεις πλευρές του τετραγώνου.

37.Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών παραλληλογράμμου που έχει δύο πλευρές με εξισώσεις ε1 $y=\frac{1}{4}x-1$ *και* $y=3x-12$ και το κέντρο του Ο έχει συντεταγμένες $\left(\frac{5}{2},1\right)$.

38.Τα σημεία $\mathrm{A}(2,0)$ και $\mathrm{B}(-1,4)$ είναι διαδοχικές κορυφές τετραγώνου. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του.

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

39.Δίνονται τα σημεία Α(1,-1) και Β(3,5) όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ΑΒ.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Μ του τμήματος ΑΒ.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του τμήματος ΑΒ.

40.Δίνονται τα σημεία $\mathrm{A}(0,5)$ και $\mathrm{B}(6,-1)$.

α) i. Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α και Β.

ii. Να αποδείξετε ότι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, είναι το σημείο $\mathrm{M}(3,2)$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης ευθείας (ε) του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

41. Δίνονται τα σημεία Α(- 3, 2), Β(1, 6) και Γ(- 13,- 7) .

α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα Α, Β.

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα Α, Β έχει εξίσωση $y = x + 5$.

γ) Να αιτιολογήσετε γιατί το σημείο Γ δεν είναι πάνω στην ΑΒ.

42. Δίνονται τα σημεία Α(1,1) και Β(2,3).

α) i) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα Α, Β.

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας ΑΒ είναι η $(\varepsilon): y = 2x - 1$.

β) Να εξετάσετε αν το σημείο Γ $(2^{100}, 5)$ ανήκει στην ευθεία (ε).

43. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι Α(3,- 2) και Γ(5, 2) . Αν το σημείο $M\left(3, \frac{1}{2}\right)$ είναι το μέσο της ΒΓ, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι Β(1,- 1) .

β) Να βρείτε το μήκος της πλευράς ΒΓ.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΑΓ.

44. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι Α(- 1, 5) και Β(2, 1) . Αν οι πλευρές ΑΓ και ΒΓ βρίσκονται πάνω στις ευθείες $\varepsilon_1 : y = -x + 4$ και $\varepsilon_2 : y = -\frac{1}{2}x + 2$ αντίστοιχα, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι Γ(4, 0).

β) Να βρείτε:

i. το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ΑΓ

ii. την εξίσωση του ύψους ΒΔ.

45. Δίνονται τα σημεία Α(-1,5), Β(3,3). Να υπολογίσετε:

α) Τις συντεταγμένες του μέσου Μ του τμήματος ΑΒ.

β) Τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ΑΒ.

γ) Την εξίσωση της μεσοκαθέτου (η) του τμήματος ΑΒ.

46. Δίνεται η ευθεία ε: $-x + y - 2 = 0$ και τα σημεία Α(-5,1) και Β (-3,5).

α) Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου Α ως προς το σημείο Β.

β) Να βρείτε:

i. την εξίσωση της ευθείας ε΄ που διέρχεται από το Β και είναι κάθετη στην ε.

ii. το σημείο τομής των ευθειών ε και ε΄.

iii. το συμμετρικό του σημείου Β ως προς την ευθεία ε.

47. Δίνονται τα σημεία Α(3,2) και Β(-1,-6) . Να βρεθούν:

α) Οι συντεταγμένες του μέσου Μ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

β) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α και Β.

γ) Η εξίσωση της μεσοκαθέτου ευθείας (ε) του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

48. Δίνονται το σημείο Α(4,-2) και η ευθεία $(ε_1)$ με εξίσωση: $x - y + 2 = 0$. Να βρείτε:

α) την ευθεία $(ε_2)$ που διέρχεται από το σημείο Α και είναι κάθετη στην ευθεία $(ε_1)$.

β) το σημείο τομής Β, των ευθειών $(ε_1)$ και $(ε_2)$: $y = -x + 2$.

γ) το συμμετρικό Γ του σημείου Α, ως προς την ευθεία $(ε_1)$.

49. Οι πλευρές ΑΒ και ΑΔ ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ έχουν εξισώσεις $x + 2y + 1 = 0$ και $2x + y + 5 = 0$ αντίστοιχα και το κέντρο του παραλληλογράμμου είναι το σημείο Κ(1,2).

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Η κορυφή Α του παραλληλογράμμου έχει συντεταγμένες Α(-3, 1).

ii. Η κορυφή Γ του παραλληλογράμμου έχει συντεταγμένες Γ(5, 3).

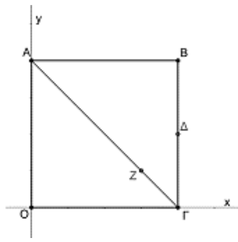
β) Να βρείτε τις εξισώσεις των άλλων δύο πλευρών του ΒΓ και ΓΔ.

50. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με κορυφή Α(1,4). Η πλευρά ΑΔ έχει εξίσωση $3x - 2y + 5 = 0$ και η διαγώνιος ΒΔ έχει εξίσωση $y = x + 2$.

α) Να αποδείξετε ότι η κορυφή Δ έχει συντεταγμένες $Δ(-1,1)$.

β) Αν οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ του τετραπλεύρου τέμνονται κάθετα, να βρείτε την εξίσωση της διαγωνίου ΑΓ.

51. Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΟ με κορυφές τα σημεία Α(0,4), Β(4,4), Γ(4,0), Ο(0,0). Στην διαγώνιο ΑΓ παίρνουμε σημείο Ζ, τέτοιο ώστε $\overrightarrow{ΑΖ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{ΑΓ}$. Επίσης, θεωρούμε το μέσο Δ της ΒΓ.



α) Να βρείτε:

i. Τις συντεταγμένες του σημείου Δ.

ii. Τις συντεταγμένες του σημείου Ζ.

β) Αν το σημείο Δ είναι το (4,2) και το σημείο Ζ το (3,1), να αποδείξετε ότι η ευθεία ΖΔ είναι κάθετη στην ευθεία ΑΓ.

52. Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε το σημείο Μ(2, 1).

α) Μια ευθεία (ε) με συντελεστή διεύθυνσης λ διέρχεται από το Μ. Να βρείτε:

i. Την εξίσωσή της.

ii. Για ποιες τιμές του λ η ευθεία σχηματίζει τρίγωνο με τους άξονες.

β) Έστω ότι η ευθεία (ε) τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y στα σημεία Α, Β αντίστοιχα.

i. Να βρείτε, με τη βοήθεια του λ, τα μήκη των τμημάτων ΟΑ, ΟΒ.

ii. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η ευθεία σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

iii. Να υπολογίσετε, σε κάθε περίπτωση, το εμβαδόν του ισοσκελούς τριγώνου που σχηματίζεται.

53. Δίνονται τα σημεία Α(1,1) ,Β(3,3) .

α) Αν Μ(x, y) σημείο του επιπέδου, να βρείτε τις αποστάσεις d_1, d_2 του Μ από τα Α και Β αντίστοιχα.

β) Να γράψετε τη σχέση που πρέπει να πληρούν οι d_1, d_2, ώστε το σημείο Μ να ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΒ.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του ΑΒ.

δ) Να βρείτε σημείο Σ τέτοιο ώστε το τρίγωνο ΣΑΒ να είναι ισόπλευρο.

54. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο του επιπέδου Μ, τέτοιο ώστε:

$\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{A\Gamma} = \vec{0}$.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Β, Γ, Μ είναι συνευθειακά.

β) Να αποδείξετε ότι το Μ είναι το μέσο του ΒΓ.

γ) Έστω πραγματικοί αριθμοί κ, λ τέτοιοι ώστε $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = \kappa$ και $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{B\Gamma} = \lambda$.

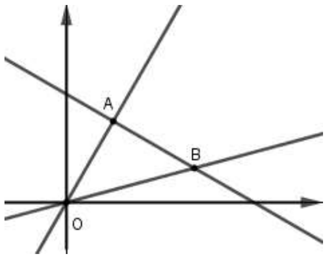
Αν επιπλέον είναι γνωστό ότι για τα μη παράλληλα διανύσματα $\overrightarrow{A\Gamma}, \overrightarrow{AB}$ ισχύει ότι $\kappa\overrightarrow{A\Gamma} = \lambda\overrightarrow{AB}$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $\kappa = \lambda = 0$.

ii. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. Να προσδιορίσετε την ορθή γωνία και τις πλευρές που είναι ίσες.

55. Στο διπλανό σχήμα δίνονται τα σημεία

$O(0,0)$, $A(1,\sqrt{3})$, $B(\sqrt{3}+1, \sqrt{3}-1)$.



α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΟΑ καθώς και τη γωνία ω που σχηματίζει με τον άξονα x΄x.

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΑΒ καθώς και τη γωνία φ που σχηματίζει με τον άξονα x΄x.

γ) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $\hat{A} = 90^\circ$.

δ) Να δείξετε ότι $\varepsilon\varphi 15^\circ = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$.

56. Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε το σημείο Μ(2, 1).

α) Μια ευθεία (ε) με συντελεστή διεύθυνσης λ διέρχεται από το Μ. Να βρείτε:

i. Την εξίσωση της.

ii. Για ποιες τιμές του λ η ευθεία σχηματίζει τρίγωνο με τους άξονες.

β) Έστω ότι η ευθεία (ε) τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y στα σημεία Α, Β αντίστοιχα.

i. Να βρείτε, με τη βοήθεια του λ, τα μήκη των τμημάτων ΟΑ, ΟΒ.

ii. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η ευθεία σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

iii. Να υπολογίσετε, σε κάθε περίπτωση, το εμβαδόν του ισοσκελούς τριγώνου που σχηματίζεται.

57. Θεωρούμε την οικογένεια των ευθειών $\varepsilon_\alpha : (\alpha-4)x - 2\alpha y + \alpha + 4 = 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις ευθείες που προκύπτουν όταν α = 0 και όταν α = 1 και κατόπιν να προσδιορίσετε το κοινό τους σημείο Μ.

β) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες της οικογένειας διέρχονται από το Μ.

γ) Έστω ότι μια ευθεία της παραπάνω οικογένειας τέμνει τους θετικούς ημιάξονες Οx, Oy στα σημεία Α και Β αντίστοιχα.

i. Να αποδείξετε ότι $0 < \alpha < 4$.

ii. Να βρείτε για ποια τιμή του α ισχύει (ΟΑ)= 2(ΟΒ)

58. Δίνονται τα σημεία $A(3,2\alpha)$, $B(4,\alpha)$, $\Gamma(\alpha+1, 1-\alpha)$ και $\Delta(\alpha,1)$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α και Β έχει εξίσωση $y = -\alpha x + 5\alpha$.

ii. Τα σημεία Γ και Δ ανήκουν στην ευθεία ΑΒ αν και μόνο αν $\alpha = \dfrac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$.

iii. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο όταν $\alpha \neq \dfrac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$.

β) Θεωρήστε τον ισχυρισμό:

«Υπάρχει πραγματικός αριθμός α ώστε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ να είναι τετράγωνο.»

Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

59. Δίνονται τα σημεία $A(2,4)$, $B(-1,0)$ και $\Gamma(3,-2)$.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου ΑΒΓ.

β) Αν η ευθεία ΑΒ τέμνει τον άξονα y΄y σε ένα σημείο Δ και η ευθεία ΑΓ τέμνει τον άξονα x΄x σε ένα σημείο Ε, τότε:

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Δ και Ε.

ii. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{A\Delta} = 2\overrightarrow{\Delta B}$ και $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{E\Gamma}$.

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΔΕ είναι παράλληλη της ΒΓ.

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗ ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ</u>

1.Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας, η οποία τέμνει :

α) τον άξονα χ'χ σε σημείο με τετμημένη 2 και τον άξονα y'y σε σημείο με τεταγμένη -3.

β) την ευθεία $x=5$ σε σημείο με τεταγμένη 4 και την ευθεία $y=-2$ σε σημείο με τετμημένη -1.

γ) την ευθεία $y=2x-1$ σε σημείο με τετμημένη 4 και την ευθεία $y=x+1$ σε σημείο με τεταγμένη - 2.

2.Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών: $3x+4y-11=0$ και $2x-3y+21=0$ και είναι:

α) παράλληλη προς την ευθεία $x+2y+1=0$.

β) κάθετη *προς* την ευθεία $3x-y+5=0$.

γ) διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

δ) παράλληλη στον άξονα χ΄χ.

ε) παράλληλη στον άξονα y΄'y.

στ) παράλληλη στη διχοτόμο της πρώτης γωνίας των αξόνων.

ζ) παράλληλη στη διχοτόμο της δεύτερης γωνίας των αξόνων.

3.Δίνονται τα σημεία $\mathrm{B}(-3,7),\Gamma(3,1)$ και οι ευθείες $(\varepsilon_1): 3x-y+2=0$ και $(\varepsilon_2): 2x+y-7=0$ οι οποίες τέμνονται στο σημείο Α. Να βρεθούν :

α) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΒΓ, η γωνία που σχηματίζει η ΒΓ με τον άξονα x΄x και η εξίσωση της ΒΓ.

β) Οι συντεταγμένες του σημείου Α.

γ) Η εξίσωση της διαμέσου ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ και η γωνία των ευθειών ΑΜ, ΒΓ.

δ) η εξίσωση του ύψους ΓΔ του τριγώνου ΑΒΓ.

<u>ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑ ΕΥΘΕΙΩΝ</u>

4.Να βρείτε για ποιες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $(2-\mu)x-(\mu+5)y+\mu-1=0$ παριστάνει :

α) ευθεία.

β) ευθεία ε παράλληλη στον άξονα χ΄χ.,

γ) ευθεία ε παράλληλη στον άξονα y'y.

δ) ευθεία, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

5.Δίνεται η εξίσωση $(x+2y-5)+\lambda(3x-2y+1)=0$ (1) .

α) Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωση παριστάνει ευθεία.

β) Να δείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την (1) διέρχονται από το ίδιο σημείο.

γ) Να βρείτε ποια από τις παραπάνω ευθείες της εξίσωσης (1) :

i) Διέρχεται από το σημείο $A(3,-1)$

ii) Είναι παράλληλη στον χ΄χ

iii) Είναι παράλληλη στον y΄y

iv) Είναι παράλληλη στην ευθεία $4x+3y-5=0$

v) Είναι κάθετη στην ευθεία $x+3y+7=0$

6. Δίνεται η εξίσωση: $(\kappa^2+\kappa-2)x+(k^2-4)y+2\kappa+4=0 \quad (1)$

α) Να βρεθούν οι τιμές του $\kappa\in\mathbb{R}$ ώστε η (1) να παριστάνει ευθεία.

β) Να δείξετε ότι οι ευθείες αυτές διέρχονται από σταθερό σημείο,το οποίο και να βρείτε.

<u>ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ</u>

7. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: \lambda x+8y-4\lambda+4=0$ και $\varepsilon_2: (\lambda-1)x+(\lambda+2)y-3=0.$

Να βρείτε τη σχετική θέση των $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$.

8. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: \lambda x+(\lambda+1)y-3=0$ και $\varepsilon_2: (\lambda-2)x+\lambda y-1=0.$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ οι ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο.

β) Να βρείτε το λ ,ώστε η ευθεία $\zeta: 3x+2y+3=0$ να διέρχεται από το μοναδικό κοινό σημείο των ε_1 και ε_2.

9. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: \lambda x+(\lambda+3)y-6=0$ και $\varepsilon_2: (\lambda-1)x+(\lambda+2)y-3=0.$

α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ , το σημείο τομής Μ των ε_1 και ε_2 κινείται πάνω σε μία ευθεία.

10. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1: 3x+2y-4=0$, $\varepsilon_2: y=-x+1$ και $\varepsilon_3: x+2y=0$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

11. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\mu\in\mathbb{R}$ οι ευθείες $\varepsilon_1: y=\mu x+5$ και $\varepsilon_2: y=(3\mu-4)x+\mu-1$ είναι :

α) παράλληλες **β)** κάθετες

12. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: (\mu+1)x+(\mu+2)y=0$ και $\varepsilon_2: \mu x-(3\mu+2)y+7=0.$ Να βρείτε τον μ, ώστε η γωνία των ε_1 και ε_2 να είναι 90°.

13. Οι ευθείες : ε_1: $(\lambda-6)x+\lambda y+21=0$ και ε_2: $\lambda x+(\lambda+2)y+2=0$ είναι παράλληλες, ενώ οι ευθείες ε_3 : $(7\mu+\lambda)x-(10\mu+2\lambda)y+4=0$ και ε_4 : $(13\mu+3\lambda)x-(\mu-\lambda)y+24=0$ είναι κάθετες .

α) Να βρείτε τις τιμές των ακέραιων αριθμών λ και μ.
β) Αν Α είναι το σημείο τομής των $ε_1$ και $ε_2$ και Β είναι το σημείο τομής των $ε_3$ και $ε_4$ να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$.

ΓΩΝΙΑ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ

14. Να βρείτε την σχετική θέση των ευθειών $ε_1: \; μx - y = μ - 2$ και $ε_2: 3x - y = 1$ για τις διάφορες τιμές του $μ \in R$. Για ποια τιμή του $μ \in R$ η ευθεία $ε_2$ σχηματίζει με την $ε_1$ γωνία ίση με:
α) $\frac{π}{2}$ και **β)** $\frac{π}{4}$.

15. Να βρεθεί η οξεία γωνία των ευθειών $ε_1$: x =2 και $ε_2$: $x\sqrt{3} + 3y - k = 0$.

16. Να βρεθεί η οξεία γωνία των ευθειών $ε_1: y = 2x - 5$ και $ε_2: y = -3x + 1$.

17. Οι ευθείες $ε_1$: $λx + (λ - 6)y - 2 = 0$ και $ε_2$: $(λ + 5)x + (λ - 7)y + 13 = 0$ είναι παράλληλες .Να βρείτε :
α) τον πραγματικό αριθμό λ
β) την οξεία γωνία των ευθειών $ε_1$ και $ε_3$: $3x + 2y - 5 = 0$.

18. Δίνονται οι ευθείες $ε_1: \; αx + y + 3 = 0$ και $ε_2: 5x - 3y + 8 = 0$. Να βρείτε τον αριθμό $α \in \mathbb{R}$,ώστε οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ να σχηματίζουν γωνία 45°.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

19. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(6 - 3λ, 1 + 2λ)$, όταν το λ παίρνει όλες τις πραγματικές τιμές.

20. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(5 - 2μ, 3μ + 4), μ \in \mathbb{R}$.

21. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(λ + 3, 3λ)$. Από τα προηγούμενα σημεία να βρείτε το πλησιέστερο στην αρχή των αξόνων.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $Ax^2 + By^2 + Γxy + Δx + Ey + Z = 0$

22. Δίνεται η εξίσωση : $2x^2 - 2y^2 - 3xy - 7x - y + 3 = 0$ (1)
α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δύο ευθείες ,οι οποίες είναι κάθετες.
β) Να βρείτε το σημείο τομής των δύο ευθειών του ερωτήματος (i)

23. Δίνεται η εξίσωση : $x^2+y^2-2xy-2x+2y-3=0$ (1)

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2.

β) Έστω ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνουν τον άξονα y΄y στα σημεία Α και Β και έστω Μ το μέσο του ΑΒ .Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ζ που διέρχεται από το Μ και είναι παράλληλη στις ε_1 και ε_2.

24. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2y^2-3xy-2x^2=0$ παριστάνει ζεύγος δύο κάθετων μεταξύ τους ευθειών, οι οποίες διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

25. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x+y=6$ και $\varepsilon_1: x-2y=-2$

α) Να βρείτε το κοινό τους σημείο Μ .

β) Να δείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και $\varepsilon_3: 3x-y=4$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

26. Δίνονται οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) με εξισώσεις $x-3y=4$ και $9x+3y=6$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε1) και (ε_2) είναι κάθετες. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνονται στο σημείο Α(1, − 1).

γ) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο Α και είναι κάθετη στον άξονα x΄x.

27. Δίνονται οι εξισώσεις (1): $\lambda x+(\lambda-1)y-4=0$ και (2): $(3\lambda+1)x-2\lambda y-7=0,\ \lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις (1) και (2) παριστάνουν εξισώσεις ευθειών για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε οι ευθείες με εξισώσεις τις (1) και (2) να είναι μεταξύ τους κάθετες.

28. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 3x-y=5$ και $\varepsilon_2: x-y+1=0$.

α) Να βρεθεί το σημείο τομής τους Μ. (Μονάδες 10)

β) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Μ(3,4) και είναι κάθετη στην (ε_2).

β) Να βρεθεί ένα διάνυσμα παράλληλο στην (ε_1).

29. Δίνεται η εξίσωση $(\mu^2-1)x+(3\mu^2-2\mu-1)y-5\mu^2+4\mu+1=0$ (1), όπου $\mu\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του μ η (1) παριστάνει ευθεία ε . (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του μ οι ευθείες ε :

i. είναι παράλληλες στον x΄x .

ii. είναι παράλληλες στον y΄y .

iii. διέρχονται από το (0,0) .

γ) Να δείξετε ότι όλες οι ευθείες ε που προκύπτουν από την (1) διέρχονται από σταθερό σημείο.

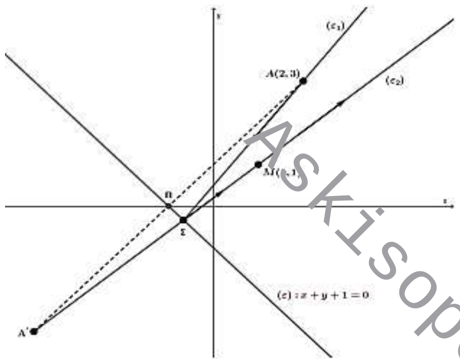
30. Δύο εργοστάσια Α και Β τα οποία σε ένα σύστημα συντεταγμένων έχουν συντεταγμένες Α(2,1), Β(4,3), βρίσκονται κοντά σε μια ακτή που πρόκειται να κατασκευαστεί μια αποβάθρα και θα εξυπηρετεί τα δύο εργοστάσια.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που συνδέει τα δύο εργοστάσια.

β) Αν η ακτή είναι ευθύγραμμη με εξίσωση ε:$y = 2x - 7$, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου της ακτής στο οποίο πρέπει να τοποθετηθεί η αποβάθρα ώστε να απέχει εξ ίσου από τα δύο εργοστάσια.

γ) Αν το ζητούμενο σημείο του ερωτήματος β) είναι Ν(4,1), να βρείτε πόσο απέχει το κάθε εργοστάσιο από το σημείο αυτό.

31. Μία φωτεινή ακτίνα διερχόμενη από το σημείο $A(2,3)$ και προσπίπτουσα στην ευθεία (ε) με εξίσωση $x+y+1=0$, , μετά την ανάκλασή της διέρχεται από το σημείο $M(1,1)$.



α) i. Να αποδείξετε ότι η προβολή του σημείου Α πάνω στην ευθεία (ε) είναι το σημείο $\Pi(-1,0)$.

ii. Να αποδείξετε ότι το συμμετρικό του σημείου Α ως προς την ευθεία (ε) είναι το σημείο $A'(-4.-3)$.

β) i. Αν γνωρίζετε ότι η ανακλώμενη ακτίνα είναι η ευθεία (ε_2) η οποία διέρχεται από τα σημεία Α΄, Σ, Μ, , τότε να βρείτε την εξίσωσή της.

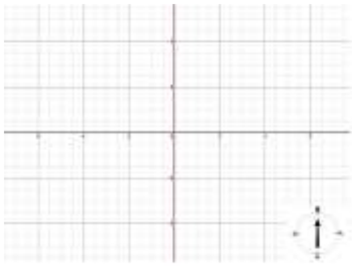
ii. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου πρόσπτωσης Σ της φωτεινής ακτίνας (ε_1) πάνω στην ευθεία (ε).

γ) Αν $\Sigma\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$, τότε να βρείτε την εξίσωση της προσπίπτουσας ακτίνας (ε_1).

32. Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy , η εξίσωση ευθείας $ε_λ$:
$λx + (1-λ)y + 2 = 0$ όπου λ αριθμός που μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$, παριστάνει τη φωτεινή ακτίνα που εκπέμπει ένας περιστρεφόμενος φάρος Φ . Ακόμη δίνεται ότι ένα φορτηγό πλοίο είναι αγκυροβολημένο στο σημείο O(0,0) .

α) i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του φάρου Φ .

ii. Να εξετάσετε αν υπάρχει φωτεινή ακτίνα που εκπέμπεται από το φάρο προς το αγκυροβολημένο πλοίο.



β) Ένα ρυμουλκό πλοίο Ρ βρίσκεται βόρεια του φάρου Φ . Η φωτεινή ακτίνα που φωτίζει το Ρ έχει εξίσωση $x + y + 4 = 0$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Ρ όταν είναι γνωστό ότι η συντομότερη διαδρομή που πρέπει να διανύσει το ρυμουλκό πλοίο για να πάει προς το αγκυροβολημένο φορτηγό πλοίο είναι ίση με 4 μονάδες μήκους.

33. Δίνονται οι ευθείες $ε_1 : y = \sqrt{3}x$ και $ε_2 : y = x$.

α) Να σχεδιάσετε τις $ε_1, ε_2$ στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει κάθε μια από τις ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ με τον άξονα x΄x.

γ) Να αιτιολογήσετε γιατί η οξεία γωνία των $ε_1, ε_2$ είναι 15° .

δ) Να αποδείξετε ότι $συν15^\circ = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$.

34. Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy θεωρούμε το τρίγωνο που ορίζεται από τα σημεία O(0, 0), B(κ, 0) και Γ(0,2κ) όπου κ θετικός πραγματικός αριθμός. Εξωτερικά του τριγώνου ΟΒΓ κατασκευάζουμε τετράγωνα ΟΒΔΕ και ΟΓΖΗ, τότε:

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που ανήκουν τα ευθύγραμμα τμήματα ΓΔ και ΒΖ.

β) Να βρεθεί η εξίσωση του ύψους του τριγώνου ΟΒΓ που διέρχεται από το Ο.

γ) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΓΔ, ΒΖ και το ύψος του β) ερωτήματος διέρχονται από το ίδιο σημείο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΑΠΟ ΕΥΘΕΙΑ

1.α) Να βρεθεί η απόσταση του σημείου $\mathrm{M}(2,-3)$ από την ευθεία $\mathrm{y}=\frac{4}{3}\mathrm{x}+\frac{2}{3}$.

β) Να βρεθεί η απόσταση της αρχής Ο των αξόνων από την ίδια ευθεία $\mathrm{y}=\frac{4}{3}\mathrm{x}+\frac{2}{3}$.

2. Να βρεθεί το σημείο του άξονα y'y που ισαπέχει από την αρχή των αξόνων και από την ευθεία $\varepsilon: 4x-3y+24=0$.

3. Να βρείτε τα σημεία της ευθείας $\varepsilon: x+y-2=0$ που απέχουν από την ευθεία $\zeta: 3x+4y-10=0$ απόσταση ίση με 2.

4. Να υπολογισθεί το μήκος του ύψους ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ στο οποίο $\mathrm{A}(4,13)$, $\mathrm{B}(10,1)$, $\Gamma(-2,5)$.

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ

5. Να βρείτε τις ευθείες που είναι παράλληλες στην ευθεία $\zeta: 3x+y-2011=0$ και απέχουν από το σημείο $A(-4,2)$ απόσταση ίση με $2\sqrt{10}$.

6. Να βρείτε τις ευθείες που σχηματίζουν με τον άξονα χ΄χ γωνία 45° και απέχουν από το σημείο $\mathrm{A}(2,5)$ απόσταση ίση με $3\sqrt{2}$

7. Δίνεται η ευθεία $\zeta: x+2y-15=0$ και το σημείο $\mathrm{A}(3,1)$. Να βρείτε:

α) την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ζ,

β) τις ευθείες που είναι κάθετες στη ζ και απέχουν από το Α απόσταση ίση με $\sqrt{20}$.

8. Να βρείτε τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο $\mathrm{P}(6,5)$ και απέχουν από το σημείο $\mathrm{A}(3,-1)$ απόσταση ίση με 3.

9. Να βρείτε την ευθεία ε που είναι παράλληλη στην ευθεία ζ: $6x-3y-13=0$ και ισαπέχει από τα σημεία $\mathrm{A}(1,-4)$ και $\mathrm{B}(5,2)$.

ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ

10.Να βρείτε την απόσταση των ευθειών $\varepsilon_1: 4x-6y+5=0$ και ε_2: $y=\frac{2}{3}x+1$.

11.Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x-y+1=0$ και $\varepsilon_2: 3x-4y-1=0$. Να βρείτε σημείο Μ της ε_1 που απέχει από την ε_2 απόσταση ίση με 1 μονάδα

12.Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών, οι οποίες είναι παράλληλες προς την ευθεία ε: $y=\frac{3}{4}x-2$ και απέχουν από αυτή απόσταση ίση με 2.

13.Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: y=3x-4$ και $\varepsilon_2: y=3x+20$. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας ε, η οποία απέχει από τις ε_1, ε_2 αντίστοιχα αποστάσεις με λόγο $\frac{2}{3}$.

14.Η μια πλευρά τετραγώνου ΑΒΓΔ, με $\mathrm{A}(2,-1)$, βρίσκεται πάνω στην ευθεία $\varepsilon: 3x-4y+20=0$. Να βρείτε το εμβαδόν του τετραγώνου.

15.Να υπολογίσετε το εμβαδόν ενός τετραγώνου του οποίου οι δύο πλευρές βρίσκονται πάνω στις ευθείες $\varepsilon: 5x-12y-60=0$ και $\zeta: 5x-12y+31=0$.

16.α) Να βρείτε την απόσταση των παράλληλων ευθειών που παριστάνει η εξίσωση $x^2+2xy+y^2-2x-2y-\mu^2=0$.

β) Για ποια τιμή του μ η απόσταση των παραπάνω ευθειών είναι ίση με $\sqrt{10}$;

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ-ΜΕΣΟΠΑΡΑΛΛΗΛΗ - ΔΙΧΟΤΟΜΟΣ

17.Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που είναι μεσοπαράλληλη των ευθειών:

α) $\varepsilon_1: 3x-y+1=0$ και $\varepsilon_2: -6x+2y-3=0$.

β) $\varepsilon_2: x=4$ και $\varepsilon_2: x=-6$.

γ) $\varepsilon_1: y=x$ και $\varepsilon_2: y=x-3$.

18. Η ευθεία ε : y = $\frac{5}{12}$x + 3 είναι η μεσοπαράλληλος δύο ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, οι οποίες απέχουν μεταξύ τους απόσταση ίση με 8. Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών αυτών.

19. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: \ 3x - 4y + 1 = 0$ και $\varepsilon_2: \ 8x - 6y + 5 = 0$. Να βρείτε :

α) τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_2

β) ποια από τις παραπάνω διχοτόμους αντιστοιχεί στην οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_2.

20. Δίνονται τα σημεία $A(3,1)$ και $B(13,6)$. Έστω ε_1 η ευθεία που διέρχεται από το σημείο Α και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{v} = (3,6)$ και ε_2 η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α και Β. Να βρείτε :

α) τις εξισώσεις των ευθειών ε_1 και ε_2.

β) την απόσταση του σημείου Β από την ευθεία ε_1.

γ) τις διχοτόμους των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_2.

<u>ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ</u>

21. Δίνονται τα σημεία $A(-2,1), B(3,4)$ και $\Gamma(1,-6)$. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

22. Να βρεθεί το εμβαδόν του τετραπλεύρου που έχει κορυφές τα σημεία $A(1,-2), B(-2,3), \Gamma(-1,-4)$ και $\Delta(5,\ 0)$.

23. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, του οποίου οι τρεις κορυφές είναι τα σημεία $A(-1,\ 5),\ B(5,-3),\ \Gamma(-2,3)$.

24. Δίνονται τα σημεία $A(8,3)$ και $B(6,-1)$. Να βρείτε σημείο Γ του άξονα χ΄χ, ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να έχει εμβαδόν 7 τ.μ.

25. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Μ το μέσο της πλευράς ΒΓ. Αν ισχύει ότι $\overrightarrow{B\Gamma} = (8,4)$ και $\overrightarrow{AM} = (1,-3)$,να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

26. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που είναι παράλληλες προς την ευθεία $\varepsilon: 2x - 3y - 12 = 0$
και οι οποίες ορίζουν με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν ίσο με 12τμ.

27. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας, η οποία διέρχεται από το σημείο Ρ(-2, 6) και σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν 3.

28. Έστω τα σημεία $A(1,2), B(-3,4)$, $\Gamma(2\lambda+1,-\lambda+1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. .

α) Να δειχθεί ότι τα σημεία Α , Β , Γ είναι κορυφές τριγώνου με σταθερό εμβαδό για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι το σημείο Γ κινείται πάνω σε ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

γ) Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το σημείο $\Gamma(2\lambda+1,-\lambda+1)$ να απέχει από την αρχή των αξόνων την ελάχιστη απόσταση .

ΕΛΑΧΙΣΤΗ ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΕΥΘΕΙΑΣ ΑΠΟ ΣΤΑΘΕΡΟ ΣΗΜΕΙΟ

29.Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: x+2y-6=0$. Να βρείτε :

α) τη μικρότερη απόσταση που απέχει ένα σημείο της ευθείας ε από την αρχή των αξόνων.

β) ποιο σημείο της ευθείας ε απέχει τη μικρότερη απόσταση από το σημείο $M(2,-3)$.

30.Δίνονται τα σημεία $A(-2,4)$ και $B(8,-1)$.

α) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ ,όπου Ο η αρχή των αξόνων.

β) Έστω η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α και Β .Να βρείτε :

i) την εξίσωση της ευθείας ε.

ii) ποιο σημείο της ευθείας ε απέχει τη μικρότερη απόσταση από το σημείο $\Gamma(5,3)$.

31.Θεωρούμε τα σημεία $M(\lambda-4, 3\lambda-2)$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του λ τα σημεία Μ κινούνται σε ευθεία ε της οποίας να βρείτε την εξίσωση

β) Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση που απέχει ένα σημείο της ευθείας ε από την αρχή των αξόνων.

32.Οι ευθείες $\varepsilon_1: \lambda x+(\lambda-1)y-5=0$ και $\varepsilon_2: (\lambda+1)x-(\lambda+4)y-15=0$ είναι κάθετες. Να βρείτε:

α) τον αριθμό λ

β) το σημείο τομής των ευθειών ε_1 και ε_2.

γ) την ελάχιστη απόσταση που απέχει ένα σημείο της ευθείας ε_1 από την αρχή των αξόνων ,καθώς και ποιο είναι το σημείο αυτό.

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

33. Δίνονται τα σημεία $A(0,2), B(3,0)$ και $\Gamma(1,1)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}$.

β) i. Να εξετάσετε αν τα σημεία Α, Β και Γ ορίζουν τρίγωνο.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

34. Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1) : 8\chi + \psi - 28 = 0$, $(\varepsilon_2) : \chi - \psi + 1 = 0$, $(\varepsilon_3) : 3\chi + 4\psi + 5 = 0$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Μ των (ε_1) και (ε_2).

β) Αν το σημείο τομής είναι το Μ(3,4) να υπολογίσετε:

i. Το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{OM}$, όπου Ο η αρχή των αξόνων.

ii. Την απόσταση του σημείου Μ από την ευθεία (ε_3).

35. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = \frac{2}{3}x + 1$ και $\varepsilon_2 : x = \frac{3}{2}y + 9$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

β) Να υπολογίσετε την απόσταση των ευθειών ε_1 και ε_2.

36. Δίνονται οι ευθείες (ε_1), (ε_2) και (ε_3) με εξισώσεις $x - 2y = -1$, $2x + y = 4$ και $y = -1$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι κάθετες.

β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνονται στο σημείο $A\left(\frac{7}{5}, \frac{6}{5}\right)$.

γ) Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία (ε_3).

37. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές Α(1,7), Β(-1,5) και Γ(3,3).

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, τότε να υπολογίσετε:

i. Τις συντεταγμένες του Μ.

ii. Την εξίσωση της διαμέσου ΑΜ.

38. Δίνονται τα σημεία Α(2,1), Γ(4,-1) και το διάνυσμα $\overrightarrow{AB} = (3,-1)$.

α) Να βρεθεί το σημείο Β.

β) Αν Β(5,0):

i. Να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ σχηματίζουν τρίγωνο.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 08)

39. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία Α(2,5), Β(3,6) και Γ(-1,-2).

α) Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ΒΓ.

β) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους που άγεται από το Α.

γ) Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει η ευθεία ΑΒ με τον άξονα x΄x.

40. Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε τα σημεία
Α(1,1), Β(5,2), Γ(0,-2) και Δ(8,0).

α) Να τοποθετήσετε τα παραπάνω σημεία του επιπέδου σε ένα πρόχειρο σχήμα και να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία αυτά είναι τραπέζιο.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου του ερωτήματος α).

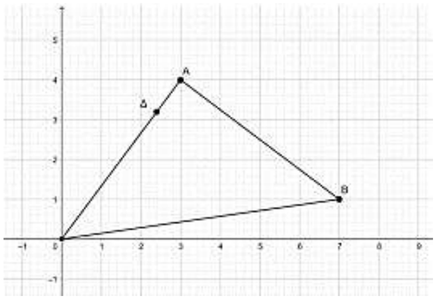
41. Δίνεται το σημείο Α(1, 2) και η ευθεία (ε): y =x + 3.

α) Να βρείτε την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία (ε) .

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (η) που διέρχεται από το Α και είναι παράλληλη στην (ε) .

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων τις ευθείες (η) ,(ε) .

42. Δίνεται το τρίγωνο ΑΟΒ με Α(3, 4), Β(7,1), Ο η αρχή των αξόνων και το σημείο $\Delta\left(\frac{12}{5},\frac{16}{5}\right)$ της πλευράς ΑΟ.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}$.

β) Να δείξετε ότι $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}=\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$.

γ) Δίνεται ότι $\left(\mathrm{OAB}\right)=\frac{25}{2}$ τετραγωνικές μονάδες.

Να δείξετε ότι $\left(\mathrm{A\Delta B}\right)=\frac{1}{5}\left(\mathrm{OAB}\right)$.

43. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x+3y=5$ και $\varepsilon_2: 4x+6y=8$.

α) Να δείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ είναι παράλληλες.

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο Α(1,1) είναι σημείο της ευθείας ε_1.

γ) Να βρείτε την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ε_2.

44. Η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο Α(-3, -1) και σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία $\frac{3\pi}{4}$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε.

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου, που σχηματίζει η ευθεία ε με τους άξονες x΄x και y΄y, είναι: Ε = 8.

45. Θεωρούμε τα σημεία Α(− 2,− 3) και Β(7, 9). Έστω S το σύνολο των σημείων Μ που είναι κορυφές των τριγώνων ΑΜΒ ώστε (ΑΜΒ) = 12 τ.μ.

α) Να αποδείξτε ότι το S αποτελείται από τα σημεία των παραλλήλων ευθειών $(\varepsilon_1): 4x-3y-9=0$ και $(\varepsilon_2): 4x-3y+7=0$.

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΒ είναι η μεσοπαράλληλη των (ε_1) και (ε_2).

γ) Θεωρούμε ένα σημείο M_1 στην (ε_1) και ένα σημείο M_2 στην (ε_2) ώστε να σχηματίζεται το τετράπλευρο AM_1BM_2. Πόσο είναι το εμβαδόν του; Πόσα τετράπλευρα ΑΧΒΥ υπάρχουν, αν το Χ πρέπει να είναι σημείο της (ε_1) και το Υ σημείο της (ε_2), που έχουν το ίδιο εμβαδό με το AM_1BM_2; Εξηγήστε.

46. Δίνονται τα σημεία του επιπέδου Α(1,1), Β(4,4) και Γ(3,1).

α) Να δείξετε ότι τα σημεία αυτά σχηματίζουν τρίγωνο.

β) Να δείξετε ότι η μεσοκάθετος του τμήματος ΒΓ είναι η ευθεία $(\varepsilon): y=-\frac{1}{3}x+\frac{11}{3}$.

γ) Να βρείτε σημείο Κ της ευθείας (ε) του β) ερωτήματος τέτοιο ώστε (ΚΑ) = (ΚΒ) . Τι ιδιότητα έχει το σημείο Κ ;

47. Θεωρούμε τα σταθερά σημεία Α(3,4), Β(2,5) και Γ(- 2,2) και το μεταβλητό σημείο $M(4\alpha-1,\ 3\alpha+1)$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι τα Α, Β, Γ σχηματίζουν τρίγωνο.

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΒΓ.

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ κινούνται στην ευθεία που διέρχεται από το Α και είναι παράλληλη στην ΒΓ.

δ) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε θέση του σημείου Μ ισχύει (ΜΒΓ) = (ΑΒΓ) Πως αιτιολογείται αυτό γεωμετρικά;

48. Δίνονται τα σημεία Α(1,3), Β(−2,2) και η ευθεία ε: $3x+y+\alpha=0$, με $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποια τιμή του α, η απόσταση του σημείου Α από το σημείο Β είναι ίση με την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ε.

β) Για α = 4

i. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ, όπου Γ το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα y΄y.

ii. Να βρείτε το σημείο της ευθείας ε που απέχει την μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων.

49. Δύο οικισμοί Α και Β βρίσκονται στις θέσεις που ορίζουν τα σημεία Α(−1,−2) και Β(3,1). Εξωτερικά των οικισμών υπάρχει ευθύγραμμος δρόμος με εξίσωση δ: $x+y-1=0$.

α) Να βρείτε σε ποια θέση του δρόμου δ:

i. Ο οικισμός Α έχει τη μικρότερη απόσταση από τον δρόμο.

ii. Υπάρχει το Κέντρο Υγείας της περιοχής, αν είναι γνωστό ότι ισαπέχει από τους δύο οικισμούς.

β) Να βρείτε τη θέση Γ ενός αυτοκινήτου πάνω στο δρόμο, αν είναι γνωστό, ότι το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν τα τρία σημεία Α, Β και Γ είναι ίσο με 8.

50. Δίνονται τα σημεία $O(0,0)$, $A(\alpha,0)$, $B\left(\frac{\alpha}{2},\beta\right)$ και $M\left(\frac{\alpha}{2},0\right)$ που α, β, σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί.

α) Να μεταφέρετε τα παραπάνω σημεία σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων. Κατόπιν, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές και το σημείο Μ είναι το μέσο της βάσης του ΟΑ.

β) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις των ευθειών ΟΒ και ΑΒ είναι $OB:\ 2\beta x-\alpha y=0$ και $AB: 2\beta x+\alpha y-2\alpha\beta=0$ αντίστοιχα.

γ) Αν d_1 είναι η απόσταση του σημείου Μ από την ευθεία ΟΒ και d_2 η απόσταση του σημείου Μ από την ευθεία ΑΒ, να αποδείξετε ότι $d_1=d_2$.

δ) Ποια πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχει αποδειχθεί;

51. Δίνονται τα σημεία Α(1,1) και Β(2,3)

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας ΑΒ είναι η (ε): $y=2x-1$.

β) Να αιτιολογήσετε αν το σημείο Γ $(2^{100}, 5)$ ανήκει ή όχι στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την ευθεία (ε) και την αρχή των αξόνων Ο(0,0).

γ) Να αιτιολογήσετε αν το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από το εμβαδόν του τριγώνου ΑΟΒ.

52. Δίνονται τα σημεία Α(2,0), Β(3,4) και $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) i. Να βρείτε την εξίσωση που περιγράφει όλες τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο Α και έχουν κλίση λ.

ii. Να αποδείξετε ότι η ευθεία, η οποία διέρχεται από το σημείο Α, έχει κλίση λ και απέχει απόσταση ίση με 1 από το σημείο Β, έχει εξίσωση (ε): $15x-8y-30=0$.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει και άλλη ευθεία (ζ), εκτός από την (ε), η οποία διέρχεται από το σημείο Α και απέχει απόσταση ίση με 1 από το σημείο Β.

γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες (ε) και (ζ).

53. Στο χάρτη μίας πεδινής περιοχής, που είναι εφοδιασμένος με ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, δύο κωμοπόλεις Α και Β έχουν συντεταγμένες Α(3,6) και Β(7,-2).

α) Ανάμεσα στις δύο κωμοπόλεις, θα κατασκευαστεί ευθεία σιδηροδρομική γραμμή, κάθε σημείο της οποίας θα ισαπέχει από αυτές. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, πάνω στην οποία βρίσκεται η σιδηροδρομική γραμμή.

β) Πάνω στην σιδηροδρομική γραμμή θα κατασκευαστεί σταθμός Σ, ώστε το εμβαδόν της περιοχής που ορίζεται από τα σημεία Α, Β και Σ να ισούται με 20 τετραγωνικές μονάδες. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σταθμού Σ στο χάρτη.

54. Υποθέτουμε, ότι σε ένα επίπεδο που έχουμε εφοδιάσει με ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, κινούνται δύο σημεία A και B. Κάθε χρονική στιγμή t με $t \geq 0$ η θέση του πρώτου σημείου είναι $A(t-1, 2t-1)$ και του δευτέρου $B(3t-1, -4t-1)$.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των γραμμών πάνω στις οποίες κινούνται τα δύο σημεία.

β) Υπάρχει χρονική στιγμή κατά την οποία τα δύο σημεία ταυτίζονται;

γ) Να υπολογιστεί η απόσταση των δύο σημείων την χρονική στιγμή t=2.

δ) Να βρεθεί η χρονική στιγμή t κατά την οποία η απόσταση του σημείου A από την ευθεία ε: $4x+3y+7=0$ ισούται με 6.

55. Σε χάρτη με καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων η θέση ενός λιμανιού προσδιορίζεται από το σημείο Λ(2,6) και η θέση ενός πλοίου με το σημείο Π(λ-1, 2+λ), $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) i. Αν το πλοίο κινείται ευθύγραμμα, να βρείτε την εξίσωση της τροχιάς του.

ii. Να εξετάσετε αν το πλοίο θα περάσει από το λιμάνι.

β) Αν τελικά το πλοίο δεν περάσει από το λιμάνι, να βρείτε:

i. Ποια είναι η ελάχιστη απόσταση του πλοίου από το λιμάνι;

ii. Το σημείο του καρτεσιανού επιπέδου που βρίσκεται το πλοίο, όταν απέχει την ελάχιστη απόσταση από το λιμάνι.

56. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία Α(-2, 1), Β(1, 5) και Γ(5, -1).

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΒΓ. (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους του τριγώνου από την κορυφή Α. Στη συνέχεια να βρείτε το σημείο Δ της ευθείας ΒΓ, από το οποίο, το Α απέχει την ελάχιστη απόσταση.

δ) Να βρείτε το σύνολο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει: $(MAB) = \frac{1}{2}(AB\Gamma)$.

57. Στο καρτεσιανό επίπεδο δίνονται τα σημεία Α(1, –1), Β(2, 2) και Γ(μ–1, 3μ–2), $\mu \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι καθώς το μ διατρέχει το R, το σημείο Γ κινείται στην ευθεία ε: y = 3x +1.

β) Να αποδείξετε ότι καθώς το μ διατρέχει το $\mathbb{R}$, τα σημεία Α, Β, Γ είναι κορυφές τριγώνου.

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι σταθερό.

δ) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο Β και από τις οποίες το σημείο Α, απέχει απόσταση ίση με 1.

58. Δίνεται η εξίσωση $(2\lambda+1)x-(\lambda-2)y+\lambda-7=0\ (E)$ με $\lambda\in\mathbb{R}$ και η ευθεία (ζ) με εξίσωση: $6x-8y+3=0$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ η εξίσωση (Ε) παριστάνει ευθεία.

β) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (Ε), για τα διάφορα $\lambda\in\mathbb{R}$,διέρχονται από το ίδιο σημείο, του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε ευθεία (ε) που ορίζεται από την εξίσωση (Ε) να είναι παράλληλη στη ευθεία (ζ). Ποια είναι η εξίσωση της (ε);

δ) Να βρείτε την απόσταση του σημείου Μ(1,3) από την ευθεία (ζ).

ΚΥΚΛΟΣ

<u>Η εξίσωση του κύκλου</u>

1.Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα των κύκλων με εξισώσεις:

α) $(x-3)^2+(y-1)^2=25$

β) $(x+2)^2+y^2=4$

γ) $x^2+(y-3)^2=50$

δ) $x^2+y^2=5$

2. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου, ο οποίος έχει κέντρο το σημείο $\mathrm{K}(5,-3)$ και επιπλέον:

α) έχει ακτίνα ίση με 3,

β) διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(-6,8)$,

γ) εφάπτεται της ευθείας $\varepsilon\ :\ 2x-y+5=0$.

3.Δίνεται κύκλος C κέντρου K ο οποίος διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}(-2,1)$ και $\mathrm{B}(6,5)$, και το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{KB}}$ που έχει συντελεστή διεύθυνσης 3.

α) Να βρεθεί την εξίσωση του κύκλου C,

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $\Gamma(2,5)$ ανήκει στον κύκλο C και να βρείτε το αντιδιαμετρικό σημείο

4.Θεωρούμε τον κύκλο C_1 που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(4,-3)$ και τον κύκλο C_2 που έχει διάμετρο ΒΓ με $\mathrm{B}(3,2)$ και $\Gamma(-1,4)$.
Να βρείτε:

α) τις εξισώσεις των κύκλων C_1 και C_2,

β) τα σημεία τομής των κύκλων C_1 και C_2.

5.Δίνεται κύκλος με εξίσωση : $(x-3)^2+(y+4)^2=9$.

α) Να βρείτε το κέντρο K και την ακτίνα ρ του κύκλου

β) Να εξετάσετε ποια από τα σημεία $\mathrm{M}(3,0), \mathrm{N}(0,-4), \mathrm{P}(3,-7)$ και $\Sigma(1,1)$ είναι σημεία του κύκλου.

γ) Να εξετάσετε αν το σημείο $\mathrm{O}(0,0)$ είναι εσωτερικό ή εξωτερικό σημείο του κύκλου.

6.Δίνεται κύκλος C_1 με κέντρο $\mathrm{K}(-2,-2)$, ο οποίος διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(-5,-3)$ και ο κύκλος C_2 με κέντρο $\Lambda(1,4)$, ο οποίος εφάπτεται στην ευθεία $\varepsilon\ : 4x-3y-17=0$.Να βρείτε :

α) τις εξισώσεις των κύκλων C_1 και C_2.

β) τα κοινά σημεία τομής Β και Γ των κύκλων C_1 και C_2.

γ) την εξίσωση του κύκλου C_3 που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ .

7. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου, ο οποίος έχει ακτίνα ρ = 10, διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(2,1)$ και το κέντρο του είναι σημείο της ευθείας $\varepsilon\ : x-y+1\ =0$.

8.Να αποδείξετε ότι το σημείο $\mathrm{A}(2,-\ 5)$ ανήκει στον κύκλο $C:(x-1)^2+(y+2)^2=10$ και να βρείτε το αντιδιαμετρικό σημείο Α΄ του Α.

9.Δίνονται τα σημεία $\mathrm{A}(-1,3),\mathrm{B}(3,\ 5)$ και $\Gamma(2,6)$.

α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΑΓ και ΒΓ είναι κάθετες.

β) Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.

10.Θεωρούμε τον κύκλο $C: x^2+y^2=50$ και το σημείο $\mathrm{M}(6,-2)$.

α) Να αποδείξετε ότι το Μ είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου C.

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε, η οποία ορίζει στον κύκλο C χορδή με μέσο Μ**.**

11.Δίνεται ο κύκλος $x^2+y^2=10$ και το σημείο $\mathrm{M}(-2,2)$. Να βρείτε την εξίσωση της χορδής του κύκλου που έχει μέσον το σημείο Μ.

12.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{A}(-3,1),\mathrm{B}(3,7)$ και $\Gamma(-1,-5)$. Να βρείτε :

α) τις εξισώσεις των μεσοκαθέτων των πλευρών ΑΒ και ΑΓ

β) την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.

Η εξίσωση : $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$

13.Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{K}(1,\ 1),\Lambda(1,-1)$ και $\mathrm{M}(2,0)$.

14.Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα των κύκλων:

α) $x^2+y^2-10x+2y+22=0$ **β)** $x^2+y^2+6x+8=0$

γ) $x(x-1)+(y+1)(y-3)=0$ **δ)** $(x+y)^2-2y=2x(\alpha+y)$

ε) $2x^2+2y^2-4x+1=0$ **ζ)** $(2x-1)^2+(2y+3)^2=4$.

15.Δείξτε ότι οι παρακάτω εξισώσεις παριστάνουν κύκλο και βρείτε το κέντρο και την ακτίνα των κύκλων αυτών. Μετά να τους γράψετε και με άλλη μορφή .

α) $x^2+y^2+4x-6y-3=0$ **β)** $x^2+y^2-4\alpha x+10\beta y+4\alpha^2+16\beta^2=0$.

16.Να αποδείξετε ότι καθένας από τους κύκλους $C_1: x^2+y^2-6x-2y-15=0$ και $C_2: x^2+y^2+6y-16=0$ διέρχεται από το κέντρο του άλλου.

17.Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου, ο οποίος είναι ομόκεντρος του κύκλου $C': x^2+y^2-2x+4y-5=0$ και :

α) έχει διπλάσια ακτίνα από αυτόν.

β) εφάπτεται της ευθείας $\varepsilon: y=-x+1$.

γ) διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}\,(3,\ 4)$.

18.Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περιέχει μία διάμετρο του κύκλου $C: x^2+y^2+4x-6y-17=0$ και είναι κάθετη στην ευθεία $(\varepsilon): 5x+2y=13$.

19.Να δειχτεί ότι οι κύκλοι με εξισώσεις : $(C_1): x^2+y^2+2x-8y+13=0$, $(C_2): 4x^2+4y^2-40x+8y+79=0$ δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

20.Να αποδειχτεί ότι οι κύκλοι : $(C_1): x^2+y^2-2x-4y+1=0$, $(C_2): x^2+y^2-4x-2y-5=0$ τέμνονται και ότι η κοινή χορδή τους είναι κάθετη στη διάκεντρο τους.

21.Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση $x^2+y^2+10x-6y+3\lambda-2=0$ παριστάνει κύκλο.

22.Δίνεται η εξίσωση : $x^2+y^2+\lambda x+(2-\lambda)y+\lambda+7=0$ (1)

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο .

β) Έστω ότι η εξίσωση (2) παριστάνει κύκλο C του οποίου το κέντρο K απέχει από την ευθεία $\varepsilon: 3x+4y+5=0$ απόσταση ίση με $\frac{2}{5}$.Να βρείτε

i) τον αριθμό λ

ii) την εξίσωση του κύκλου C_1 που είναι ομόκεντρος με τον κύκλο C και διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(-5,2)$.

<u>Εφαπτόμενες κύκλου</u>

23.Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2=9$ η οποία:

α) Διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(0,9)$.

β) Διέρχεται από το σημείο $\mathrm{B}(9,0)$.

γ) Διέρχεται από το σημείο $\Gamma(3,4)$.

δ) Είναι παράλληλη στην ευθεία $2\sqrt{2}x+y+2=0$.

24.Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης :

α) του κύκλου $(x-2)^2+(y+1)^2=4$ στο σημείο του $\mathrm{A}(4,-1)$.

β) του κύκλου $x^2+y^2+2x-6y+5=0$ που διέρχεται από το σημείο $\mathrm{B}(-4,4)$.

γ) του κύκλου $(x-2)^2+(y+1)^2=5$ που είναι παράλληλη στην ευθεία $y=2x+5$.

25.α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $C: x^2+y^2=5$ στο σημείο του $\mathrm{A}(-2,1)$.

β) Ομοίως αν $C: x^2+y^2=1$ και $\mathrm{A}(\sigma\upsilon\nu\theta, -\eta\mu\theta)$.

γ) Ομοίως αν $C: x^2+y^2=9$ και $\mathrm{A}(-3,\ 0)$.

26.Να βρεθεί η εφαπτομένη του κύκλου $C: x^2+y^2+2x-6y+1=0$, στο σημείο του $A(2,3)$.

27.Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $C: x^2+y^2+\ 2x-10y+1=0$ στο σημείο του Α(3,2).

28.Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon\ : y=x-4$ εφάπτεται του κύκλου $C: x^2+y^2-4x+2=0$ και να βρείτε το σημείο επαφής.

29.Δίνεται ο κύκλος $(x-3)^2+(y-2)^2=25$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο $\mathrm{A}(-1,\ 5)$. Να δείξετε ότι η ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου, $c: x^2+y^2+2x-8=0$.

30.Δίνεται ο κύκλος C με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho=5$.Να βρείτε :

α) την εξίσωση του κύκλου C .

β) τις εφαπτομένες του κύκλου C στα σημεία του $\mathrm{A}(3,-4), \mathrm{B}(0,5)$ και $\Gamma(-5,0)$.

31.Δίνεται η ευθεία $y=\lambda x$ και ο κύκλος $x^2+y^2-4x+1=0$. Να βρεθεί η τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε η ευθεία:

α) να τέμνει τον κύκλο.

β) να εφάπτεται του κύκλου.

γ) να μην έχει κοινά σημεία με τον κύκλο.

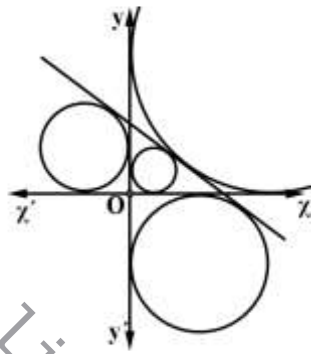
32. Δίνεται ο κύκλος C με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho=\sqrt{5}$.
Να βρείτε :
α) Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου C .

β) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος C διέρχεται από το $A(1,-2)$ και να βρείτε την εφαπτομένη στο σημείο αυτό.
γ) τις εφαπτομένες του κύκλου C που είναι κάθετες στην ευθεία $\zeta : x+2y-21=0$.

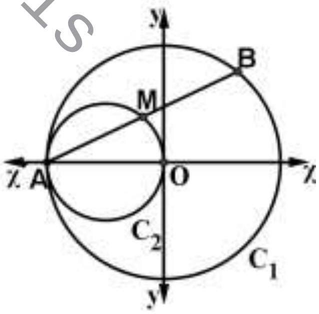
33. Δίνεται ο κύκλος C που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και εφάπτεται στην ευθεία ζ: $3x-4y-50=0$. Να βρείτε :
α) την εξίσωση του κύκλου C.
β) τις εφαπτομένες του κύκλου C που διέρχονται από το σημείο $P(-10,20)$.

34. Δίνεται ο κύκλος C με κέντρο την αρχή των αξόνων ,ο οποίος διέρχεται από το σημείο $A(4,-2)$. Να βρείτε :
α) την εξίσωση του κύκλου C.
β) την εφαπτομένη του κύκλου C στο σημείο του A.
γ) τις εφαπτομένες του κύκλου C που είναι παράλληλες στην ευθεία $\zeta : 2x+y-2011=0$.
δ) τις εφαπτομένες του κύκλου C που διέρχονται από το σημείο $P(-2,6)$

35. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου, ο οποίος εφάπτεται των αξόνων x'x και y'y, καθώς και της ευθείας ε: $y=-\frac{3}{4}x+5$.



36. Δίνονται οι κύκλοι $C_1 : x^2+y^2=16$ και $C_2 : (x+2)^2+y^2=4$. Να αποδείξετε ότι:
α) οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά στο σημείο A(-4,0) .
β) κάθε χορδή AB του C_1 διχοτομείται από τον C_2 .



Κοινές εφαπτόμενες κύκλων

37. Να βρεθούν οι εξισώσεις των κοινών εφαπτομένων των κύκλων :
$x^2+y^2=1$ και $(x-4)^2+y^2=4$.

38. Δίνονται οι κύκλοι : $C_1: x^2+y^2-4x-10y-16=0$ και
$C_2: x^2+y^2-2x-6y-10=0$.
α) Να βρείτε τα κέντρα και τις ακτίνες των δύο κύκλων.
β) Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι αυτοί εφάπτονται εσωτερικά.
γ) Να βρείτε την κοινή εφαπτομένη των δύο κύκλων.

39. Δίνονται οι εξισώσεις: $C_1: x^2+y^2+16x+12y-525=0$ και $C_2: x^2+y^2=225$.
α) Δείξτε ότι οι εξισώσεις αυτές παριστάνουν κύκλους και να βρείτε τα κέντρα και τις ακτίνες τους.

β) Δείξτε ότι οι κύκλοι αυτοί εφάπτονται εσωτερικά και να βρείτε την εξίσωση της κοινής εφαπτομένης τους.

40. Δίνονται οι κύκλοι $\mathrm{C_1}: \mathrm{x}^2+y^2=1$ και $\mathrm{C_2}: (\mathrm{x}-3)^2+(\mathrm{y}-4)^2=16$.
α) Να δείξετε ότι οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.
β) Να βρεθούν οι εξισώσεις των κοινών εφαπτόμενών τους.

Γεωμετρικοί τόποι

41. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων
$C: x^2+y^2+(4\lambda+8)x-(12\lambda+28)y-15=0$.

42. Δίνονται τα σημεία $\mathrm{M}(\eta\mu\theta-4, \sigma\upsilon\nu\theta+2)$, με $\theta\in\mathbb{R}$.Να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ βρίσκονται σε κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

43. Οι συντεταγμένες ενός σημείου $\mathrm{M}(x,y)$ ικανοποιούν τις σχέσεις: $x=1+2\sigma\upsilon\nu\theta$ και $y=3-2\eta\mu\theta$, $\theta\in\mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι τα σημεία Μ ανήκουν σε κύκλο.

44. Θεωρούμε τα σταθερά σημεία Ο και Α με $(\mathrm{OA})=3$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ για τα οποία $\overrightarrow{\mathrm{OM}}\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}}-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)=7$.

45. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων, οι οποίοι έχουν ακτίνα $\rho=3$ και εφάπτονται εσωτερικά του κύκλου $C_1: (x-2)^2+(y+3)^2=25$.

46. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων, οι οποίοι έχουν ακτίνα $\rho=5$ και εφάπτονται εξωτερικά του κύκλου $C_1: x^2+y^2=9$.

47. Δίνονται τα σημεία $\mathrm{A}(-2,6)$ και $\mathrm{B}(0,4)$. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία $(\mathrm{MA})^2+(MB)^2=36$ είναι κύκλος με κέντρο το μέσο του τμήματος ΑΒ.

Μέγιστες και ελάχιστες αποστάσεις

48. Δίνεται ο κύκλος C: $x^2 + y^2 = 5$ και το εξωτερικό σημείο P(-4, 8) αυτού. Να βρείτε το σημείο Μ του κύκλου C για το οποίο η απόσταση (PM) γίνεται:
α) ελάχιστη, **β)** μέγιστη.

49. Δίνεται ο κύκλος: $x^2+y^2-4x-4y-10=0$. Να βρείτε τα σημεία του κύκλου που απέχουν την μεγαλύτερη και την μικρότερη απόσταση από το Ο.

50. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση του σημείου $A(-1,0)$ από τον κύκλο $C: x^2+y^2-6x-6y+2=0$ καθώς και τα σημεία του κύκλου που δίνουν αυτές τις αποστάσεις.

51. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση του σημείου $A(4,-6)$ από τον κύκλο $C: x^2+y^2-2x+4y-4=0$ καθώς και τα σημεία του κύκλου που δίνουν αυτές τις αποστάσεις.

52. Δίνεται ο κύκλος $C: x^2+y^2=1$ και η ευθεία $\varepsilon: 3x+4y=25$.
α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία και ο κύκλος δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.
β) Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση της ευθείας από τον κύκλο.
γ) Να βρείτε τα σημεία της ευθείας και του κύκλου που έχουν την ελάχιστη απόσταση.

53. Δίνεται ο κύκλος $C: x^2+y^2-6x+8=0$ και η ευθεία $\varepsilon: y=-x$.
α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία και ο κύκλος δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.
β) Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση της ευθείας από τον κύκλο.
γ) Να βρείτε τα σημεία της ευθείας και του κύκλου που έχουν την ελάχιστη απόσταση.

54. Δίνεται ο κύκλος $C: x^2+y^2-4x+3=0$ και ο κύκλος C_2 με κέντρο Λ(-2,3),ο οποίος εφάπτεται στον άξονα y΄y.
α) Να βρείτε το κέντρο και τη ακτίνα του κύκλου C_1,
β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου ,
γ) Να αποδείξετε ότι ο καθένας από τους κύκλους C_1 και C_2 είναι εξωτερικός του άλλου
δ) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου C_1 στο σημείο του Α(2,1) εφάπτεται και στον κύκλο C_2,

ε) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση ενός σημείου του C_1 από ένα σημείο του κύκλου C_2.

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

55. Έστω κύκλος C με κέντρο K(1,2) και ακτίνα ρ=2 και ευθεία (ε) με εξίσωση $3x+4y-1=0$.

α) Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου C.

β) Να δείξετε ότι η απόσταση του κέντρου K(1,2) από την ευθεία (ε) είναι ίση με 2.

γ) Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) εφάπτεται στον κύκλο C.

56. Δίνεται ο κύκλος C: $x^2+y^2-2x-4y+1=0$ με κέντρο K(1, 2) και η ευθεία ε: $3x+4y+1=0$.

α) Να αποδείξετε ότι η ακτίνα του κύκλου C είναι $\rho=2$.

β) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του κέντρου K από την ευθεία ε είναι $\frac{12}{5}$.

γ) Να αιτιολογήσετε γιατί η ευθεία ε και ο κύκλος C δεν έχουν κοινά σημεία.

57. Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-4x+3=0$ (1).

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

β) Να σχεδιάσετε τον κύκλο και να βρείτε, χρησιμοποιώντας το σχήμα ή με οποιανδήποτε άλλον τρόπο, τα κοινά του σημεία με τους άξονες.

58.α) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το O(0,0) και διέρχεται από το σημείο A(1,2).

β) Δίνεται ο κύκλος $x^2+y^2=5$.

i. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτόμενής του στο σημείο A. (Μονάδες 09)

ii. Να βρεθεί το σημείο B, το οποίο είναι αντιδιαμετρικό του A σε αυτόν τον κύκλο.

59. Τα σημεία A(-8, 1), B(4, 5) και Γ(-4, 9) είναι σημεία ενός κύκλου C.

α) Να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα AB είναι διάμετρος του κύκλου.

β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C.

60. Δίνεται ο κύκλος C: $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ και η ευθεία ε: $3x-4y=8$.

α) Να βρείτε το κέντρο K του κύκλου C και την ακτίνα του.

β) Αν K(1,2), να δείξετε ότι η απόσταση του κέντρου του κύκλου C από την ευθεία ε είναι $d(K,\varepsilon)=\frac{13}{5}$.

γ) Να αιτιολογήσετε γιατί η ευθεία και ο κύκλος δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

61.Δίνονται τα σημεία Α(1,3) και Β(- 3,5) .

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Κ του τμήματος ΑΒ.

β) Να αποδείξετε ότι $(\mathrm{KA}) = \sqrt{5}$.

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.

62.Δίνεται το σημείο Κ(- 3,1) και η ευθεία (ε) : $4x - 3y + 5 = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου Κ από την ευθεία (ε) είναι ίση με 2.

β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C που έχει κέντρο το σημείο Κ και εφάπτεται στην ευθεία (ε) .

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων τον κύκλο C και την ευθεία (ε) .

63.Δίνεται ο κύκλος C με εξίσωση $x^2 + y^2 = 25$. Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων

α) τον κύκλο C .

β) τις εφαπτόμενες του C που διέρχονται από τα σημεία τομής του C με τον y΄y και να γράψετε τις εξισώσεις τους.

γ) τις εφαπτόμενες του C που διέρχονται από τα σημεία τομής του C με τον xx ΄ και να γράψετε τις εξισώσεις τους.

64.Δίνεται κύκλος C με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 5.

α) Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου C και να τον σχεδιάσετε στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

β) Δίνεται το σημείο Α(3, −4).

i. Να αποδείξετε ότι το σημείο Α ανήκει στον κύκλο C.

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου C στο σημείο Α.

65.Δίνεται η εξίσωση $(x-1)(x+3)+(y+1)(y-3)=-4 \quad (1)$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο Κ(−1,1) και ακτίνα R = 2.

β) i. Να βρείτε τα σημεία Α και Β του κύκλου (K,R) τα οποία έχουν τετμημένη ίση με −1.

ii. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α και Β είναι αντιδιαμετρικά.

66.Δίνονται τα σημεία Α(0,3), Β(3,4) και Γ(1,0).

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\mathrm{B\hat{A}\Gamma}$ είναι ορθή.

β) Να βρείτε το μέσο Κ της υποτείνουσας ΒΓ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ.

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία Α, Β και Γ.

67.Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-x-y-\frac{7}{2}=0\ (1)$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ και ακτίνα R = 2.

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $A\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$ είναι σημείο του κύκλου (K,R).

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου (K,R) στο A.

68.Δίνονται τα σημεία A(2, -4) και B(0, -2)

α) Να βρείτε το μέσο M του τμήματος AB.

β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου (ζ) του ευθύγραμμου τμήματος AB.

γ) Αν (ζ): $y=x-4$ και (ε): $y=2x-6$, τότε να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών (ζ), (ε).

δ) Να δείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία A, B και το κέντρο του ανήκει στην ευθεία (ε) είναι η $(x-2)^2+(y+2)^2=4$.

69.Θεωρούμε την ευθεία ε: 3x – 4y = 0 και το σημείο A(-2,1).

α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου A από την ευθεία είναι 2.

β) Να βρείτε την εξίσωση ευθείας (η) κάθετης στην (ε) που διέρχεται από το σημείο A.

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο A και εφάπτεται στην ευθεία (ε).

70.Δίνεται η εξίσωση $(y-1)^2=(3+x)(1-x)\ (1)$. Να αποδείξετε ότι:

α) Η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο K(−1,1) και ακτίνα R = 2.

β) Η αρχή O(0,0) των αξόνων είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου (K,R).

γ) Η ευθεία (ε): x + y = 2 είναι τέμνουσα του κύκλου (K,R).

71.Θεωρούμε τις εξισώσεις $(\varepsilon_1): \mu x-y-\mu=0$ και $(\varepsilon_2): (\mu+1)x+(\mu-1)y-\mu+1=0,\ \mu\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι (ε_1) και (ε_2) παριστάνουν εξισώσεις ευθειών για κάθε τιμή της παραμέτρου μ.

β) Να αποδείξτε ότι η οξεία γωνία των ευθειών (ε_1) και (ε_2) είναι 45^o για κάθε τιμή της παραμέτρου μ.

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής των ευθειών (ε_1) και (ε_2) ανήκουν στον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1.

72.Δίνεται ο κύκλος $C: (x-2)^2+(y+3)^2=5$ και η ευθεία ε: $2x+y+5=0$.

α) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C.

β) Να δείξετε ότι ο κύκλος C και η ευθεία (ε) δεν έχουν κοινά σημεία.

γ) Να δείξετε ότι υπάρχουν δύο ευθείες $(\eta_1),(\eta_2)$ που είναι παράλληλες στην ευθεία (ε) και εφάπτονται του κύκλου C και να βρείτε τις εξισώσεις τους.
δ) Να βρείτε τη μεσοπαράλληλη των ευθειών $(\eta_1),(\eta_2)$.

73. Δίνονται οι εξισώσεις $C_1: x^2+y^2-2x-8=0$ (1) και
$C_2: x^2+y^2-6x+8=0$ (2).
α) Να δείξετε ότι οι (1) και (2) είναι εξισώσεις κύκλων, με κέντρα Κ(1,0), Λ(3,0) και ακτίνες $\rho_1=3$, $\rho_2=1$ αντίστοιχα.
β) i. Να βρείτε το μήκος της διακέντρου (ΚΛ).
ii. Να δείξετε ότι ο κύκλος C_2 εφάπτεται εσωτερικά του κύκλου C_1.
γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των ακτίνων του κύκλου C_1 που εφάπτονται στον κύκλο C_2.

74. Δίνονται οι κύκλοι $C_1: x^2+y^2+2\sqrt{2}x+1=0$ και $C_2: x^2+y^2-6\sqrt{2}x+9=0$.
α) Να δείξετε ότι οι κύκλοι C_1 και C_2 έχουν κέντρα $K\left(-\sqrt{2},0\right),\Lambda\left(3\sqrt{2},0\right)$ και ακτίνες $\rho_1=1$, $\rho_2=3$ αντίστοιχα.
β) i. Να δείξετε ότι από την αρχή των αξόνων διέρχονται δύο κοινές εφαπτόμενες των κύκλων C_1 και C_2.
ii. Να σχεδιάσετε ένα πρόχειρο σχήμα όπου να φαίνονται οι κύκλοι και οι δύο αυτές εφαπτόμενες.

75. Δίνονται δύο κύκλοι με εξισώσεις:
$C_1: (x-2)^2+(y-3)^2=8$ και $C_2: (x-7)^2+(y+2)^2=18$.
α) Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου (ΚΛ), όπου Κ, Λ, τα κέντρα των κύκλων C_1, C_2, αντίστοιχα. Ακολούθως να δείξετε ότι οι δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.
β) i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΚΛ.
ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ΚΛ με τον κύκλο C_1 και το σημείο επαφής των δύο κύκλων.
γ) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής εσωτερικής εφαπτομένης των κύκλων.

76. Δίνονται τα σημεία Α(−2,0) και Β(2, −2).
α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Κ και το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.
β) Να δείξετε ότι ο κύκλος C με διάμετρο ΑΒ έχει εξίσωση C: $x^2+(y+1)^2=5$.
γ) Να δείξετε ότι τα σημεία $M(x,y)$ του επιπέδου για τα οποία $(AMB)=5$ ανήκουν στις ευθείες $\varepsilon_1: x+2y-3=0$ και $\varepsilon_2: x+2y+7=0$.
δ) Να δείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 εφάπτονται του κύκλου C.

77. Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-2x+4y=-1$.

α) Να αποδείξετε ότι παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ(3, 2) βρίσκεται έξω από τον κύκλο.

γ) Να βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου που διέρχονται από το Μ.

78. Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-4\kappa x-2\kappa y+4=0\ (1)$ με $\kappa\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $\kappa\in\mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση (1) να παριστάνει κύκλο.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου και την ακτίνα του κάθε κύκλου.

γ) Να βρείτε την ευθεία στην οποία ανήκουν τα κέντρα των παραπάνω κύκλων.

δ) Για κ = 1 να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης του αντίστοιχου κύκλου της εξίσωσης (1) στο σημείο Γ(2,2).

79. Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2+(4-2k)x-2(1+k)y+5-2k=0$,

όπου $k\in(0,+\infty)$.

α) Να αποδείξετε ότι η (Ι) παριστάνει κύκλο με κέντρο $M(k-2,k+1)$ και ακτίνα $k\sqrt{2}$ για κάθε k > 0.

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ ανήκει σε μια σταθερή ευθεία για κάθε k > 0.

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε): $y=-x-1$ είναι εφαπτομένη του παραπάνω κύκλου για κάθε k > 0.

80. Δίνονται οι κύκλοι $C_1:(x-1)^2+(y-1)^2=9$ και $C_1:(x-4)^2+(y-4)^2=9$.

α) Να δείξετε ότι τα κέντρα ΚΛ, των κύκλων C_1 και C_2 αντίστοιχα βρίσκονται στην διχοτόμο της γωνίας xOy του συστήματος συντεταγμένων.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής Β, Γ, των κύκλων C_1 και C_2.

γ) Να βρείτε τα σημεία της ευθείας y = x ώστε το τρίγωνο που σχηματίζεται με τα ΒΓ, να έχει εμβαδόν $\frac{21}{2}$ τ.μ..

81. Δίνεται η εξίσωση $(x-2)^2+(y-\lambda)^2=\lambda^2+1$ (1), όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του λ η (1) παριστάνει κύκλο , του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

β) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την (1) για τις διάφορες τιμές του λ διέρχονται από δύο σταθερά σημεία.

γ) Αν Α(1,0) και Β(3,0) είναι τα μοναδικά σημεία από τα οποία διέρχονται όλοι οι κύκλοι, τότε να βρείτε την εξίσωση της κοινής χορδής τους και να αποδείξετε ότι είναι κάθετη στην ευθεία διέρχεται από τα κέντρα των κύκλων.

δ) Αν ένα σημείο Μ(α, β) επαληθεύει την (1) για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, τότε να αποδείξετε ότι $\alpha\cdot\beta=0$.

82.Δίνονται τα σημεία Α(1,1), Β(5,5).

α) Αν για το σημείο Μ(x, ψ) ισχύει $\overrightarrow{AM}^2 + \overrightarrow{BM}^2 = 32$,να αποδείξετε ότι:

i. Το σημείο Μ βρίσκεται πάνω στην καμπύλη με εξίσωση $x^2 + \psi^2 - 6\psi - 6x + 10 = 0 \ (1)$.

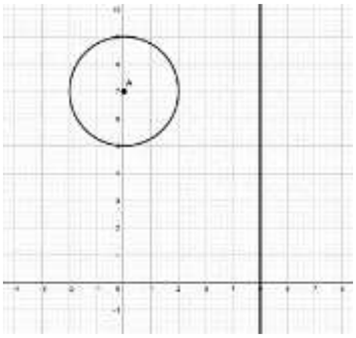
ii. Η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο.

β) Αν το κέντρο του κύκλου είναι το Κ(3,3) και η ακτίνα του $\rho = 2\sqrt{2}$.

i. Να διερευνήσετε για ποιες τιμές του λ η ευθεία (ε): λx + ψ = 2 εφάπτεται του κύκλου (1).

ii. Υπάρχει τιμή του λ για την οποία η ευθεία (ε) σχηματίζει με την ΑΒ γωνία 45^o ;

83.Στο παρακάτω σχήμα έχουμε σχεδιάσει κύκλο C_1 κέντρου Α και την ευθεία (ε) : $x = 5$.



α) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C_1.

β) Έστω ένα σημείο του επιπέδου $B(x_1, y_1)$.

i. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο $B(x_1, y_1)$ και ακτίνα 2 .

ii. Να βρείτε το μήκος της διακέντρου ΑΒ σε συνάρτηση με τις συντεταγμένες του σημείου Β.

γ) Να βρείτε όλους τους κύκλους του ερωτήματος β)i. με ακτίνα 2 , που εφάπτονται εξωτερικά στον C_1 και στην ευθεία (ε).

84.Θεωρούμε τα σημεία Α(-1, 2), Β(3, 2), Γ(1, 4).

α) Να αποδείξετε ότι σχηματίζουν τρίγωνο.

β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης της πλευράς ΒΓ.

Έστω ότι η μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ είναι η ευθεία ε: $y = x + 1$.

γ) Να βρείτε σημείο Κ στην μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ που ισαπέχει από τα Α, Β.

δ) Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.

85.Δίνονται τα σημεία Ο(0,0), Α(α,0) και Β(0,β) όπου α, β > 0.

α) Να βρείτε συναρτήσει των α, β

i. τις συντεταγμένες του μέσου Μ του τμήματος ΑΒ.

ii. την απόσταση (ΟΜ) .

β) Αν $\left(\mathrm{OM}\right)=\dfrac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}$, τότε:

i. να αποδείξετε ότι $\left(\mathrm{OM}\right)=\dfrac{\left(\mathrm{AB}\right)}{2}$.

ii. να γράψετε την πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που έχει αποδειχθεί.

γ) Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΟΑΒ.

86.Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-2\left(\lambda+1\right)x-2\lambda y+2\lambda+1=0\ \left(1\right)$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο και να γράψετε ως συνάρτηση του λ τις συντεταγμένες του κέντρου Κ και την ακτίνα ρ.

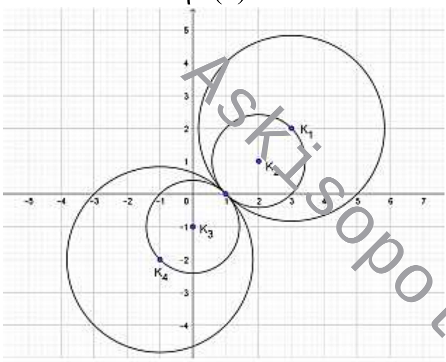
β) Τι παριστάνει η εξίσωση (1) για $\lambda=0$;

γ) Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται 4 κύκλοι με τα αντίστοιχα κέντρα τους K_1, K_2, K_3, K_4 που προκύπτουν από την (1) για 4 αντίστοιχες τιμές του λ. Αξιοποιώντας το σχήμα,

i. να αποδείξετε ότι τα κέντρα όλων των κύκλων που προκύπτουν από την (1) βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

ii. να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που προκύπτουν από την (1) διέρχονται από σταθερό σημείο του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.

iii. να αποδείξετε ότι η ευθεία ε: $x+y-1=0$ είναι κοινή εφαπτομένη όλων των κύκλων που προκύπτουν από την (1).



87.Δίνεται η εξίσωση $\left(x-3\lambda\right)^2+\left(y+2\lambda\right)^2=1\ \left(1\right)$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$ και η ευθεία ε: $2x+3y=0$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ τα κέντρα των κύκλων που προκύπτουν από την (1) ανήκουν στην ευθεία ε .

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ που απέχουν μεταξύ τους 2 μονάδες και έχουν μεσοπαράλληλη την ευθεία ε .

γ) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που προκύπτουν από την (1) εφάπτονται σε δύο σταθερές ευθείες.

δ) Να βρείτε το εμβαδόν ενός τετραγώνου του οποίου δύο απέναντι πλευρές ανήκουν στις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ αντίστοιχα.

88.Δίνεται η εξίσωση $x(x-4)+y(y-2)=2(x+y-4)$ (1).

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο K (3,2) και ακτίνα $\rho=\sqrt{5}$.

β) Δίνονται τα σημεία $A(4,4)$ και $B(2,0)$.

i. Να δείξετε ότι τα σημεία A και B είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου.

ii. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου οι οποίες είναι παράλληλες στην διάμετρο AB.

γ) Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ ώστε η ευθεία (η) με εξίσωση $y=\lambda x+4$ να τέμνει τον παραπάνω κύκλο σε δύο σημεία Γ και Δ ώστε $(\Gamma\Delta)=\sqrt{20}$.

89.Δίνεται ο κύκλος C: $x^2+y^2=4$ και το σημείο $A\left(2\sqrt{2},0\right)$.

α) i. Να αποδείξετε ότι το σημείο A είναι εξωτερικό του κύκλου C.

ii. Να βρείτε τις εξισώνεις των εφαπτόμενων του κύκλου C που διέρχονται από το σημείο A και να αποδείξετε ότι είναι μεταξύ τους κάθετες.

β) Αν B, Γ τα σημεία επαφής του κύκλου C με τις εφαπτόμενες ευθείες από το σημείο A, να υπολογίσετε το εμβαδό του τετραπλεύρου ΑΒΟΓ.

90.Δίνεται ο κύκλος C: $x^2+y^2=1$.

α) Αν A και A΄ είναι τα σημεία τομής του κύκλου C με τους ημιάξονες Ox και Ox΄ αντίστοιχα, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων A και A΄ είναι A(1,0) και A΄(-1,0).

ii. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το A και σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία 150°.

β) Αν η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο C και στο σημείο B, να αποδείξετε ότι η χορδή AB έχει μήκος $\sqrt{3}$.

γ) Αν η ευθεία ε έχει εξίσωση $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$ να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (η) που διέρχεται από τα σημεία A΄ και B.

91.Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $x^2+y^2-4x-8y-5=0$ και η ευθεία (ε): $3x-4y=\mu$, $\mu\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το κέντρο του κύκλου και την ακτίνα του.

β) Αν η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο σε δύο διαφορετικά σημεία A, B

i. Να αποδείξετε ότι $-35<\mu<15$.

ii. Να βρείτε για ποια τιμή του μ η ευθεία ε διέρχεται από το κέντρο του.

iii. Να βρεθεί σημείο Γ του κύκλου τέτοιο ώστε, το τρίγωνο ΓΑΒ να είναι ισοσκελές με βάση τη χορδή AB.

92. Τα σημεία Α(-7, -1) και Β(3, -5) είναι σημεία ενός κύκλου C κέντρου Κ. Το σημείο Μ είναι το μέσο της χορδής ΑΒ και μία ευθεία ε διέρχεται από τα σημεία Κ και Μ.

α) Να βρείτε:

i. Τις συντεταγμένες του σημείου Μ.

ii. Την εξίσωση της ευθείας ΚΜ.

β) Αν από το κέντρο Κ του κύκλου διέρχεται η ευθεία (δ): $x + y = -12$, τότε:

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Κ.

ii. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C.

93. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + y^2 - (\lambda + 8)x + \lambda y + 7 = 0 \ (1)$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα.

β) Να βρείτε την εξίσωση της γραμμής πάνω στην οποία κινούνται τα κέντρα των κύκλων αυτών.

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, όλοι οι παραπάνω κύκλοι, διέρχονται από δύο σταθερά σημεία, τα οποία και να βρεθούν.

δ) Θεωρούμε τον κύκλο που ορίζεται από την (1) για λ= 0. Να βρεθούν τα σημεία του κύκλου αυτού, που απέχουν από την αρχή των αξόνων την ελάχιστη και την μέγιστη απόσταση αντίστοιχα.

94. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4\alpha x - 4\alpha y = 0$ (1) όπου α είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο.

β) Να προσδιορίσετε το κέντρο Κ και την ακτίνα R των κύκλων ως συνάρτηση του α.

γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων για τις διάφορες τιμές του α του ερωτήματος (α).

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του α ώστε ο αντίστοιχος κύκλος που ορίζεται από την εξίσωση (1) να εφάπτεται στον άξονα x΄x.

95. Σε μια σύγχρονη πόλη, κατασκευάζεται σιδηροδρομικό δίκτυο που περιλαμβάνει:

- τη γραμμή γ_1, κάθε σημείο της οποίας στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων είναι της μορφής: Α (λ-1, 2λ+1), $\lambda \in \mathbb{R}$.
- τη γραμμή γ_2, που περνάει από το σταθμό Σ (- 4, 2) και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{u} = (-1, 3)$.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών πάνω στις οποίες βρίσκονται οι γραμμές γ_1 και γ_2.

β) Η είσοδος του αθλητικού σταδίου μιας συνοικίας θα βρίσκεται στο σημείο Κ(1, 1) του ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων. Οι κατασκευαστές θέλουν να συνδέσουν την είσοδο του σταδίου απ' ευθείας με κάθετο δρόμο, με μια από τις γραμμές γ_1 και γ_2. Να βρείτε με ποια από τις δύο γραμμές είναι πιο συμφέρουσα η σύνδεση. Δίνεται ότι το κόστος σύνδεσης ανά μονάδα μήκους, είναι το ίδιο και για τις δύο γραμμές.

γ) Γύρω από το στάδιο θα δημιουργηθεί κυκλικό πάρκο. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου, που θα ορίζει το πάρκο, αν το κέντρο του είναι το σημείο Κ και επιπλέον ο κύκλος αυτός εφάπτεται της γραμμής γ_1.

96. Δίνονται τα σημεία Α(α, 0) και Β(0, β) με α, β > 0 και α + β =10 .

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση των κύκλων με διάμετρο την ΑΒ, για κάθε τιμή των α και β είναι $x^2+y^2-\alpha x-(10-\alpha)y=0$.

β) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι με διάμετρο την ΑΒ, για τις διάφορες τιμές των α και β διέρχονται από δύο σταθερά σημεία, την αρχή Ο των αξόνων και ένα σημείο Ρ του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.

γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων όλων των κύκλων με διάμετρο την ΑΒ για τις διάφορες τιμές των α και β.

97. Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων με αρχή το σημείο Ο θεωρούμε κύκλο (C) και ευθεία (ε) με εξισώσεις $x^2+y^2-9x-3y+10=0\ (1)$ και $4x+3y-10=0$ (2) αντίστοιχα.

α) i. Να βρείτε το κέντρο Κ και την ακτίνα R του κύκλου (C).

ii. Να υπολογίσετε την απόσταση του κέντρου Κ από την ευθεία (ε) και να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) τέμνει τον κύκλο (C) σε δύο σημεία.

iii. Να προσδιορίσετε τα σημεία Α και Β στα οποία η ευθεία (ε) τέμνει τον κύκλο (C).

β) Αν είναι Α(1,2) και Β(4, −2), τότε:

iv. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$.

v. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με διάμετρο ΑΒ διέρχεται από το σημείο Ο.

98. Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy θεωρούμε τα σημεία Μ(x, y), Α(-1,0), Β(1,0) για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{AM}^2+\overrightarrow{BM}^2=9\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ είναι ο κύκλος με εξίσωση $x^2+y^2=8$.

β) Έστω Γ και Δ δύο σημεία του κύκλου τέτοια ώστε $\Gamma\Delta^2=32$.

i. Να δείξετε ότι τα σημεία Γ και Δ και η αρχή των αξόνων είναι συνευθειακά σημεία.

ii. Αν το σημείο Μ κινείται στον κύκλο, να υπολογίσετε το $\overrightarrow{M\Gamma}\cdot\overrightarrow{M\Delta}$.

99. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\overrightarrow{AB}=(\lambda,\lambda+1)$, $\overrightarrow{A\Gamma}=(3\lambda,\lambda-1)$ και το σημείο Μ είναι το μέσο της ΒΓ με $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AM}=(2\lambda,\lambda)$.

β) Δίνεται επιπλέον ότι η γωνία $B\hat{A}\Gamma=90^\circ$.

i. Να υπολογίσετε το λ.

ii. Αν $\lambda=\frac{1}{2}$ και $A\left(2,\frac{3}{2}\right)$ να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.

100. Σε καρτεσιανό σύστημα αξόνων Oxy η εξίσωση $3x+4y=25$ περιγράφει τη θέση ενός αγωγού ύδρευσης. Σε αυτό το σύστημα θέλουμε να σχεδιάσουμε ένα κυκλικό σιντριβάνι με κέντρο το O(0,0) και ακτίνα 2.

α) i. Ποια είναι η εξίσωση του κύκλου που περιγράφει την θέση του σιντριβανιού;

ii. Να εξετάσετε αν ο αγωγός ύδρευσης διέρχεται από το κέντρο του σιντριβανιού, προκειμένου να ενωθεί με αυτό.

iii. Αν ο αγωγός ύδρευσης δεν διέρχεται από το κέντρο του σιντριβανιού, ποιο σημείο του αγωγού ύδρευσης πρέπει να ενωθεί με το κέντρο του σιντριβανιού ώστε να έχουμε την μικρότερη δυνατή απόσταση, άρα και οικονομικότερη κατασκευή;

β) Ο μηχανικός που θέλει να χαράξει έναν ευθύγραμμο δρόμο, κατέληξε στην εξίσωση $\lambda x+y+\lambda-2=0$, με $\lambda\neq 0$. Μπορείτε να τον βοηθήσετε να βρει για ποια τιμή του λ ο δρόμος αυτός εφάπτεται του σιντριβανιού;

101. Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2+\lambda x+\lambda y+\lambda-1=0\ (1)$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1), παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου που ορίζεται από την εξίσωση (1), ο οποίος εφάπτεται της ευθείας ε: $x + y + 2 = 0$. (Μονάδες 9)

γ) Για λ = 1, στον κύκλο που προκύπτει από την εξίσωση (1), να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του, που διέρχονται από το σημείο $M\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

102. Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων με αρχή το σημείο O(0,0) θεωρούμε τους κύκλους (K, R) και (Λ, ρ) με εξισώσεις

$x^2+y^2-6x-8y+21=0\,(1)$ και $x^2+y^2+2x-2y+1=0\,(2)$ αντίστοιχα.

α) Να βρείτε τα κέντρα και τις ακτίνες των δύο κύκλων.

β) Να αποδείξετε ότι οι δύο κύκλοι βρίσκονται ο ένας εξωτερικά του άλλου.

γ) Έστω Μ, Ν τυχαία σημεία των κύκλων (K, R) και (Λ, ρ) αντίστοιχα. Να υπολογίσετε την ελάχιστη και την μέγιστη απόσταση των σημείων Μ και Ν.

103. Οι κορυφές Α και Γ, ενός τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι τα σημεία (1,4) και (3,0) αντιστοίχως.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος ΑΓ γράφεται στη μορφή $y-2=\frac{1}{2}(x-2)$.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου, ο οποίος έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα γράφεται στη μορφή $(x-2)^2+(y-2)^2=5$.

γ) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των δύο άλλων κορυφών Β, Δ του τετραγώνου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΠΑΡΑΒΟΛΗ

ΕΞΙΣΩΣΗ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ

1. Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον άξονα y'y σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) Έχει εστία το σημείο $\mathrm{E}(0,\ 2)$.

β) Έχει διευθετούσα την ευθεία $\delta\ : y = -\ 3$.

γ) Διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(-\ 2{,}1)$.

δ) Εφάπτεται της ευθείας $\varepsilon :\ x - y = 1$.

2. Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον χ΄χ όταν:

α) Έχει εστία το σημείο $\mathrm{E}(2,0)$.

β) Έχει διευθετούσα την ευθεία $x = 3$.

γ) Διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(9,6)$.

3. Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) Όταν έχει εστία το $\mathrm{E}'(-2,\ 0)$.

β) Όταν έχει διευθετούσα $\delta : y = 2$.

γ) Διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(2,\ 1)$.

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ

4. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής:

α) $y = 4x^2$ στο σημείο $\mathrm{A}(1,4)$.

β) $y^2 = 4x$ που είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x + 3$.

γ) $y^2 = 6x$ που είναι κάθετη στην ευθεία $y = -\frac{1}{3}x + 2$.

δ) $y^2 = 16x$ που διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(-1,-3)$.

ε) $y^2 = 4\alpha x,\ \alpha \in \mathbb{R}$ που σχηματίζει γωνία 135^o με τον χ΄χ

στ) $y^2 = 8x$ που η απόστασή της από την εστία είναι 4 μον.

5. α) Να βρεθεί η σχετική θέση της ευθείας $y = 3x + 1$ ως προς την παραβολή $C : y^2 = 2x.$

β) Ομοίως αν $\varepsilon: y = 2x + 4$ και $C: y^2 = -4x$.

γ) Ομοίως αν $\varepsilon: x - y + 2 = 0$ και $C: y^2 = 8x$.

6. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $C: y^2 = \frac{1}{8}x$ στο σημείο της: **α)** $O(0,0)$ **β)** $A\left(2, \frac{1}{2}\right)$

7. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της παραβολής $C: y^2 = 8x$, οι οποίες διέρχονται από το σημείο $\mathrm{A}(-2,\ 3)$. Ποια είναι η γωνία που σχηματίζουν οι παραπάνω εφαπτόμενες ;

8. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $C: y^2 = 12x$ που απέχει από το σημείο $\mathrm{A}(1,0)$ απόσταση ίση με $2\sqrt{2}$

9. Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 8x$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής, η οποία τέμνει τους άξονες χ'χ και y'y στα σημεία Α και Β έτσι, ώστε $(AB) = 4\sqrt{3}$.

10. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $C: y^2 = 8x$, η οποία σχηματίζει με την ευθεία $\varepsilon: y = 3x - 2$ γωνία 45°.

11. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: y = x + 2$ εφάπτεται της παραβολής $C: y^2 = 8x$.

12. Να βρείτε την εφαπτομένη της παραβολής: $y^2 = 4x$ που σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν $\frac{1}{2}$ τ. μ.

13. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση: $y^2 = 6x$.

α) Να βρείτε σημείο Μ της παραβολής στο οποίο η εφαπτομένη της να σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο,

β) Να δείξετε ότι η κάθετη στην εφαπτομένη στο Μ διχοτομεί την γωνία που σχηματίζει η ΕΜ και η παράλληλη από το Μ προς τον xx΄.

14. Από το σημείο $\mathrm{M}\ (-2,-1)$ φέρνουμε τις εφαπτόμενες ΜΑ και ΜΒ στην παραβολή $y^2 = 4x$. Να δειχτεί ότι: $d(M, AB) = \frac{9\sqrt{5}}{5}$.

15. Να βρεθεί η σχετική θέση της ευθείας $x + y + 1 = 0$ ως προς την παραβολή $y^2 = 2x$.

16. Από το σημείο Μ $(-3,2)$ φέρνουμε τις εφαπτομένες ΜΑ και ΜΒ στην παραβολή $C: y^2 = 8x.$ Να βρεθεί η απόσταση του Μ από την ΑΒ.

17. Θεωρούμε την ευθεία $\varepsilon: y = \lambda x - 4$ και την παραβολή $C: y = -x^2$. Να αποδείξετε ότι:

α) η ευθεία ε τέμνει την C σε δύο σημεία, έστω Α και Β,

β) οι εφαπτόμενες της C στα Α, Β είναι κάθετες μεταξύ τους,

γ) το κοινό σημείο των παραπάνω εφαπτόμενων ανήκει σε σταθερή ευθεία.

ΚΟΙΝΕΣ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΕΣ ΚΩΝΙΚΩΝ ΤΟΜΩΝ

18. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος $(C_1): x^2 + y^2 - 6x + 4 = 0$ εφάπτεται στην παραβολή (C): $y^2 = 2x$.

19. Να βρείτε τις κοινές εφαπτόμενες του κύκλου $C_1: x^2 + y^2 = 2p^2$ και της παραβολής $C_2: y^2 = 8px$, όπου $p > 0$, και να αποδείξετε ότι είναι κάθετες μεταξύ τους.

20. Να βρείτε τις εξισώσεις των κοινών εφαπτόμενων των παραβολών $C_1: y^2 = 16x$ και $C_2: x^2 = 2y.$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

21. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ, όπου:

α) $\mathrm{M}\left(3\sqrt{\alpha}, \frac{\alpha}{2}\right)$ **β)** $\mathrm{M}\left(2\alpha, 6\sqrt{\alpha}\right)$

22. Αν $\alpha \neq 0$, να αποδείξετε ότι το σημείο $\mathrm{M}\left(\frac{2\alpha}{\lambda^2}, \frac{2\alpha}{\lambda}\right)$, με α σταθερό, κινείται σε παραβολή, όταν το λ μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}^*$.

23. Δίνεται η παραβολή C με εξίσωση $y^2 = 4x$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας Ε και την εξίσωση της διευθετούσας δ της C .

β) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C στο σημείο της Μ(4,4).

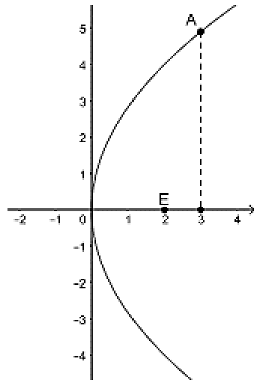
γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων την παραβολή C , τη διευθετούσα δ και την ευθεία (ε).

24. Δίνεται η παραβολή C: $y^2 = 8x$.

α) Να βρείτε την εστία και την διευθετούσα της παραβολής.

β) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο της $\left(\frac{1}{8},1\right)$ είναι παράλληλη στην ευθεία ε: 8x – 2y + 3 = 0.

25. Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy δίνεται η παραβολή με άξονα συμμετρίας τον x΄x, κορυφή Ο(0,0) και εστία Ε(2,0), όπως στο διπλανό σχήμα. Το σημείο Α της παραβολής έχει τετμημένη 3 και βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο του Οxy.



α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της παραβολής είναι $y^2 = 8x$ και ότι $A\left(3, 2\sqrt{6}\right)$.

β) Να σχεδιάσετε τη διευθετούσα (δ) της παραβολής και να γράψετε την εξίσωσή της.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της παραβολής στο σημείο Α.

26. Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy δίνεται η παραβολή με εξίσωση $x^2 = 12y$.

α) Να αποδείξετε ότι η εστία της παραβολής είναι το σημείο Ε (0,3) και να βρείτε τα σημεία της παραβολής που έχουν τεταγμένη 3.

β) Να αποδείξετε ότι εφαπτομένες (ε_1) και (ε_2) της παραβολής στα σημεία Α(6,3) και Β(- 6,3), αντίστοιχα, έχουν εξισώσεις $y = x - 3$ και $y = -x - 3$.

γ) Να βρείτε το σημείο τομής των (ε_1) και (ε_2).

27. Δίνεται η παραβολή (C) με εξίσωση $y^2 = x \ (1)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας Ε και την εξίσωση της διευθετούσας (δ).

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο Α(1,-1) είναι σημείο της παραβολής.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης παραβολής στο σημείο της Α(1,-1).

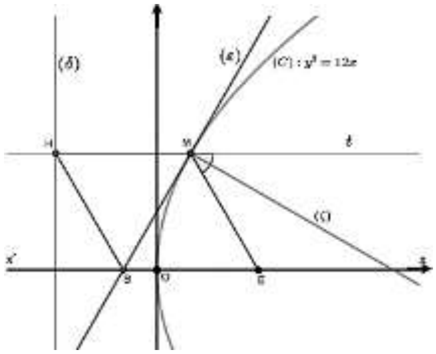
28. Δίνεται η εξίσωση $y^2 = 4x \ (1)$.

α) Να γράψετε στο τετράδιό σας συμπληρωμένη την παρακάτω πρόταση :
«Τα σημεία του επιπέδου που επαληθεύουν την εξίσωση (1) βρίσκονται σε μια καμπύλη που ονομάζεται ………………….. Η εστία της Ε, έχει συντεταγμένες Ε(….., …..) και η διευθετούσα έχει εξίσωση …………».

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που εφάπτεται στην παραπάνω καμπύλη στο σημείο Α(1, -2).

γ) Να αποδείξετε ότι το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα x’x είναι σημείο της διευθετούσας της παραβολής.

29. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η παραβολή C: $y^2 = 12x$ με εστία Ε και η εφαπτομένη ευθεία (ε) της (C) στο σημείο της $M\left(1, 2\sqrt{3}\right)$, η οποία τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο Β. Από το σημείο Μ φέρνουμε ημιευθεία Mt παράλληλη προς τον άξονα x΄x, η οποία τέμνει την διευθετούσα (δ) στο σημείο Η.



α) Να αποδείξετε ότι η (ε) έχει εξίσωση $y = \sqrt{3} \cdot x + \sqrt{3}$.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Β, Η, Ε.

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΜΕΒΗ είναι ρόμβος.

δ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ζ) η οποία διχοτομεί την γωνία $\widehat{EMt}$.

30. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία Α(-2,- 2), Β(0,- 4) και την παραβολή $y^2 = 4x$.

α) Να βρείτε την παράμετρο, την εστία και την διευθετούσα της παραβολής.

β) Να βρείτε το σημείο Μ της παραβολής στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην ΑΒ.

γ) Αν Μ(1,-2) και Κ είναι το σημείο τομής της εφαπτομένης ευθείας του προηγούμενου ερωτήματος με τον άξονα x΄x, να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΜΚ είναι παραλληλόγραμμο.

31. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$, το σημείο της $M\left(\frac{1}{4}, 1\right)$ και η ευθεία ε του επιπέδου με εξίσωση $\varepsilon: \frac{x}{3} - \frac{y}{4} + 1 = 0$.

α) i. Να δείξετε ότι h ευθεία ε δεν έχει κοινά σημεία με την παραβολή και να βρείτε την απόσταση του σημείου Μ από την ε.

ii. Αν η ευθεία ε τέμνει του άξονες x΄x και y΄y στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα, να δείξετε ότι (ΜΓΔ) = 5 τ.μ.

β) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθεία ζ της παραβολής με η παράλληλή στην ε.

ii. Ποια είναι η απόσταση των ευθειών η και ε;

32. Δίνεται η παραβολή C: $x^2 = 4y$ και η ευθεία ε: $y = x - 2$.

α) Να βρείτε την εστία Ε και τη διευθετούσα δ της παραβολής.

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία και η παραβολή δεν έχουν κοινά σημεία. Στη συνέχεια σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Οxy να σχεδιαστούν οι γραφικές παραστάσεις της παραβολής C και της ευθείας ε.

γ) Αν Μ(x, y) είναι σημείο της παραβολής , τότε:

i. Να αποδείξετε ότι η απόσταση του Μ από την ευθεία ε είναι

$$d(M,\varepsilon) = \frac{\frac{1}{4}x^2 - x + 2}{\sqrt{2}}.$$

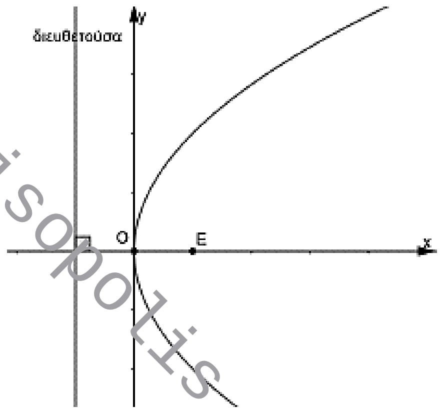
ii. Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση του σημείου Μ από την ευθεία ε καθώς και τις συντεταγμένες του σημείου Μ της παραβολής που απέχει την ελάχιστη απόσταση από την ευθεία .

33. Δίνεται η παραβολή (C) που έχει εξίσωση $y^2 = 4x$ (1).

α) Να σχεδιάσετε πρόχειρα την παραπάνω παραβολή και να γράψετε τις συντεταγμένες της εστίας της Ε και την εξίσωση της ευθείας της διευθετούσας δ.

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο Α(0 , 2) και εφάπτονται στην παραβολή που περιγράφει η εξίσωση (1).

34. Έστω παραβολή C με κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον x΄x. Η απόσταση της εστίας Ε από την διευθετούσα δ της παραβολής C είναι 4 και η γραφική της παράσταση φαίνεται στο διπλανό ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.



α) Να δικαιολογήσετε ότι η εστία της είναι η Ε(2,0), η διευθετούσα της είναι η δ : x= -2 και η εξίσωσή της παραβολής είναι $y^2=8x$.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο της Α(2,4) είναι η ε: $y = x + 2$.

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από την εστία της παραβολής και εφάπτεται στην ευθεία ε στο σημείο της Α(2,4).

ΕΛΛΕΙΨΗ

ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΛΛΕΙΨΗΣ

1. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης όταν:

α) Έχει εστία $E'(-8,0)$ και μεγάλο άξονα 20.

β) Έχει εστία $E(0,3)$ και μεγάλο άξονα 8.

γ) Έχει εστία $E(4,0)$ και εκκεντρότητα $\frac{1}{2}$.

δ) Έχει εκκεντρότητα $\frac{3}{5}$ και μεγάλο άξονα 20.

ε) $\alpha = 2\beta$ και διέρχεται από το σημείο $A(6,4)$.

στ) Έχει κορυφές $B'(-2,0), B(2,0)$ και μεγάλο άξονα 6.

ζ) Έχει μεγάλο άξονα στον χ΄χ και διέρχεται από τα σημεία $M(3,-4)$ και $N(-6,2)$.

η) Έχει μεγάλο άξονα στον y΄y, διέρχεται από το σημείο $P(\sqrt{2},2)$ και εστιακή απόσταση $E'E = 4$.

2. Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης αν έχει:

α) Εστίες $E_1(-5,0)$, και $E_2(5,0)$ και μεγάλο άξονα 24.

β) Μεγάλο άξονα 20 και εκκεντρότητα $\frac{3}{5}$.

γ) Εστιακή απόσταση $2\gamma = 6$ και εκκεντρότητα $\frac{3}{5}$.

3. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης, η οποία έχει:

α) εστίες τα σημεία $E'\left(0,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $E\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ και μήκος μεγάλου άξονα 2,

β) εστίες τα σημεία $E'(-5,0)$, $E(5,0)$ και μήκος μικρού άξονα 6.

4. Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης, η οποία έχει κέντρο την αρχή των αξόνων, εστίες σε έναν από τους δύο άξονες συντεταγμένων και διέρχεται από τα σημεία $M_1\left(\frac{2\sqrt{2}}{3},1\right)$ και $M_2\left(\frac{\sqrt{5}}{3},-2\right)$.

5. Να βρεθεί η εκκεντρότητα και οι εστίες καθεμιάς από τις ελλείψεις:

α) $x^2 + 4y^2 = 4$ **β)** $4x^2 + 9y^2 = 36$ **γ)** $9x^2 + 25y^2 = 225$.

6. Δίνεται η έλλειψη $4x^2 + 25y^2 = 100$. Να βρεθούν:

α) τα μήκη των αξόνων,
β) οι εστίες,
γ) η εκκεντρότητα.

7. Δίνεται η έλλειψη C: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, και το σημείο $\mathrm{M}(4,1)$.

α) Να δείξετε ότι το Μ είναι εσωτερικό σημείο της έλλειψης,
β) Να βρείτε την εξίσωση της χορδής της έλλειψης που έχει μέσον το Μ.

8. α) Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης με $\varepsilon = \frac{4}{5}$ και $\mathrm{E}'(-4,0)$.

β) Να βρεθούν τα σημεία τομής της παραπάνω έλλειψης με την ευθεία $y = x$.
γ) Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του ορθογωνίου που περιέχουν την έλλειψη.

9. Έστω Ε και Ε΄ οι εστίες της έλλειψης $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ και Μ τυχαίο σημείο της. Αν $(\mathrm{ME}) = 1$ να βρείτε το μήκος ME'.

10. Αν ένα σημείο Μ της έλλειψης $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$απέχει από τη μια εστία 5, να βρείτε πόσο απέχει από την άλλη εστία.

11. Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 4$, και η έλλειψη: $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{6} = 1$,

α) Να βρεθούν τα κοινά τους σημεία,
β)Να δείξετε ότι τα κοινά τους σημεία είναι κορυφές ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

12. Έστω έλλειψη με εστίες Ε και Ε΄ στον xx΄ και μεγάλο άξονα ΑΑ΄. Αν $\mathrm{EA} = 2$ και $\mathrm{EA}' = 10$, να βρείτε την εκκεντρότητα της έλλειψης.

13. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης C που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων, μία εστία της, είναι η εστία της παραβολής C_1: $x^2 = 4\sqrt{3}y$ και διέρχεται από το κέντρο του κύκλου C_2 : $2x^2 + 2y^2 - x - 2 = 0$.

14. Να βρείτε τις εστίες της έλλειψης C : $\frac{x^2}{\kappa^2 - 20} + \frac{y^2}{\kappa^2 - 4} = 1$.

15. Αν $\lambda > 6$, να βρεθούν οι εστίες της έλλειψης : $\frac{x^2}{2\lambda + 8} + \frac{y^2}{3\lambda + 2} = 1$

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΕΣ ΕΛΛΕΙΨΗΣ

16. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης:

α) $3x^2+y^2=4$ στο σημείο της $M(1,-1)$.

β) $\dfrac{x^2}{10}+\dfrac{2y^2}{5}=1$ που είναι παράλληλες στην ευθεία ε : $3x+2y+7=0$.

γ) $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{20}=1$ που είναι κάθετες στην ευθεία $y=\dfrac{1}{4}x+1$.

δ) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$ που διέρχονται από το σημείο $M\left(3,\dfrac{5}{3}\right)$.

17. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων των ελλείψεων:

α) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$, στο σημείο $\left(-2,\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

β) $9x^2+25y^2=225$ στο σημείο $(0,-3)$.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

18. Να βρείτε το γ. τ. της κορυφής Μ του τριγώνου ΜΓΔ που έχει περίμετρο 28 και $\Gamma(-4,0)$ και $\Delta(4,0)$.

19. Δίνονται τα σημεία $A(-4,0)$ και $B(4,0)$. Να βρείτε τα γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία είναι : $\lambda_{AM}\cdot\lambda_{BM}=-9$. Να σχεδιάσετε τη γραμμή που θα προκύψει.

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

20. Δίνεται η εξίσωση της έλλειψης $C:16x^2+25y^2=400$.

α) Να βρείτε τα μήκη ΒΒ΄, ΑΑ΄ του μικρού και τον μεγάλου άξονα της έλλειψης, καθώς και τις εστίες της Ε και Ε΄.

β) Αν Ε΄(-3,0) και Ε(3,0), να γράψετε την εξίσωση της παραβολής που έχει εστία το σημείο Ε΄ και διευθετούσα την ευθεία που διέρχεται από το Ε και είναι παράλληλη στον άξονα y΄y.

21. Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy δίνεται η έλλειψη $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$. Να βρείτε:

α) Τις συντεταγμένες των εστιών Ε και Ε΄ της έλλειψης και την απόστασή τους.

β) Το μήκος του μικρού άξονα και το μήκος του μεγάλου άξονα της έλλειψης.

γ) Την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της έλλειψης στο σημείο της Β(0,4).

22. Δίνονται η παραβολή $y^2 = 2px$ και η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$.

α) Αν η παραβολή διέρχεται από το σημείο Α(1,2), να βρείτε:

i. Την εξίσωση της παραβολής.

ii. Την εστία Ε της παραβολής.

β) Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης με κέντρο το Ο, αν η μια εστία της είναι το σημείο Ε(1,0) και ο μεγάλος άξονας της έχει μήκος ίσο με 4.

23. Δίνεται η έλλειψη (C) με εξίσωση $\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{81} = 1 \; (1)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών Ε και Ε΄.

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο Β(0,9) είναι σημείο της έλλειψης.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης έλλειψης στο σημείο της Β(0,9).

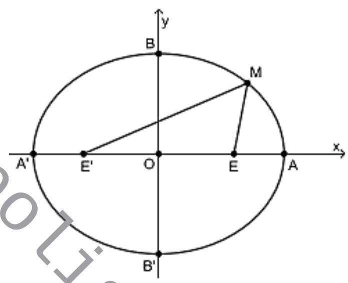
24. Δίνεται η εξίσωση $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \; (1)$.

α) Να γράψετε στο τετράδιό σας συμπληρωμένη την παρακάτω πρόταση :

«Τα σημεία του επιπέδου που επαληθεύουν την εξίσωση (1) βρίσκονται σε μια καμπύλη που ονομάζεται ……………….. Οι εστίες της Ε και Ε΄ , έχουν συντεταγμένες Ε(….., …..) και Ε΄(….., …..) . Το μήκος του μεγάλου άξονα είναι ίσο με ….. και η εκκεντρότητα της είναι ίση με ………».

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε η οποία εφάπτεται στην καμπύλη που περιγράφει η εξίσωση (1), στο σημείο της Β(0,-2).

25. Η έλλειψη του παρακάτω σχήματος έχει κορυφές τα σημεία $A'(-5,0), A(5,0), B'(0,-4)$ και $B(0,4)$.



α) Να αποδείξετε ότι:

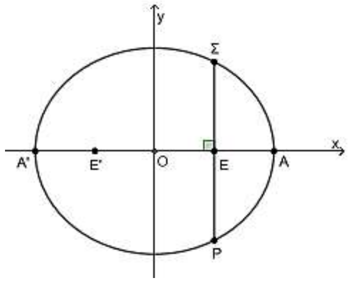
i. Τα μήκη των αξόνων της έλλειψης είναι $(A'A) = 10$ και $(B'B) = 8$.

ii. Οι εστίες της έλλειψης είναι τα σημεία $E'(-3,0)$ και $E(3,0)$.

β) Έστω Μ ένα σημείο της έλλειψης.

Να αποδείξετε ότι $(ME') + (ME) = 10$.

26. Η έλλειψη του διπλανού σχήματος έχει εστίες τα σημεία $E'(-2,0)$ και $E(2,0)$ και μήκος μεγάλου άξονα $(A'A) = 8$.



α) Να αποδείξετε ότι η έλλειψη έχει εξίσωση $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.

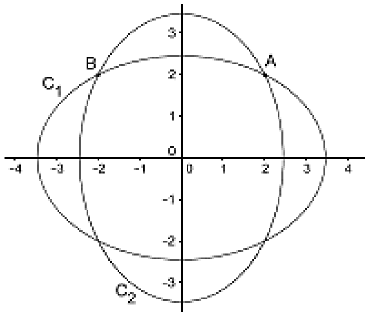
β) Έστω Σ και Ρ τα σημεία της έλλειψης που έχουν την ίδια τετμημένη με την εστία Ε(2,0). Επίσης το Σ έχει θετική τεταγμένη και το Ρ αρνητική τεταγμένη.

i. Να αποδείξετε ότι $\Sigma(2,3)$ και $\mathrm{P}(2,-3)$.

ii. Να βρείτε το μήκος του τμήματος ΣΡ.

27. Δίνονται οι ελλείψεις :

$C_1 : \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{6} = 1$ και $C_2 : \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{12} = 1$.



α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία $\mathrm{A}(2,2)$ και $\mathrm{B}(-2,2)$ ανήκουν και στις δύο ελλείψεις.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης ε_1 της έλλειψης C_1 στο σημείο Α και η εξίσωση της εφαπτομένης ε_2 της έλλειψης C_2 στο σημείο Β είναι αντίστοιχα $x + 2y - 6 = 0$ και $-2x + y - 6 = 0$.

γ) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι κάθετες.

28. Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \ (1)$.

α) Να προσδιορίσετε δικαιολογώντας την απάντησή σας τις συντεταγμένες :

i. Των σημείων που η έλλειψη τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y.

ii. Των εστιών Ε και Ε΄ της έλλειψης.

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο Α(0 , 4) και εφάπτονται στη καμπύλη που περιγράφει η εξίσωση (1).

<u>ΥΠΕΡΒΟΛΗ</u>

<u>ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ</u>

1. Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής αν :

α) Εστιακή απόσταση $2\gamma = 20$ και $2\beta = 16$.

β) Άξονα $2\alpha = 16$ και εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{5}{4}$

2. **γ)** εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{3}{2}$ και εστίες $E'(0,-2)$ και $E(0,2)$.

3. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής, η οποία έχει:

α) εστίες $E'(-4,0), E(4,0)$ και η απόσταση των κορυφών είναι 6,

β) εστίες $E'(0,-10)$, $E(0,10)$ και η απόσταση των κορυφών είναι 8.

4. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής με εστίες στον άξονα x'x, συμμετρικές ως προς την αρχή των αξόνων, αν έχει:

α) εστιακή απόσταση 6 και εκκεντρότητα $\frac{3}{2}$.

β) εστιακή απόσταση 20 και εξισώσεις ασύμπτωτων τις $y = \frac{4}{3}x$ και $y = -\frac{4}{3}x$.

γ) εστιακή απόσταση 4 και ασύμπτωτες τις διχοτόμους των γωνιών των αξόνων.

5. Δίνεται η υπερβολή C : $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ και η ευθεία $\varepsilon:\ 9x + 2y - 24 = 0$. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν οι ασύμπτωτες της C και η ε.

6. Να βρείτε τα σημεία της υπερβολής $C: x^2 - y^2 = 4$ τα οποία έχουν τη μικρότερη απόσταση από το σημείο $\Gamma(0,\ 1)$.

<u>ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΕΣ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ</u>

7. Να βρείτε τις εφαπτόμενες της υπερβολής $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{4} = 1$ στα σημεία της με τετμημένη 3.

8. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων των υπερβολών:

α) $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{16} = 1$, στο σημείο $(-10,-3)$.

β) $25x^2 - 64y^2 = 1600$ στο σημείο (-8$\left(-8\sqrt{2},5\right)$, 5).

9. Να βρεθούν οι εφαπτομένες της υπερβολής $x^2 - y^2 = 16$ οι οποίες σχηματίζουν γωνία 120^o με τον άξονα xx΄.

10. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής $C: \ 8x^2 - \ 3y^2 = 24$, η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon \ : \ 2x - y + 1 = 0$.

11. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής $C: \ 4x^2 - 5y^2 = 20$, η οποία είναι κάθετη στην ευθεία ε: x + 2y - 6 = 0.

12. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής που έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη C: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ και εφάπτεται της ευθείας $\varepsilon : x - y + 1 = 0$.

13. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής $C: \ 8x^2 - y^2 = 8$ η οποία απέχει από την εστία $\mathrm{E}\left(3, \ 0\right)$ απόσταση ίση με 2.

14. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής $x^2 - 2y^2 = 3$ που είναι κάθετη στο διάνυσμα: $\vec{v}$ =(2, -1).

15. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της υπερβολής $x^2 - y^2 = 16$, που διέρχονται από το σημείο $\mathrm{M}\left(-1, -7\right)$.

<u>ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ</u>

16. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου των οποίων ο λόγος των αποστάσεων από το σημείο $\mathrm{A}\left(5, 0\right)$ και την ευθεία ε : x = $x = \frac{16}{5}$ ισούται με $\frac{5}{4}$.

17. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του σημείου Μ, των οποίων η απόσταση από το σημείο $\mathrm{E}\left(0, 6\right)$ είναι τα $\frac{3}{2}$ της απόστασής τους από την ευθεία (δ): $3y - 8 = 0$.

18. Ένα σημείο Μ κινείται ώστε η απόστασή του από το σημείο $\mathrm{A}\left(0, 5\right)$, να είναι τα $\frac{5}{3}$ της απόστασής του από την ευθεία (δ): $5y - 9 = 0$. Να βρεθούν :

α) Ο γεωμετρικός τόπος (C) του Μ.

β) Οι εστίες οι ασύμπτωτες και η εκκεντρικότητα της (C).

19. Δίνεται η υπερβολή (C): $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών Ε΄ και Ε.

β) Αν το Ν είναι τυχαίο σημείο της (C), να βρείτε την τιμή της διαφοράς $\left|(NE')-(NE)\right|$.

γ) Να σχεδιάσετε την υπερβολή (C).

20. Δίνεται η υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ με ασύμπτωτη την $y=\frac{3}{4}x$. Η απόσταση των κορυφών της Α και Α΄ είναι 8.

α) i. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής.

ii. Ποιες είναι οι εστίες της υπερβολής;

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ στο σημείο της $\left(5,\frac{9}{4}\right)$.

21. Δίνεται η υπερβολή (C) με εξίσωση $x^2-y^2=25\ (1)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών Ε και Ε΄.

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες (ε_1), (ε_2) της υπερβολής.

γ) Τι γωνία σχηματίζουν οι ασύμπτωτες (ε_1), (ε_2); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

22. Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση : $\frac{x^2}{4}-y^2=1\ (1)$.

α) Να προσδιορίσετε δικαιολογώντας την απάντησή σας :

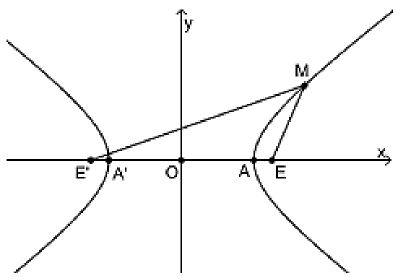
i. Τις συντεταγμένες των εστιών της.

ii. Την εκκεντρότητά της.

iii. Τις εξισώσεις των ασύμπτωτων της υπερβολής.

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που εφάπτεται στην υπερβολή στο σημείο της, $A\left(\sqrt{5},\frac{1}{2}\right)$.

23. Η υπερβολή στο διπλανό σχήμα έχει εστίες τα σημεία $E'(-10,0)$ και $E(10,0)$ και κορυφές τα σημεία $A'(-8,0)$ και $A(8,0)$.



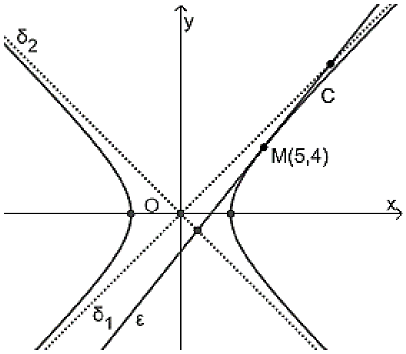
α) Να αποδείξετε ότι η υπερβολή έχει εξίσωση $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$.

β) Έστω ένα σημείο της υπερβολής.

i. Να αποδείξετε ότι $\left|(ME')-(ME)\right|=16$.)

ii. Αν $(ΜΕ)=9$, να βρείτε την απόσταση του σημείου Μ από την εστία Ε΄.

24. Στο διπλανό σχήμα η υπερβολή C έχει εξίσωση $x^2-y^2=9$, οι ευθείες δ_1, δ_2 είναι οι ασύμπτωτες της C και η ε είναι η εφαπτομένη της C στο σημείο της M(5,4).



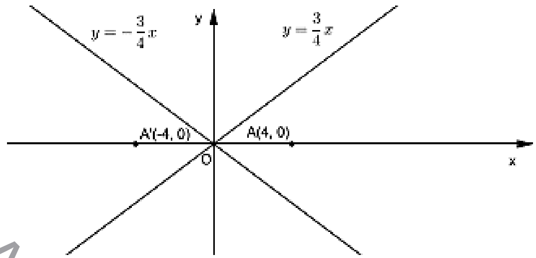
α) Να αποδείξετε ότι:

i. Οι εξισώσεις των ασυμπτώτων είναι $\delta_1: y=x$ και $\delta_2: y=-x$.

ii. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο Μ είναι $5x-4y=9$.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών ε και δ_1 καθώς και τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών ε και δ_2.

25. Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy η υπερβολή $C: \frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία $A'(-4,0)$ και $A(4,0)$ και έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $y=\frac{3}{4}x$ και $y=-\frac{3}{4}x$.



α) Να αποδείξετε ότι:

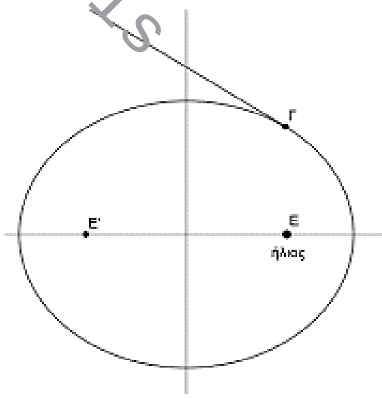
i. α = 4 και β = 3.

ii. οι εστίες της C είναι τα σημεία $E'(-5,0)$ και $E(5,0)$.

β) Να σχεδιάσετε το παρακάτω σχήμα, συμπληρώνοντάς το με την παραπάνω υπερβολή C.

26. Πλανήτης κινείται πάνω σε επίπεδο, ελλειπτικά γύρω από τον ήλιο του. Στο καρτεσιανό επίπεδο ο ήλιος βρίσκεται στην εστία της έλλειψης Ε(γ,0), ενώ η άλλη εστία είναι στο Ε΄(-γ,0). Η εκκεντρότητα της τροχιάς είναι 0,6 ενώ ο μεγάλος άξονας 10.

α) Να βρεθεί η εξίσωση της τροχιάς.



β) Θεωρούμε ότι ο πλανήτης κινείται πάνω στην $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

i. Τη στιγμή που ο πλανήτης βρίσκεται στο σημείο $\Gamma\left(3,\frac{16}{5}\right)$ εκπέμπεται από αυτόν σήμα που κινείται κατά τη διεύθυνση της εφαπτομένης της τροχιάς του προς τη μεριά του άξονα Oy. Να εξετάσετε αν αυτό το σήμα θα περάσει από το σημείο $\Delta(0,5)$.

ii. Κομήτης κινείται στο ίδιο επίπεδο με τον πλανήτη και πάνω στην καμπύλη $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$ με $x>0$.

Ποια είναι τα σημεία συνάντησης των δύο τροχιών;

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

1. Στο ορθογώνιο σύστημα αξόνων Oxy θεωρούμε τα σημεία Α, Β , τα οποία έχουν τετμημένες τις ρίζες της εξίσωσης $x^2-\left(4\lambda+6\mu\right)x-2005=0$ και τεταγμένες τις ρίζες της εξίσωσης $y^2+\left(-5\lambda+2\mu\right)y+2006$. Να προσδιοριστεί οι $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ ώστε το μέσο του ΑΒ να έχει συντεταγμένες $\left(13,2\right)$.

2. Δίνονται τα σημεία $\mathrm{B}\left(\alpha-2,\beta\right),\Gamma\left(\alpha-4,\beta+2\right),\mathrm{M}\left(\alpha-3,\beta+1\right)$ και Α τέτοιο ώστε $\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\left(1,1\right)$

α) Να δείξετε ότι το Μ είναι μέσο του ΒΓ.

β) Να υπολογίσετε το $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\right|$.

γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Α.

δ) Να δείξετε ότι τα σημεία Α , Β , Γ ορίζουν τρίγωνο το οποίο είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

3. Δίνονται τα σημεία $\Delta\left(4,6\right),\mathrm{E}\left(1,2\right)$. Να βρείτε :

α) τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{\Delta\mathrm{E}}$.

β) τις συντεταγμένες του μέσου Μ του ΔΕ .

γ) τις συντεταγμένες του συμμετρικού του Δ ως προς το Ε.

4. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{u}$ $\vec{u}=\left(3\lambda+\mu,\lambda-\mu+8\right)$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές των $\lambda,\ \mu\in\mathbb{R}$ το διάνυσμα $\vec{u}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα.

β) Να βρείτε για ποιες τιμές των $\lambda,\ \mu\in\mathbb{R}$ το διάνυσμα $\vec{u}$ είναι ίσο με το διάνυσμα $\vec{a}=(4,8)$.

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές των $\lambda,\ \mu\in\mathbb{R}$ μ το διάνυσμα $\vec{u}$ είναι παράλληλο στο διάνυσμα $\vec{v}=(-1,1)$ και η τεταγμένη του $\vec{u}$ είναι διπλάσια από την τετμημένη του.

δ) Να βρείτε για ποιες τιμές των $\lambda,\ \mu\in\mathbb{R}$ το διάνυσμα $\vec{u}$ είναι παράλληλο στον άξονα y΄y και $|\vec{u}|=8$.

5. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{A}}=60^\circ$ και $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\dfrac{3}{4}|\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}|$.Αν για κάποιο σημείο Δ ισχύει : $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}=2\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ να δειχτεί ότι :

α) τα σημεία Δ,Β,Γ είναι συνευθειακά.

β) τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \vec{A\Delta}$ και $\vec{\beta} = \vec{AB} + 3\vec{A\Gamma}$ είναι κάθετα.

γ) αν $|\vec{A\Gamma}| = 4$ να βρεθεί το $|\vec{A\Delta}|$.

6. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ με $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$ και γωνία ίση με 2π/3.

α) Να υπολογίσετε τα μήκη των διαγωνίων του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ με πλευρές τα διανύσματα $\vec{AB} = 2\vec{a} + \vec{\beta}$ και $\vec{A\Delta} = \vec{a} - 2\vec{\beta}$.

β) Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{a}$, $3\vec{a} + \vec{\beta}$.

γ) Να προσδιορίσετε το $\kappa \in \Re$ ώστε τα διανύσματα $\vec{u} = \kappa\vec{a} + \vec{\beta}$ και $\vec{v} = \vec{a} - \vec{\beta}$ να είναι κάθετα.

7. Σε τρίγωνο ΔΕΖ είναι $\vec{\Delta E} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ και $\vec{\Delta Z} = 3\vec{\beta}$, όπου $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 2$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{3\pi}{4}$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων : $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$, $(5\vec{\beta} + \vec{\alpha})^2$, $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|$.

β) Αν Ν είναι το μέσον της πλευράς ΕΖ:

i) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\vec{\Delta N}$ και $\vec{EZ}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

ii) Να βρείτε τη γωνία των $\vec{\Delta N}$ και $\vec{EZ}$.

8. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\vec{AB} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$, $\vec{A\Gamma} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 1$ και $(\vec{\alpha} \hat{,} \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$.

α) Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

i. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ ii. $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$ iii. $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|$

β) Αν Μ το μέσο του ΒΓ, να εκφράσετε τα διανύσματα $\vec{AM}$ και $\vec{B\Gamma}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

γ) Να υπολογίσετε το συνημίτονο της γωνίας $(\vec{AM}, \vec{B\Gamma})$.

9. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύει $|\vec{\alpha}| = 3$, $|\vec{\beta}| = 2$, $|\vec{\gamma}| = 1$ και $\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} + 3\vec{\gamma} = \vec{0}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 4$.

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha}$.

10. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει $\left|\vec{\alpha}\right| = \sqrt{2}, \left|\vec{\beta}\right| = 1$ και

$\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right) \perp \left(2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\right)$

α) Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ = 1.

β) Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\beta}$.

γ) Να αποδείξετε ότι: $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right| = \left|2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\right|$

11. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει: $2\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (4,0)$ και $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (3, \sqrt{3})$.

α) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} = (1, -\sqrt{3})$ και $\vec{\beta} = (2, 2\sqrt{3})$.

β) Να βρεθεί η γωνία διανύσματος $\vec{\beta}$ με τον οριζόντιο άξονα x΄x.

γ) Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζουν μεταξύ τους τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

12. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = 4\vec{\beta} - \vec{a}$ και $\vec{v} = 2\vec{a} + 2\vec{\beta}$. Αν $|\vec{\alpha}| = 3$, $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$ και $(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = \dfrac{3\pi}{4}$,να υπολογίσετε :

α) το μέτρο του διανύσματος $\vec{r} = \vec{u} + \vec{v}$.

β) το μέτρο του διανύσματος $\vec{g} = \vec{u} - \vec{v}$.

γ) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{r}\cdot\vec{g}$.

13. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο είναι : $|\overrightarrow{AB}| = 4, |\overrightarrow{A\Gamma}| = 6$ και η γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ *είναι* $\dfrac{\pi}{3}$. Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ,τότε :

α) να υπολογίσετε το $|\overrightarrow{AM}|$.

β) να αποδείξετε ότι η προβολή του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ πάνω στο διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ είναι το διάνυσμα $\dfrac{14}{19}\overrightarrow{AM}$.

14. Για τα διανύσματα $\vec{a},\vec{\beta}$ ισχύουν οι σχέσεις $2\vec{a} + 3\vec{\beta} = (4,-2)$ και $\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} = (-7,8)$.

α) να δείξετε ότι $\vec{\alpha} = (-1,2)$ και $\vec{\beta} = (2,-2)$.

β) να βρεθεί ο κ $\in$R ,ώστε τα διανύσματα $\kappa\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ να είναι κάθετα.

γ) **ν**α αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (3,-1)$ σε δύο κάθετες συνιστώσες ,από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$.

15. Για τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ δίνεται ότι $|\vec{a}|=1, |\vec{\beta}|=2$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{\pi}{3}$.

Έστω τα διανύσματα $\vec{u}=2\vec{a}+3\vec{\beta}$ και $\vec{v}=\vec{a}-2\vec{\beta}$. Να υπολογίσετε :

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.

β) τα μέτρα $|\vec{u}|, |\vec{v}|$.

γ) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

δ) το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$.

16. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,1)$, $\vec{\beta}=(5,7)$ του καρτεσιανού επιπέδου.

α) Να βρείτε τα διανύσματα $\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{\delta}=3\vec{\beta}-2\vec{\alpha}$.

β) Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού λ ,για την οποία το διάνυσμα $\vec{x}=(\lambda,-6)$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.

γ) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\frac{1}{2}\vec{\gamma}$,όπου $\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.

17. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}=(1,2)$ και $\vec{\beta}=(2,3)$.

α) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}=5\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$.

β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το $\vec{\gamma}$ με τον άξονα x΄x .

γ) Να βρείτε τον αριθμό $k\in\mathbb{R}$,ώστε το διάνυσμα $\vec{u}=(k^2-k,k)$ να είναι κάθετο στο $\vec{a}$.

<u>ΕΥΘΕΙΑ</u>

18. Σε τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε: $A(3,10), B(6,4)$ και $H(3,7)$ το ορθόκεντρο του . Να βρείτε:

α) τις εξισώσεις των υψών ΑΔ,ΒΕ .

β) τις εξισώσεις των πλευρών του.

γ) τις συντεταγμένες της κορυφής Γ .

δ) τις συντεταγμένες του Δ.

19. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $A(-6,0)$, $\vec{AB}=(6,6)$ και $\vec{B\Gamma}=(4,0)$.

α) Να δείξετε ότι η ευθεία ΑΒ έχει εξίσωση: $y=x+6$.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των Β και Γ και να υπολογίσετε την γωνία $A\hat{B}\Gamma$.

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του.

20. Δίνονται οι ευθείες (ε_1) $: y=x+1$ και (ε_2): $x+2y-8=0$.

α) Να βρεθεί το σημείο τομής Α των δύο ευθειών

β) Να βρεθεί το σημείο τομής Β της ευθείας (ε_1) με τον y΄y

γ) Να βρεθεί το συμμετρικό του Β ως προς την (ε_2)

δ) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας ΑΒ .Πως ονομάζεται η ευθεία ΑΒ σε σχέση με την (ε_2);

21. Δίνεται η εξίσωση: $x^2+2xy+y^2-4=0$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει τις ευθείες $\varepsilon_1: x+y+2=0$ και $\varepsilon_2: x+y-2=0$.

β) Να δείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες

γ) Να βρεθεί η απόσταση των ευθειών ε_1 και ε_2

δ) Αν $\mathrm{A}(-1,-1)$ είναι σημείο της ευθείας ε_1 και Β, Γ είναι αντίστοιχα τα σημεία τομής της ευθείας ε_2 με τον οριζόντιο άξονα x΄x και τον κατακόρυφο άξονα y΄y, να βρεθεί το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ

22. Δίνεται η εξίσωση $\varepsilon: (\lambda^2+\lambda-2)x+(\lambda-1)y+\lambda^2-1=0, \lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση να παριστάνει ευθεία.

β) Να βρεθεί ο λ ώστε η ευθεία (ε) διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

γ) Να δείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την παραπάνω εξίσωση διέρχονται από το ίδιο σημείο Κ.

δ) Αν το σημείο Κ είναι το κέντρο ενός τετραγώνου του οποίου η μία πλευρά του ανήκει στην ευθεία $\eta:\ 3x-4y=0$ να βρεθεί το εμβαδόν του τετραγώνου.

23. Δίνεται η ευθεία ε: $2x+y-3=0$ και το σημείο $A(3,2)$.

α) Να βρείτε την προβολή του Κ του σημείου Α πάνω στην ε.

β) Να βρείτε το συμμετρικό σημείο Λ του Α ως προς την ε.

γ) Αν Μ είναι σημείο της ε με τετμημένη 2, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΚΛΜ.

24. Δίνονται τα σημεία Α(8,0) και Β(0,4) του καρτεσιανού επιπέδου Oxy.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από την αρχή των αξόνων Ο και το μέσο Δ του τμήματος ΑΒ.

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο Δ και είναι κάθετη στην ευθεία ΟΔ.

γ) Έστω Μ τυχαίο σημείο της παραπάνω ευθείας (ε). Να δείξετε ότι ισχύει η σχέση: $\overrightarrow{\mathrm{MA}}^2+\overrightarrow{\mathrm{MB}}^2=2\overrightarrow{\mathrm{OM}}^2$.

25. Δίνεται η εξίσωση (ε) : $\kappa x-(\kappa+1)y+2=0$, $\kappa\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή του αριθμού κ.

β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες με εξίσωση (ε) διέρχονται για κάθε τιμή του κ από σταθερό σημείο το οποίο και να βρεθεί.

γ) Να βρείτε τις τιμές του κ για τις οποίες η παραπάνω ευθεία σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδό 4 τ.μ.

26. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon\ :\left(-\lambda+2\right)x+\lambda y+3\lambda-1=0$ και

$\zeta\ :\ \left(\lambda-1\right)x+\lambda y+5=0.$

α) Να βρείτε τον λ, ώστε να είναι $\varepsilon\ //\ \zeta$.

β) Να βρείτε τον λ, ώστε να είναι $\varepsilon\perp\zeta$.

γ) Αν $\lambda=1$ να βρείτε την γωνία που σχηματίζουν οι δύο ευθείες.

27. Δίνονται η εξίσωση $x^2-y^2+4x-6y-5=0$ (1) και το σημείο $\mathrm{A}\left(2\lambda,\lambda+3\right)$.

Να αποδείξετε ότι :

α) η εξίσωση παριστάνει 2 ευθείες κάθετες μεταξύ τους

β) το σημείο Α κινείται σε μία ευθεία ,η οποία να βρεθεί .

γ) Αν $\lambda=1$ να βρεθεί το συμμετρικό του Α ως προς την ευθεία $(\varepsilon): y=-x-1$

28. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{\gamma}$, $\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{\Gamma\mathrm{A}}=\vec{\beta}$ και η εξίσωση:

$(\varepsilon)\ ;(\vec{a}\cdot\vec{\beta})\cdot x+(\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})\cdot y+\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=0$

α) Να δείξετε:

i) Η (ε) παριστάνει πάντα ευθεία.

ii) Αν η ευθεία που παριστάνει η (ε) είναι παράλληλη σε κάποιον από τους άξονες χ΄χ , ψ΄ψ τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

β) Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $\hat{\mathrm{A}}=120^0$ τότε να βρεθεί ο αριθμός κ ώστε η ευθεία με εξίσωση (ε) διέρχεται από το σημείο $\left(1,\kappa\right)$.

29. Έστω ε_1 η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $\mathrm{P}\left(-1,3\right)$ και τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y στα σημεία Α, Β αντίστοιχα, ώστε το Ρ να είναι μέσο του ΑΒ.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας ε_1 είναι $y=3x+6$.

β) Θεωρούμε τα σημεία $\Gamma(-5,1)$ και $\Delta(2\alpha-7,5-4\alpha)$ και το σημείο Δ ανήκει στην ευθεία ε_1 .

i) Να αποδείξετε ότι $\alpha=2$ και να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου ΡΓΔ.

ii) Για $\alpha=2$ να βρείτε τη μεσοκάθετο ε_2 του ευθυγράμμου τμήματος ΓΔ.

iii) Για $\alpha=2$ να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_2 .

<u>ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ</u>

30. Δίνονται τα σημεία $\mathrm{A}\left(2,3\right),\mathrm{B}\left(5,\lambda\right)$ και $\Gamma\left(\lambda-6,5\right)$, με $\lambda\in\mathbb{R}$,για τα οποία ισχύει ότι $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=-35$. Να βρείτε :

α) τον αριθμό λ.

β) την απόσταση του σημείου Γ από την ευθεία ΑΒ.
γ) τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο Α και ισαπέχουν από τα σημεία Β και Γ.

31. Οι παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1: y=\lambda x+\lambda$ και $\varepsilon_2: y=\lambda x+2$ απέχουν απόσταση ίση με 1.
α) Να βρείτε τον αριθμό λ.
β) Να βρείτε τη μεσοπαράλληλη των ε_1 και ε_2.
γ) Έστω ε_3 η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(4,2)$ και τέμνει την ε_1 σε σημείο με τετμημένη 7.Να βρείτε :
i) την εξίσωση της ευθείας ε_3.
ii) τις διχοτόμους των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες ε_2 και ε_3.

32. Οι ευθείες $\varepsilon_1: \lambda x+(\lambda-4)y+2=0$ και $\varepsilon_2: (\lambda-1)x+(3-\lambda)y-3=0$ είναι κάθετες .Να βρείτε :
α) τον αριθμό λ.
β) τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο Ρ(2,-1) και σχηματίζουν με τις ε_1 και ε_2 τρίγωνο με εμβαδόν 1 τ.μ.

33. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\Gamma(-2,-1)$, στο οποίο η πλευρά ΑΒ βρίσκεται πάνω στην ευθεία με εξίσωση $2x+y-10=0$ και το ύψος ΑΔ βρίσκεται πάνω στην ευθεία με εξίσωση : $x+3y-15=0$.Να βρείτε :
α) τις συντεταγμένες της κορυφής Α
β) τις εξισώσεις των πλευρών ΑΓ και ΒΓ
γ) τις συντεταγμένες της κορυφής Β
γ) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

34. Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Οxy η εξίσωση της ευθείας

$(\lambda-1)x+(\lambda+1)y-\lambda-3=0$ όπου λ πραγματικός αριθμός περιγράφει τη φωτεινή ακτίνα που εκπέμπει ένας περιστρεφόμενος φάρος Φ.
α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του φάρου Φ
β) Τρία πλοία βρίσκονται στα σημεία $K(2,2), \Lambda(-1,5)$ και $M(1,3)$. Να βρείτε τις εξισώσεις των φωτεινών ακτίνων που διέρχονται από τα πλοία Κ,Λ και Μ.
γ) Να υπολογίσετε ποιο από τα πλοία Κ και Λ βρίσκονται πλησιέστερα στην φωτεινή ακτίνα που διέρχεται από το πλοίο Μ.
δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της θαλάσσιας περιοχής που ορίζεται από το φάρο Φ και τα πλοία Λ και Μ.

ΚΥΚΛΟΣ

35. Δίνεται η εξίσωση $C: x^2+(y+1)^2+2\lambda(x-y-1)=0$, με $\lambda \neq 0$.

Να αποδειχθεί ότι :

α) Η εξίσωση αυτή παριστάνει ένα μεταβλητό κύκλο, για κάθε $\lambda \neq 0$. Να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα των κύκλων C.

β) Οι κύκλοι C διέρχονται από ένα σταθερό σημείο Ρ, το οποίο να προσδιοριστεί.

γ) Τα κέντρα των παραπάνω κύκλων βρίσκονται σε μια ευθεία.

δ) Οι κύκλοι C εφάπτονται στη ευθεία (ε): $x-y-1=0$ στο σημείο Ρ.

36. Η εξίσωση $4x^2-4(\alpha+1)x-\beta(\beta-2)=0$, έχει δύο ίσες πραγματικές ρίζες.

Να υπολογίσετε:

α) το γεωμετρικό τόπο των σημείων $\mathrm{M}(\alpha,\beta)$.

β) την εφαπτομένη του προηγούμενου γεωμετρικού τόπου, η οποία άγεται από το σημείο $\mathrm{A}(0,2)$.

37. Έστω η εξίσωση $x^2+y^2-2\lambda x-2\lambda y+2\lambda^2-4=0$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ (1).

α) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει ένα σύνολο ίσων κύκλων.

β) Να υπολογίσετε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων.

γ) Να αποδείξετε ότι κάθε κύκλος εφάπτεται σε δύο σταθερές ευθείες, των οποίων να υπολογίσετε τις εξισώσεις.

38. Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-2x\sigma\upsilon\nu\theta-2y\eta\mu\theta-1=0,\ 0\leq\theta<2\pi.$

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε θ η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο, του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα.

β) Αν $\theta=\frac{\pi}{2}$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο $\mathrm{M}(1,2)$.

γ) Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του θ τα κέντρα των παραπάνω κύκλων βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο $\mathrm{O}(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$.

39. Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-2\mu x+2\mu y+\mu^2-1=0\ (1)$, $\mu\in\mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\mu\in R$ και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

β) Να δείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων (1) βρίσκονται πάνω στην ευθεία y = -x.

γ) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει κύκλος που περιγράφεται από την εξίσωση (1) που να εφάπτεται στους άξονες χ΄χ και y΄y

δ) Για $\mu = 7$ στην (1), να βρείτε τις ευθείες που εφάπτονται στον κύκλο που προκύπτει από την (1) και σχηματίζουν με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο

40. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2 = 2x\ln\theta + \ln^2\theta + 4\ln\theta$ (1), $\theta > 0$

α) Για ποιες τιμές του θ η (1) παριστάνει κύκλο;

β) Για τις τιμές του θ του (i) ερωτήματος να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του κύκλου.

γ) Να εξεταστεί αν υπάρχει τιμή του θ ώστε η ευθεία ζ: $y = x + 4$ να εφάπτεται του κύκλου.

41. α) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου (c_1), που διέρχεται από τα σημεία $A(0,5), B(2,-1)$ και $\Gamma(-2,1)$.

β) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου (c_2), ο οποίος διέρχεται από το σημείο $\Delta(2,7)$ και εφάπτεται στον κύκλο (c_1) στο σημείο $A(0,5)$.

γ) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης (ε), του κύκλου (c_1) που διέρχεται από το σημείο $E(-9,2)$ και σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ οξεία γωνία.

42. Δίνονται οι κύκλοι C_1: $x^2 + y^2 = 1$ και C_2: $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

α) Να δείξετε ότι δεν έχουν κοινό σημείο.

β) Να βρείτε την εξίσωση της διακέντρου.

γ) Από όλα τα ζεύγη σημείων (Α, Β), όπου το Α ανήκει στον C_1 και το Β στον C_2, να βρεθεί αυτό για το οποίο τα Α, Β απέχουν τη μικρότερη απόσταση.

δ) Να βρεθεί το ζεύγος σημείων (Γ, Δ) (το Γ στον C_1, το Δ στον C_2) με τη μεγαλύτερη απόσταση.

43. Δίνεται η εξίσωση $(x-1)^2 + y^2 = 2n(x+y-1)$, για κάθε $n \in R$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε n η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο, του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα.

β) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι διέρχονται από σταθερό σημείο Α. Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου Α

γ) Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω κύκλοι εφάπτονται της ευθείας x+y-1=0 στο σημείο Α.

44. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x\eta\mu\theta - 2y\sigma\upsilon\nu\theta - 3 = 0 (1), \theta \in \Re$

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο C για κάθε $\theta \in \Re$ του οποίου να βρείτε το κέντρο Κ και την ακτίνα ρ.

β) Να δείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων που ορίζονται από την (1) ανήκουν σε κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

γ) Να δείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: x\ \eta\mu\theta + y\ \sigma\upsilon\nu\theta - 3 = 0$ εφάπτεται του κύκλου C για κάθε $\theta \in \Re$.

45. α) Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2+6\mu x+8\lambda y=0$ όπου μ ,λ πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός .Να δείξετε ότι για κάθε τιμή των μ,λ η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων Ο.

β) Έστω ότι για τους πραγματικούς μ,λ ισχύει η σχέση $3\mu+2\lambda=0$

i) Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την εξίσωση $x^2+y^2+6\mu x+8\lambda y=0$ για τις διάφορες τιμές των μ,λ έχουν τα κέντρα τους σε ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ii) Να βρείτε τα $\mu,\lambda\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε αν Α,Β είναι τα σημεία τομής του αντίστοιχου κύκλου με την ευθεία $x+y+2=0$ να ισχύει $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$.

iii) Για τις τιμές των $\mu,\lambda\in\mathbb{R}$ που βρήκατε στο ερώτημα β να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΑΟΒ

46. Δίνεται ένα τρίγωνο με κορυφές $\mathrm{A}(2\lambda-1,3\lambda+2),\mathrm{B}(1,2)$ και $\Gamma(2,3)$ όπου $\lambda\in\mathbb{R}$ με $\lambda\neq-2$.

α) Να αποδείξετε ότι το σημείο Α κινείται σε ευθεία, καθώς το λ μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$.

β) Εάν $\lambda=1$, να βρείτε:

i) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ

ii) την εξίσωση του κύκλου, που έχει κέντρο την κορυφή Α(1,5) και εφάπτεται στην ευθεία ΒΓ.

47. Δίνονται οι παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1:\ 3x+4y+6=0$ και $\varepsilon_2:\ 3x+4y+16=0$.

α) Να βρείτε την απόσταση των παράλληλων ευθειών ε_1 και ε_2

β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης ευθείας των ε_1 και ε_2

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο τομής της ευθείας ε_1 με τον άξονα χ΄χ και αποκόπτει από την ευθεία ε_2 χορδή μήκους δ=$4\sqrt{3}$

ΠΑΡΑΒΟΛΗ

48. Δίνεται η παραβολή C: $x^2=-2y$

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε), η οποία τέμνει την C στα σημεία Α και Β, ώστε το σημείο $\mathrm{M}\left(1,-\frac{3}{2}\right)$ να είναι μέσο του ΑΒ.

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) διέρχεται από την εστία της παραβολής.

γ) Να βρείτε τα σημεία Α και Β.

δ) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ εφάπτεται στη διευθετούσα της παραβολής.

49. Έστω ότι η παραβολή C έχει κορυφή την αρχή των αξόνων, άξονα συμμετρίας τον x΄x και εστία το σημείο $\mathrm{E}(1,0)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής.

β) Να βρείτε τις εφαπτόμενες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ της παραβολής C που διέρχονται από το σημείο $M\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$.

γ) Να βρείτε την οξεία γωνία των ευθειών ε_1 και ε_2.

50. Δίνεται ο κύκλος C: $x^2 + y^2 = 25$ και $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ οι εφαπτομένες του κύκλου από το σημείο $\mathrm{M}(0,-10)$. Αν Α και Β τα σημεία επαφής των ε_1,ε_2 με τον κύκλο ,να βρείτε :

α) τις εξισώσεις των εφαπτομένων ε_1 και ε_2

β) τις συντεταγμένες των σημείων επαφής Α και Β ,

γ) την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και διέρχεται από τα σημεία Α και Β

51. Δίνεται η παραβολή: $y^2 = 3x$ και δύο σημεία της $\mathrm{A}(x_1, y_1)$ και $\mathrm{B}(x_2, y_2)$ με $x_1 \neq x_2$, $B\widehat{O}A = 90^o$. Να δείξετε ότι:

α) $x_{1.} \cdot x_2 = 9$ και $y_1 \cdot y_2 = -9$,

β) Η ΑΒ διέρχεται από σταθερό σημείο του xx΄,

γ) Οι εφαπτομένες της παραβολής στα Α και Β τέμνονται στο σημείο Μ το οποίο κινείται σε σταθερή ευθεία.

52. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$ και η ευθεία $(\varepsilon): y = x - 1$.

α) Να δείξετε ότι η **(ε)** περνά από την εστία της παραβολής.

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία Α, Β της **(ε)** και της παραβολής.

γ) Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες της παραβολής στα σημεία Α, Β είναι κάθετες.

δ) Να δείξετε ότι κάθε ευθεία που περνά από την εστία και τέμνει την παραβολή σε δύο σημεία έχει την ιδιότητα (γ).

53. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - y^2 + 6x + 9 = 0$

α) Να δείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει 2 ευθείες ε_1 και ε_2.

β) Να δείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι κάθετες.

γ) Να βρείτε ένα σημείο $\mathrm{M}(\kappa, \lambda)$ με $\kappa > 0$ και $\lambda > 0$ τέτοιο ώστε το διάνυσμα $\vec{a} = (3, k)$ να είναι παράλληλο προς τη μία από τις δύο ευθείες ε_1 και ε_2 και το διάνυσμα $\vec{\beta} = (-16, 4\lambda)$ να είναι παράλληλο προς την άλλη ευθεία.

δ) Να γράψετε την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων, άξονα συμμετρίας τον άξονα x΄x και διέρχεται από το σημείο Μ.

ΕΛΛΕΙΨΗ

54. Έστω η έλλειψη C που έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων, εστίες στον άξονα χ΄χ , εκκεντρότητα $\frac{\sqrt{3}}{2}$ και μεγάλο άξονα 4.

α) Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης.

β) Να βρείτε τις εφαπτόμενες της έλλειψης που διέρχονται από το σημείο $\Gamma(4,0)$.

γ) Να βρείτε την εφαπτομένη ε της C που διέρχεται από το $\Gamma(4,0)$ και εφάπτεται του κύκλου $C': x^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1}{13}$.

55. Δίνονται τα σημεία $A(-1,-2), B(5,1), \Gamma(-3,2)$.

α) Αν $\mathrm{M}(x,y)$ σημείο για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{\mathrm{MA}}^2+\overrightarrow{\Gamma\mathrm{M}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A}\Gamma}=8y-3y^2-8$ να δείξετε ότι το Μ κινείται στην έλλειψη $C_1: x^2+4y^2=1$.

β) Να βρείτε την εκκεντρότητα της παραπάνω έλλειψης

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C_2 με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα τον μικρό ημιάξονα της παραπάνω έλλειψης.

δ) Να βρείτε τις εφαπτομένες του κύκλου C_2 που διέρχονται από το σημείο τομής της έλλειψης C_1 με τον ημιάξονα Οχ.

56. Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 4$ και η έλλειψη $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{6}=1$. (1)

α) Να δείξετε ότι το σημείο $(1,-\sqrt{3})$ είναι κοινό τους σημείο και στη συνέχεια βρείτε όλα τα κοινά τους σημεία.

β) Να δείξετε ότι τα κοινά τους σημεία είναι κορυφές ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

γ) Να βρεθούν τα σημεία Μ (x_0, y_0) ώστε $x_0^{\;2}+y_0^{\;2}=4$ και $(\mathrm{E'M})+(\mathrm{EM})=2\sqrt{6}$ (όπου Ε΄, Ε οι εστίες της έλλειψης (1)).

57. Δίνονται δύο κωνικές τομές : η παραβολή $y^2=2px$, και η έλλειψη $4x^2+2y^2=3p^2, p>0$.

α) Να αποδείξετε ότι οι εστίες Ε και Ε΄ της έλλειψης είναι τα σημεία $\mathrm{E}\left(0,\frac{\sqrt{3}p}{2}\right)$ και $\mathrm{E'}\left(0,-\frac{\sqrt{3}p}{2}\right)$.

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής Κ και Λ των δύο κωνικών τομών είναι τα σημεία $K\left(\frac{p}{2}, p\right)$ και $\Lambda\left(\frac{p}{2}, -p\right)$.

γ) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των δύο κωνικών τομών στο σημείο Κ $\left(\frac{p}{2}, p\right)$ είναι κάθετες.

58. Δίνεται η έλλειψη C : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$. Έστω Μ το σημείο του 1ου τεταρτημορίου στο οποίο η διχοτόμος της 1ης -3ης γωνίας των αξόνων τέμνει την έλλειψη .Η εφαπτομένη της έλλειψης C στο Μ έχει συντελεστή διεύθυνσης $-\frac{1}{4}$.

α) Να βρείτε την εκκεντρότητα της έλλειψης C.

β) Αν επιπλέον η έλλειψη C έχει εστίες τα σημεία $E'\left(-\sqrt{6},0\right)$, $E\left(\sqrt{6},0\right)$,τότε να βρείτε :

i) Τα μήκη του μικρού και μεγάλου άξονα της έλλειψης C

ii) Τις εφαπτομένες της έλλειψης C που είναι κάθετες στην ευθεία $\zeta: y=2x+2011$.

59. Δίνεται η έλλειψη C_1 : $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ και η ευθεία $\varepsilon: y=\lambda x+4$,με $\lambda>0$.Οι εφαπτόμενες της έλλειψης στα άκρα του μεγάλου άξονα της τέμνουν την ευθεία στα σημεία Μ και Ν. Έστω C_2 ο κύκλος με διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα ΜΝ

α) Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου C_2 συναρτήσει του λ

β) Έστω ότι ο κύκλος C_2 διέρχεται από τις εστίες της έλλειψης C_1.Να βρείτε :

i) τον αριθμό λ.

ii) τις εφαπτομένες της έλλειψης C_1 που είναι παράλληλες στην ευθεία ε.

60. Δίνεται η έλλειψη C_1 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$ και ο κύκλος $x^2+y^2+2x-9=0$ (1)

α) Να βρείτε τις εστίες και την εκκεντρότητα της έλλειψης C_1

β) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C_2.

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των κωνικών τομών C_1 και C_2.

δ) Έστω ε_1 και ε_2 οι εφαπτομένες των C_1 και C_2 αντίστοιχα στο κοινό τους σημείο που ανήκει στο 1ο τεταρτημόριο .Να βρείτε :

i) τις εξισώσεις των ε_1 και ε_2.

ii) την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_2.

ΥΠΕΡΒΟΛΗ

61. Δίνεται η υπερβολή $C: x^2-3y^2=3$ και το σημείο της $M(3,\sqrt{2})$

α) Να βρεθεί το συμμετρικό της εστίας Ε της υπερβολής ως προς την εφαπτομένη της υπερβολής στο Μ.

β) Να δείξετε ότι το συμμετρικό της εστίας Ε βρίσκονται σε κύκλο που έχει κέντρο την άλλη εστία Ε΄ και ακτίνα $2\sqrt{3}$.

62. α). Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής που έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη και η εκκεντρότητα της είναι ίση με 2.

β) Στην υπερβολή $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ θεωρούμε την εφαπτομένη στο τυχαίο σημείο της Μ και την κάθετη στην εφαπτομένη στο σημείο Μ.
Αν η εφαπτομένη τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο Ρ και η κάθετη στο σημείο Κ, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OK}=16$.

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΕΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

63. Χαρακτηρίστε τις γραμμές που εκφράζουν οι παρακάτω εξισώσεις, δικαιολογώντας τον χαρακτηρισμό . Αν πρόκειται για ευθείες βρείτε τους συντελεστές διεύθυνσης, αν πρόκειται για κύκλους βρείτε τα κέντρα και τις ακτίνες ,αν πρόκειται για ελλείψεις ή υπερβολές να βρείτε τις εστίες και την εκκεντρότητα.

α) $2x^2+2y^2-6x+10y=1$, **β)** $x^2-y^2-2y-1=0$, **γ)** $9x^2+y^2=4$ **.**

64. Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία $A(5,-1), B(4,4)$ και $\Gamma(2,1)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς ΒΓ και του ύψους ΓΔ του τριγώνου.

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από την κορυφή Γ του τριγώνου και απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με 2 μονάδες.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής C που διέρχεται από την κορυφή Γ του τριγώνου, έχει κορυφή το $O(0,0)$ και άξονα συμμετρίας τον y'y.

65. Δίνεται ο κύκλος $C_1: x^2+y^2-6x+1=0$ και η παραβολή $C_2: y^2=4x$.

α) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C_1 καθώς και την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής C_2 .

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία Μ,Ν των C_1, C_2 .

γ) Να βρείτε τις εφαπτόμενες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ της παραβολής στα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα.

δ) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ εφάπτονται και στο κύκλο C_1 .

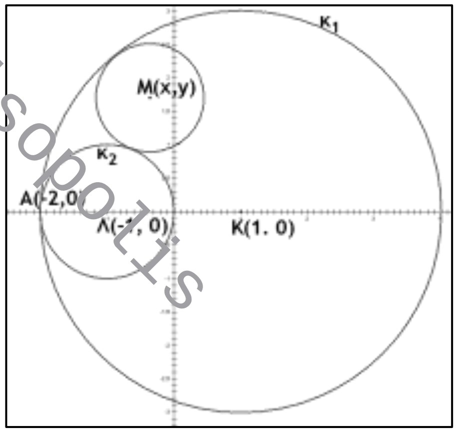
66. Δίνεται ο κύκλος (c) : $x^2+y^2=4$ και η ευθεία (ε) : $y=-2x+5$.

α) Να βρεθεί η σχετική θέση του κύκλου (c) και της ευθείας(ε) .
β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε_1) του κύκλου (c) που είναι παράλληλη προς την (ε) και τέμνει τους ίδιους ημιάξονες με την (ε)
γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ, όπου Ο η αρχή των αξόνων , Α,Β τα σημεία τομής της (ε_1) με τους άξονες

67. Δίνεται η ευθεία $y=\lambda x$ και ο κύκλος $x^2+y^2-4x+1=0$.Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε η ευθεία:
α) να τέμνει τον κύκλο
β) να εφάπτεται του κύκλου
γ) να μην έχει κοινά σημεία με τον κύκλο.

68.Δίνεται η εξίσωση : C: $\dfrac{x^2}{10+8\text{συν}\theta}+\dfrac{y^2}{10-8\text{συν}\theta}=1,\ \theta\in\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$
α) Να βρεθεί τι παριστάνει η C για τις διάφορες τιμές του θ.
β) Να δείξετε ότι το σημείο $M(|\vec{\alpha}+2\vec{\beta}|,|\vec{\alpha}-2\vec{\beta}|)$ με $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=1$ και $\text{συν}(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\theta$, ανήκει στην C.
γ) Αν λ ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C στο Μ, να βρεθεί η συγκεκριμένη εξίσωση της C ώστε ο λ^2 να γίνεται μέγιστος.

69. Στο σχήμα δίνονται οι κύκλοι κ_1 και κ_2 με κέντρα τα Κ και Λ αντίστοιχα, που εφάπτονται εσωτερικά στο $A(-2,0)$. Ο κύκλος κέντρου $M(x,y)$ εφάπτεται και στους δύο άλλους.



α) Να βρείτε τις εξισώσεις των κύκλων κ_1 και κ_2.
β) Να δείξετε ότι $|\vec{MK}|+|\vec{M\Lambda}|=4$
γ) Να δείξετε ότι το ο γεωμετρικός τόπος του Μ είναι η έλλειψη c: $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.
Να βρείτε τις εστίες, τους άξονες και την εκκεντρότητα της.
δ) Αν Β είναι κορυφή της c στον θετικό ημιάξονα y΄y να βρείτε την γωνία $B\hat{K}O$, όπου Ο η αρχή των αξόνων.

70. α) Δίνεται η εξίσωση $x^2+(y-1)^2-\mu(x-y)=1+2\mu\ (1)$, όπου $\mu\in R$.

i) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του μ η (1) παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

ii) Να βρείτε εκείνον τον κύκλο που ορίζεται από την (1) και εφάπτεται στον άξονα x'x

β) Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(y-1,1)$ και $\vec{\beta}=(y+1,-4x+1)$.

i) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(x,y)$ για τα οποία ισχύει: $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$.

ii) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων $\mathrm{N}(x,y)$ για τα οποία ισχύει: $\left|5\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|=3\sqrt{2}$.

iii) Αν $C_1: y^2=4x$ και $C_2:(x+1)^2+(y-\frac{3}{2})^2=\frac{9}{8}$ να βρείτε την εφαπτομένη ε της παραβολής C_1 στο $\mathrm{A}(1,2)$ και να αποδείξετε ότι εφάπτεται και στον κύκλο C_2.

71. Δίνεται η εξίσωση (C_μ) : $x^2+y^2+2\mu x-4(\mu+1)y+8\mu+4=0$.

α) Να δείξετε ότι για κάθε μ≠0 παριστάνει κύκλο. Τι συμβαίνει όταν μ=0;

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) πάνω στην οποία κινούνται τα κέντρα των κύκλων αυτών

γ) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι έχουν κοινή εφαπτομένη την ευθεία $x-2y+4=0$

δ) Ένα καβούρι βρίσκεται στην εστία της παραβολής $y^2=8x$.Αν ένα χταπόδι κινείται πάνω στον κύκλο C_1 που ορίζεται από τους κύκλους (C_μ) για μ=1, τότε να βρείτε αν το χταπόδι φάει το καβούρι και να δικαιολογήσετε την απάντηση σας (Το χταπόδι τρώει οτιδήποτε βρίσκεται εντός του κυκλικού δίσκου του κύκλου πάνω στον οποίο κινείται).

72. Τρεις φιλικές οικογένειες κινούμενες με τα αυτοκίνητά τους σε μια άγνωστη γι' αυτούς μεγάλη πόλη χάθηκαν λόγω κυκλοφοριακής συμφόρησης που παρατηρήθηκε. Από τους τουριστικούς χάρτες που είχαν διαπίστωσαν ότι κινούνταν σε τρεις ευθύγραμμους δρόμους με εξισώσεις $(1+\kappa)x+(2-\kappa)y=2(4+\kappa)$ με $\kappa=1,2,3$.

α) Να δείξετε ότι οι τρεις αυτοί δρόμοι διέρχονται από το ίδιο σημείο Κ.

β) Σε μια χρονική στιγμή διαπίστωσαν ότι και οι τρεις βρίσκονταν σε σημεία που είχαν την ίδια τεταγμένη $y=6$. Ποιες είναι αυτή τη στιγμή οι μεταξύ τους αποστάσεις;

γ) Αν τα τρία αυτοκίνητα κινούνται με την ίδια ταχύτητα, ποιο από αυτά θα φτάσει πρώτο στο σημείο συνάντησης;(ως στιγμή 0 θεωρούμε τη χρονική στιγμή του (β) ερωτήματος)

73. Ένα πλοίο κινείται ,σε μια θαλάσσια περιοχή, βορειοανατολικά με ευθεία πορεία η οποία σχηματίζει γωνία 60^0 με την κατεύθυνση δύση – ανατολή.Την στιγμή $t=0$ το πλοίο βρίσκεται νότια ενός φάρου Ο και σε απόσταση από αυτόν 4 ναυτικά μίλια.Θεωρούμε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων με αρχή τον φάρο και άξονα χ΄χ την κατεύθυνση δύση – ανατολή και μονάδα του κάθε άξονα το 1 ν. μ.

α) Να βρείτε την εξίσωση της πορείας του πλοίου.

β) Να βρείτε πόσο κοντά από τον φάρο θα περάσει το πλοίο.

γ) Ο καπετάνιος του πλοίου παρατηρεί τη θέση ενός άλλου πλοίου το οποίο σε χρόνο t βρίσκεται στη θέση $(2t+1\ ,t+2)$ για κάθε $t \geq 0$.Ποια είναι η πορεία του πλοίου;

δ) Πρέπει να ανησυχεί ο καπετάνιος για πιθανή σύγκρουση των δύο πλοίων; Σε ποιο σημείο είναι δυνατόν να συμβεί αυτή;

74. Σε αγώνες ταχύτητας αυτοκινήτων τη στιγμή που ένα από τα οχήματα κινείτο σε στροφή κύκλου εξίσωσης $C:\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{2}$ ξέφυγε από το δρόμο κινούμενο κατά την διεύθυνση της εφαπτομένης και έπεσε σε παρακείμενο δέντρο στο σημείο $A\left(\frac{9}{2},\frac{3}{2}\right)$.

α) Να εξετάσετε αν ο κύκλος C διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθύγραμμης τροχιάς που ακολούθησε το αυτοκίνητο όταν ξέφυγε από τη στροφή και προσέκρουσε στο δέντρο Α.

γ) Αν Β είναι το σημείο που ο άξονας y΄y τέμνει τον κύκλο C, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΑΒ.

75. Δίνεται η υπερβολή $C:\ 4x^2-y^2=4$.

α) Να βρείτε τις εστίες Ε και Ε΄ και τις ασύμπτωτες ε και ε΄ της C,

β) Να βρείτε το σημείο Μ της ευθείας $y=-3x+1$, ώστε η ΕΜ να είναι παράλληλη στην ε,

γ) Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο ΕΜ,

δ) Να δείξετε ότι τα μοναδικά σημεία της C που έχουν ακέραιες συντεταγμένες είναι τα $(1,0)$ και $(-1,0)$.

76. Δίνεται η υπερβολή C με εστίες $E'(-2\sqrt{5},0)$, $E(2\sqrt{5},0)$ και κορυφές Α΄(-2,0) και Α(2,0).

α) Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής C

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της υπερβολής C

γ) Έστω ότι το σημείο $M(\lambda, -2\lambda+8)$ ανήκει στην υπερβολή C . Να βρείτε :

i) τον αριθμό λ

ii) το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν οι ασύμπτωτες της C και η εφαπτομένη της C στο M

77. Δίνεται η υπερβολή $C_1 : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ και η εξίσωση $x^2 + y^2 + 2y - 1 = 0$ (1)

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο ,του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα

β) Έστω C_2 ο κύκλος που παριστάνει η εξίσωση (1) .Να βρείτε

i) τις εφαπτομένες της υπερβολής C_1 που διέρχονται από το κέντρο του κύκλου C_2

ii) τις κοινές εφαπτομένες των κωνικών τομών C_1 και C_2.

Διαθεματική Επανάληψη στα Μαθηματικά προσανατολισμού της Β΄ Λυκείου

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4 - x$.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής Α, Β της C_f με τους άξονες x΄x και y΄y αντίστοιχα.

β) Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου C_1 του τριγώνου ΟΑΒ.

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τμήματος του κυκλικού δίσκου C_1 που βρίσκεται στο 4ο τεταρτημόριο.

δ) Να βρείτε το σημείο της C_f που έχει ελάχιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων.

ε) Έστω Μ(x, y), $0 \le x \le 4$ τυχαίο σημείο της C_f και Γ, Δ οι προβολές του στους άξονες x΄x και y΄y. Να βρείτε το Μ για το οποίο το ορθογώνιο ΟΓΜΔ έχει μέγιστο εμβαδό.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, $f_1(x) = 1 + \sqrt{25 - x^2}$ και

$f_2(x) = \sqrt{25 - (x-1)^2}$ στο ίδιο σύστημα αξόνων.

γ) Να βρείτε την εφαπτομένη ε της C_f στο σημείο Μ(3,4).

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, τους άξονες και την ευθεία ε.

ε) Αν Κ, Λ δύο οποιαδήποτε σημεία της C_f, να αποδείξετε ότι $(ΚΛ) \le 10$.

στ) Κάνοντας κατάλληλο σχήμα να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $e^{2x} + x^2 = 25$.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2$.

α) Να βρείτε τις εφαπτομένες της C_f που διέρχονται από το σημείο Α(0, -1).

β) Κάνοντας κατάλληλο σχήμα να λύσετε την εξίσωση $ημx = x^2$.

γ) Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση της C_f από την ευθεία ε: $2x + y + 6 = 0$. Στη συνέχεια να βρείτε τα σημεία των ε, C_f που έχουν αυτή την απόσταση.

δ) Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζει η C_f με την ευθεία y = 1, να αποδείξετε ότι Ε < 2.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$.

α) Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, $f_1(x)=\sqrt{x}-1$ και $f_2(x)=\sqrt{x+1}$ στο ίδιο σύστημα αξόνων.

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α(α,f(α)), α > 0 και Β(-α,0) εφάπτεται της C_f στο Α.

γ) Κάνοντας κατάλληλο σχήμα να λύσετε την εξίσωση $x\sqrt{x}-1=0$ και στη συνέχεια να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το αποτέλεσμα.

δ) Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση της C_f από την ευθεία ε: $x-2y+6=0$ καθώς και τα σημεία των ε, C_f που δίνουν αυτή την απόσταση..

5. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ και $g(x)=\sqrt{3}x$.

α) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τον άξονα x΄x.

β) Να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g τέμνονται σε σημείο Κ.

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, την C_g και τον άξονα x΄x.

δ) Έστω Λ το συμμετρικό του Κ ως προς τον άξονα y΄y. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που
περικλείεται από την C_f και την ΚΛ.

ε) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο Κ με τους άξονες.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{16-x^2}$, $x\in[0,4]$.

α) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τις ευθείες x = 4 και y = 4.

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f που σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

γ) Αν $g(x)=\sqrt{4x-x^2}$, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g και τον άξονα y΄y.

7. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2+1$ και $g(x)=\frac{1}{x}$.

α) Να κάνετε την γραφική τους παράσταση στο ίδιο σύστημα αξόνων και στη συνέχεια να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^3+x-1=0$. Στη συνέχεια να βρείτε διαστήματα πλάτους το πολύ 1 που να περιέχουν τις ρίζες.

β) Να κάνετε την γραφική τους παράσταση στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g_1(x)=\frac{x+1}{x}$, $g_2(x)=\frac{x+2}{x+1}$.

γ) Έστω Α, Β δύο σημεία της C_f με την ίδια τεταγμένη και Κ το σημείο τομής της C_f με τον άξονα y΄y.Να βρείτε τα σημεία Α, Β ώστε το τρίγωνο ΚΑΒ να είναι ορθογώνιο στο Κ.

δ) Έστω $M(x_1,g(x_1))$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=-\frac{1}{x_1^2}x+\frac{2}{x_1}$ εφάπτεται στην γραφική παράσταση της g.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x-4$.

α) Να βρείτε σημείο της γραφικής παράστασης της f του οποίου το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεών του από τους άξονες είναι ελάχιστο.

β) Κάνοντας κατάλληλο σχήμα να βρείτε το πλήθος των ριζών των παρακάτω εξισώσεων.

1) $e^x(x-4)=1$ 2) $συνx+4=x$

γ) Έστω συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(x)\le g(x)\le f(x+8)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $g(0)=4$. Αν Α σημείο της C_g και Β το συμμετρικό του ως προς την ευθεία δ: y = x, να βρείτε την μέγιστη απόσταση των Α και Β.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{4}{5}\sqrt{25-x^2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να κάνετε την γραφική της παράσταση.

β) Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τον άξονα x΄x, να δείξετε
ότι Ε < 40.

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει ως διάμετρο το τμήμα που έχει άκρα τα σημεία τομής
της C_f με τον άξονα x΄x.

10.Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{3}{x}$ και $g(x)=\lambda x+3-\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της g περνά από σταθερό σημείο για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, g έχουν κοινά σημεία για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

γ) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ για τον οποίο οι γραφικές παραστάσεις των f, g εφάπτονται.

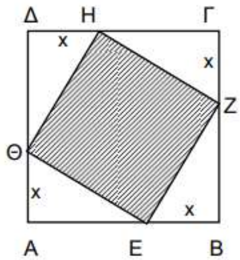
11.Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με μεγάλη βάση ΒΓ , ΑΒ=ΓΔ = x cm, $AB\Gamma=60°$ και περίμετρο 20cm.

α) Να εκφράσετε το μήκος των βάσεων ΑΔ, ΒΓ ως συνάρτηση του x.

β) Να εκφράσετε το εμβαδόν του τραπεζίου ως συνάρτηση του x.

γ) Να βρείτε τις διαστάσεις του τραπεζίου που έχει μέγιστο εμβαδόν.

12.(2017)Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος με πλευρά 2cm. Αν το τετράγωνο ΕΖΗΘ έχει τις κορυφές του στις πλευρές του ΑΒΓΔ :



α) Να εκφράσετε την πλευρά ΕΖ συναρτήσει του x.

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου Ε Ζ ΗΘ δίνεται από τη συνάρτηση $f(x)=2x^2-4x+4,\ 0\le x\le 2$.

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ γίνεται ελάχιστο και για ποιες μέγιστο .

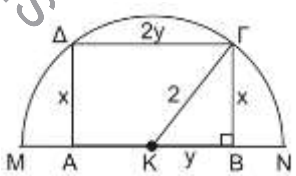
13.(2018)Έχουμε ένα σύρμα μήκους 8m , το οποίο κόβουμε σε δύο τμήματα. Με το ένα από αυτά, μήκους x m, κατασκευάζουμε τετράγωνο και με το άλλο κύκλο.

α) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων σε τετραγωνικά μέτρα, συναρτήσει του x, είναι $E(x)=\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi}$, $x\in(0,8)$.

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ελαχιστοποιείται, όταν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με την διάμετρο του κύκλου.

14.(2020 απόφοιτοι επαναληπτικές)

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ημικύκλιο με κέντρο Κ και διάμετρο ΜΝ = 4 cm. Ορθογώνιο ΑΒΓΔ με διαστάσεις x cm και 2y cm είναι εγγεγραμμένο στο ημικύκλιο.

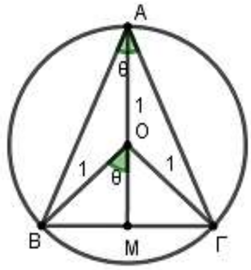


α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, ως συνάρτηση του x , είναι $E(x)=2\sqrt{4x^2-x^4}$, $x\in(0,2)$.

β) Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, ώστε το εμβαδόν του να γίνεται μέγιστο.

γ) Να βρείτε τις τιμές του x ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ να είναι ίσο με $2\sqrt{3}\,cm^2$.

15.(2020 απόφοιτοι κανονικές)
Ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα 1, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν θ είναι η γωνία μεταξύ των ίσων πλευρών του τριγώνου και $\hat{BOM} = \theta$ με $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, τότε να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ ως συνάρτηση της γωνίας θ είναι:

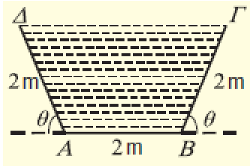


$$E(\theta) = (1 + \sigma\upsilon\nu\theta)\eta\mu\theta,\ \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

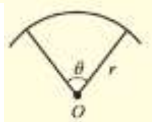
16.Με συρματόπλεγμα μήκους 80 m θέλουμε να περιφράξουμε οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου. Να βρείτε τις διαστάσεις του οικοπέδου που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.

17.Με ένα σύρμα μήκους 4 m κατασκευάζουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς x m και ένα τετράγωνο πλευράς y m.
α) Να βρείτε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων συναρτήσει της πλευράς x του ισοπλεύρου τριγώνου.
β) Για ποια τιμή του x το εμβαδόν γίνεται ελάχιστο.

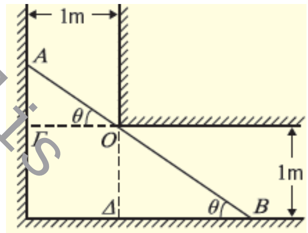
18.Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα κανάλι του οποίου η κάθετη διατομή ΑΒΓΔ φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της διατομής ΑΒΓΔ είναι ίσο με
Ε = 4ημθ(1 + συνθ)



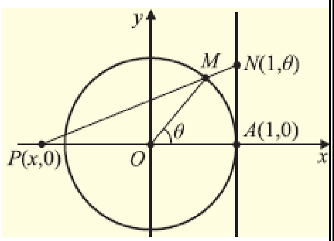
19.Ένα σύρμα μήκους 20 m διατίθεται για την περίφραξη ενός ανθόκηπου σχήματος κυκλικού τομέα. Να βρείτε την ακτίνα r του κύκλου, αν επιθυμούμε να έχουμε τη μεγαλύτερη δυνατή επιφάνεια του κήπου.



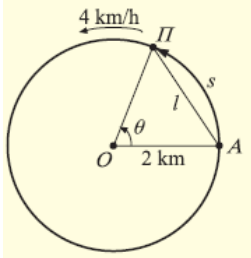
20.Δύο διάδρομοι πλάτους 1m τέμνονται κάθετα (Σχήμα). Να βρείτε το μεγαλύτερο δυνατό μήκος μιας σκάλας που μπορεί, αν μεταφερθεί οριζόντια, να στρίψει στη γωνία.



21.Στο διπλανό σχήμα ο κύκλος έχει ακτίνα 1 cm και η ε εφάπτεται σε αυτόν στο σημείο Α. Το τόξο ΑΜ είναι θ rad και το ευθ. τμήμα ΑΝ είναι θ cm.
Η ευθεία ΜΝ τέμνει τον άξονα x′x στο σημείο P(x, 0).
Να δείξετε ότι: $x = \dfrac{\theta\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta}{\theta - \eta\mu\theta}$



22. Ένας πεζοπόρος Π ξεκινάει από ένα σημείο Α και βαδίζει γύρω από μια κυκλική λίμνη ακτίνας ρ = 2 km με ταχύτητα υ = 4 km/h. Αν S είναι το μήκος του τόξου ΑΠ και ℓ το μήκος της απόστασης ΑΠ του πεζοπόρου από το σημείο εκκίνησης τη χρονική στιγμή t:



Να αποδείξετε ότι:

i. $\theta = \frac{S}{2}$ και $\ell = 4\eta\mu\frac{\theta}{2}$ ii. $S = 4t$, $\theta = 2t$ και $\ell = 4\eta\mu t$


14ο ΓΕΛ ΠΕΡΙΣΤΕΡΙΟΥ