39η Άσκηση

Δίνεται συνάρτηση $f:\ \mathbb{R}\to[0,+\infty)$, δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln f(x)-f(x)+1}{x^2}=0$, $f''(x)<f'(x)$ για κάθε $x<0$ και, $f''(x)>f'(x)$ για κάθε $x>0$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(0)=1$.

β) Να αποδείξετε ότι η f έχει κρίσιμο σημείο το x = 0.

γ) Να αποδείξετε ότι $f'(x)\geq f(x)-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

δ) Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq 1$ για κάθε $x\geq 0$.

ε) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή στο $[0,+\infty)$.

στ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f\left(x^2\right)=\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$.

ζ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{f(x)-2}{x}-\dfrac{f'(x-1)+1}{x-1}=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$.

Στέλιος Μιχαήλογλου

Λύση

α) Έστω $\dfrac{\ln f(x)-f(x)+1}{x^2}=\varphi(x),\ x\neq 0$ με $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=0$. Τότε $\ln f(x)-f(x)+1=x^2\varphi(x)$ και

$\lim\limits_{x\to 0}\left[\ln f(x)-f(x)+1\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left[x^2\varphi(x)\right]\Leftrightarrow \ln f(0)-f(0)+1=0\Leftrightarrow \ln f(0)=f(0)-1$ (1).

Γνωρίζουμε ότι για κάθε x > 0 είναι $\ln x\le x-1$ και η ισότητα ισχύει μόνο για x = 1, άρα για $x=f(0)$ προκύπτει ότι $\ln f(0)\le f(0)-1$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $f(0)=1$.

β) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη, η συνάρτηση $y(x)=\ln f(x)-f(x)+1$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση και πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων και επειδή και η x^2 είναι παραγωγίσιμη, έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln f(x)-f(x)+1}{x^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f'(x)}{f(x)}-f'(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f'(x)-f'(x)f(x)}{f(x)}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-f'(x)\left(f(x)-1\right)}{2xf(x)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\left[-\frac{f'(x)}{2f(x)}\cdot\frac{f(x)-f(0)}{x}\right]=-\frac{f'(0)}{2f(0)}\cdot f'(0)=-\frac{\left(f'(0)\right)^2}{2}.$$ Άρα $-\dfrac{\left(f'(0)\right)^2}{2}=0\Leftrightarrow f'(0)=0$, οπότε η f έχει κρίσιμο σημείο το x = 0.

γ) Έστω $g(x)=f'(x)-f(x)+1,\ x\in\mathbb{R}$. Είναι $g'(x)=f''(x)-f'(x)$.

Για κάθε $x<0$ είναι $f''(x)<f'(x)\Rightarrow g'(x)<0\Rightarrow g\searrow(-\infty,0]$ και για κάθε x > 0 είναι $f''(x)>f'(x)\Rightarrow g'(x)>0\Rightarrow g\nearrow[0,+\infty)$. Η g έχει ελάχιστο το $g(0)=f'(0)-f(0)+1=0$, οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $g(x)\ge g(0)\Leftrightarrow f'(x)-f(x)+1\ge 0\Leftrightarrow f'(x)\ge f(x)-1$.

δ) $f'(x)\ge f(x)-1\Leftrightarrow f'(x)-f(x)+1\ge 0\Leftrightarrow e^{-x}f'(x)-e^{-x}f(x)+e^{-x}\ge 0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=e^{-x}f(x)-e^{-x},\ x\in\mathbb{R}$.

Είναι $h'(x)=f'(x)e^{-x}-e^{-x}f(x)+e^{-x}>0$ για κάθε $x\neq 0$ και επειδή η h είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Για κάθε $x\ge 0\Leftrightarrow h(x)\ge h(0)=0\Leftrightarrow e^{-x}f(x)-e^{-x}\ge 0\Leftrightarrow e^{-x}f(x)\ge e^{-x}\Leftrightarrow f(x)\ge 1$

ε) Για κάθε x> 0 είναι $f'(x)\ge f(x)-1>0\Rightarrow f\nearrow[0,+\infty)$ και $f''(x)>f'(x)>0\Rightarrow f\cup[0,+\infty)$.

στ) Έστω $x^2=\omega,\ \omega\ge 0$, τότε αρκεί να βρούμε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(\omega)=\alpha,\ \omega\ge 0$.

Η εφαπτομένη της C_f στο x = 1 έχει εξίσωση $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y=f'(1)x-f'(1)+f(1)$

Επειδή η f είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$ βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό εκτός του σημείου επαφής τους, άρα $f(x)\ge f'(1)x-f'(1)+f(1)$ (2) για κάθε $x\ge 0$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)\ge f(x)-1$ και η ισότητα ισχύει μόνο για x = 0, οπότε $f'(1)>f(1)-1>0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f'(1)x-f'(1)+f(1)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}f'(1)x=+\infty$, οπότε λόγω της (2) είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta=[0,+\infty)$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta)=\left[f(0),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=[1,+\infty)$.

Αν $\alpha<1$ τότε το α δεν βρίσκεται στο σύνολο τιμών της f, οπότε η εξίσωση $f(\omega)=\alpha$ είναι αδύνατη.

Αν α > 1 τότε $\alpha\in f(\Delta)$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, υπάρχει μοναδικό $\omega_1\ge 0$ τέτοιο, ώστε $f(\omega_1)=\alpha$.

Όμως $x^2=\omega_1\Leftrightarrow x=\omega_1$ ή $x=-\omega_1$. Άρα η εξίσωση $f(x^2)=\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$ έχει δύο λύσεις.

ζ) Για $x \neq 0, 1$ είναι $\frac{f(x)-2}{x} - \frac{f'(x-1)+1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow (x-1)(f(x)-2) - x(f'(x-1)+1) = 0$

Έστω $a(x) = (x-1)(f(x)-2) - x(f'(x-1)+1)$, $x \in [0,1]$.

Η a είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $a(0) = -(f(0)-2) = 1 > 0$, $a(1) = -(f'(0)+1) = -1 < 0$, δηλαδή $a(0)a(1) < 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $a(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(f(x)-2) - x(f'(x-1)+1) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.