24η Άσκηση

Έως εύρεση συνάρτησης

Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο $\left[0,+\infty\right)$ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\left(0,+\infty\right)$ για την οποία ισχύει ότι $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(x+2h\right)+2f\left(x-h\right)-3f\left(x\right)}{h^2}=-\dfrac{3}{4x\sqrt{x}}$, $f\left(1\right)=1$ και $f\left(4\right)=2$.

α) Να δείξετε ότι $f\left(x\right)=\sqrt{x}$.

β) Να δείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A\left(\xi,f\left(\xi\right)\right)$ και $B\left(-\xi,0\right)$ εφάπτεται της C_f στο A.

γ) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

δ) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f^{-1} που άγεται από το σημείο $\Gamma\left(0,-1\right)$.

ε) Ένα κινητό Μ κινείται επί της C_f και αυξάνει διαρκώς την απόστασή του από την αρχή των αξόνων. Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του;

στ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}\left(x\right)+f^2\left(x\right)=\eta\mu x+1$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $\left(0,\pi\right)$.

ζ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha,\beta\in\left(0,+\infty\right)$ με $\alpha<\beta$, ισχύει: $\dfrac{\beta-\alpha}{2\sqrt{\beta}}<\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}<\dfrac{\beta-\alpha}{2\sqrt{\alpha}}$

η) Να δείξετε ότι για $x>1$ υπάρχει $\xi_1\in\left(\sqrt{x},x\right)$ τέτοιο, ώστε $\xi_1+\ln\left(x-f\left(x\right)\right)=\ln\left(e^x-e^{f(x)}\right)$. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^x-e^{\sqrt{x}}\right)-\ln\left(x-\sqrt{x}\right)\right]=+\infty$.

Στέλιος Μιχαήλογλου

Λύση

α) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+2h)+2f(x-h)-3f(x)}{h^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cancel{2}f'(x+2h)-\cancel{2}f'(x-h)}{\cancel{2}h}=$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x+2h)-f'(x)-f'(x-h)+f'(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f'(x+2h)-f'(x)}{h}-\dfrac{f'(x-h)-f'(x)}{h}\right)=$

$2f''(x)+f''(x)=3f''(x)$ γιατί

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x+kh)-f'(x)}{h}\overset{kh=u\Leftrightarrow h=\frac{u}{k}}{\underset{\substack{h\to 0\Rightarrow\\ u\to 0}}{=}}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f'(x+u)-f'(x)}{\frac{u}{k}}=\lim\limits_{u\to 0}k\dfrac{f'(x+u)-f'(x)}{u}=kf''(x),\ k\neq 0$

Άρα $3f''(x)=-\dfrac{3}{4x\sqrt{x}}\Leftrightarrow f''(x)=-\dfrac{1}{4x\cdot x^{\frac{1}{2}}}=-\dfrac{1}{4x^{\frac{3}{2}}}=-\dfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}\Leftrightarrow\ (f'(x))'=\left(-\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right)'\Leftrightarrow$

$f'(x)=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+c=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+c,\ c\in\mathbb{R}\Leftrightarrow f'(x)=\left(\sqrt{x}+cx\right)'\Leftrightarrow\ f(x)=\sqrt{x}+cx+c_1,\ c_1\in\mathbb{R}.$

$f(1)=1\Leftrightarrow c+c_1=0\Leftrightarrow c_1=-c\ (1)$, $f(4)=2\Leftrightarrow 2+2c+c_1=2\overset{(1)}{\Leftrightarrow}c=0$ και $c_1=0$ οπότε $f(x)=\sqrt{x}$.

β) Η ευθεία ΑΒ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{AB}=\dfrac{\sqrt{\xi}-0}{\xi+\xi}=\dfrac{\sqrt{\xi}}{2\xi}=\dfrac{\cancel{\sqrt{\xi}}}{2\left(\sqrt{\xi}\right)^{\cancel{2}}}=\dfrac{1}{2\sqrt{\xi}}=f'(\xi)$, οπότε

εφάπτεται της C_f στο Α.

γ) Έστω $0\le x_1<x_2$ τότε $f(x_1)<f(x_2)\Rightarrow f\nearrow[0,+\infty)\Rightarrow f$ 1−1 και αντιστρέφεται.

$f(x)=y\Leftrightarrow\sqrt{x}=y,\ y\ge 0\Leftrightarrow x=y^2$, άρα $f^{-1}(y)=y^2,\ y\ge 0$ και $f^{-1}(x)=x^2,\ x\ge 0$.

δ) Έστω $B\left(x_1,x_1^2\right),\ x_1>0$ σημείο της $C_{f^{-1}}$. Η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $\left(f^{-1}\right)'(x)=2x$.

Η εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο Β είναι η ευθεία ε: $y-x_1^2=2x_1(x-x_1)\Leftrightarrow y=2x_1x-x_1^2$.

Για να διέρχεται η ε από το Γ πρέπει $-1=0-x_1^2\overset{x_1>0}{\Leftrightarrow}x_1=1$, άρα ε: $y=2x-1$

ε) Έστω $M\left(x(t),y(t)\right)$ με $y(t)=\sqrt{x(t)}$. Επειδή το Μ αυξάνει διαρκώς την απόστασή του από την αρχή των αξόνων έχει $x'(t)>0$. Είναι $y'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{x(t)}}x'(t)$ και τη χρονική στιγμή t_0 που ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του, είναι

$y'(t_0)=\dfrac{1}{2\sqrt{x(t_0)}}x'(t_0)\Leftrightarrow\cancel{x'(t_0)}=\dfrac{1}{2\sqrt{x(t_0)}}\cancel{x'(t_0)}\Leftrightarrow\sqrt{x(t_0)}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x_0=\dfrac{1}{4}$, άρα $M\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right)$.

στ) $f^{-1}(x)+f^2(x)=\eta\mu x+1\Leftrightarrow x^2+x-\eta\mu x-1=0$

Έστω $g(x)=x^2+x-\eta\mu x-1,\ x\in[0,\pi]$. Είναι $g(0)=-1<0,\ g(\pi)=\pi^2+\pi-1>0$ δηλαδή $g(0)g(\pi)<0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, λόγω του Θ.Bolzano, υπάρχει $\rho\in(0,\pi)$: $g(\rho)=0$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η g είναι γνησίως αύξουσα, άρα το ρ είναι μοναδικό.

ζ) Από το ΘΜΤ για την $f(x)=\sqrt{x}$ υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$: $f'(\xi)=\dfrac{1}{2\sqrt{\xi}}=\dfrac{\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}}{\beta-\alpha}$

$$\alpha<\xi<\beta\Leftrightarrow 2\sqrt{\alpha}<2\sqrt{\xi}<2\sqrt{\beta}\Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}>\frac{1}{2\sqrt{\xi}}>\frac{1}{2\sqrt{\beta}}\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\beta}}<\frac{\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}}{\beta-\alpha}<\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\Leftrightarrow \frac{\beta-\alpha}{2\sqrt{\beta}}<\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}<\frac{\beta-\alpha}{2\sqrt{\alpha}}$$

η) $\xi_1+\ln\left(x-\sqrt{x}\right)=\ln\left(e^x-e^{\sqrt{x}}\right)\Leftrightarrow \xi_1=\ln\left(e^x-e^{\sqrt{x}}\right)-\ln\left(x-\sqrt{x}\right)\Leftrightarrow \xi_1=\ln\dfrac{e^x-e^{\sqrt{x}}}{x-\sqrt{x}}$.

Έστω $h(t)=e^t$, $t\in\left[\sqrt{x},x\right]$, $x>1$. Λόγω του Θ.Μ.Τ. για την h υπάρχει $\xi_1\in\left(\sqrt{x},x\right)$ τέτοιο, ώστε

$$h'(\xi_1)=\frac{h(x)-h\left(\sqrt{x}\right)}{x-\sqrt{x}}\Leftrightarrow e^{\xi_1}=\frac{e^x-e^{\sqrt{x}}}{x-\sqrt{x}}\Leftrightarrow \xi_1=\ln\frac{e^x-e^{\sqrt{x}}}{x-\sqrt{x}}$$

Είναι $\sqrt{x}<\xi_1<x\Leftrightarrow \sqrt{x}<\ln\dfrac{e^x-e^{\sqrt{x}}}{x-\sqrt{x}}<x\Leftrightarrow \sqrt{x}<\ln\left(e^x-e^{\sqrt{x}}\right)-\ln\left(x-\sqrt{x}\right)<x$ και επειδή

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^x-e^{\sqrt{x}}\right)-\ln\left(x-\sqrt{x}\right)\right]=+\infty$.