

## ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΟΡΙΑ

1. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$     β)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2-3x+4|-2}{x-1}$     γ)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-1|-|x-3|}{x^2-4}$     δ)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{2}{x})$

ε)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-4x}{3(x-1)^2}$     στ)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x+1}{x^2-7x+10}$     ζ)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x-1}{x-\eta\mu x}$     η)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon\phi x}{x^3}$

θ)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$     ι)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x+5}+\sqrt{9x^2+1}-4x+3)$

κ)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x^3-2x+3|+x-1}{x^4+2x+2}$     λ)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\eta\mu x}{x^2+1}$     μ)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-2x\eta\mu x}{3x+\sigma\upsilon\nu x}$     ν)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu \frac{1}{x}}{x^2}$

ξ)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x\eta\mu^3 \frac{1}{x}$     ο)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x+3 \cdot 2^x}{e^x-2^x}$     π)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^{x+1}+5e^x}{2 \cdot 3^x - e^x}$     ρ)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(e^{x-1}-1)-x]$

2. Αν για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $\eta\mu x \leq f(x) \leq x+x^2$ , να βρείτε τα όρια :

i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$     ii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+1-\sigma\upsilon\nu x}{x+\eta\mu x}$

3. Να βρείτε τα όρια i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x\sigma\upsilon\nu x} \right)$     ii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2}{\eta\mu^2 x} - \frac{1}{1-\sigma\upsilon\nu x} \right)$

4. Αν  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|f(x)+e^x+1|}{x-2} = 5$  τότε να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .

5. Εστω μία συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  να ισχύει:  $2x-x^2 \leq f(x) \leq 2x+x^2$ .

Να υπολογίσετε τα όρια: i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$     ii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x)+x-\eta\mu x}{f(x)+x+2\eta\mu x}$

6. Αν για τη συνάρτηση  $f$  ισχύει  $f^2(x) \leq 2xf(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , να δείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ .

7. Εστω δύο συναρτήσεις  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  να ισχύει:

$f^2(x)+g^2(x)=x^2\eta\mu^2 x$ . Να υπολογίσετε τα  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ .

8. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\alpha x^2 + (\beta-1)x + 4}{x^2 - 4x + 4}$ . Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  για τις οποίες υπάρχει στο  $\mathbb{R}$  το όριο  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

9. Δίνεται ότι  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha \in \mathbb{R}$ , να δείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ .

10. Εστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει ότι:  $(x-2)f(x) \geq e^{2-x}$  για κάθε  $x < 2$ .

i) Να αποδείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$

ii) Να υπολογίσετε τα όρια: α)  $\lim_{x \rightarrow 2} (-5f^3(x) + 7f^2(x) - 3)$     β)  $\lim_{x \rightarrow 2} [e^{f(x)} \eta\mu f(x)]$

11. Αν  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x + 2) = 0$  να υπολογίσετε τα όρια :

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x) \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \text{iii) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{iv) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) + x^2 + 1}{xf(x) - 3x^2 + 2}$$

12. Αν  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 2$ , να βρείτε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 f(x) + 2x^3 - 5}{2x^3 f(x) - 2x^4 + 5x^3 - 6}$

13. Να βρείτε πολυώνυμο  $P(x)$  για το οποίο να ισχύει ότι:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{P(x)}{x^2 - 1} = 1$  και  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{P(x)}{x^2 - 1} = 3$

14. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = (\sqrt{x+1} - \lambda) \eta \mu \frac{1}{x}$ .

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

ii) Να υπολογίσετε τα όρια:  $\alpha) \lim_{x \rightarrow 0} \left( x \eta \mu \frac{1}{x} \right) \quad \beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x \eta \mu \frac{1}{x} \right)$

γ) Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} \cdot f(x))$

15. Εστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:  $xf(x) - 5x^3 = 2\eta \mu x - x^2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Αν η  $C_f$  διέρχεται από το σημείο  $M(0, 2)$ , να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$ .

16. Να βρείτε το τύπο της συνεχούς συνάρτησης  $f(x)$  στο σύνολο  $\mathbb{R}$  για την οποία ισχύει ότι:

$$(x-1)f(x) + 2 = \sqrt{x^2 + 3} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

17. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για τις οποίες ισχύει  $f^2(x) + g^2(x) = x^2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να δείξετε ότι οι  $f, g$  είναι συνεχείς στο  $x_0 = 0$ .

18. Δίνεται συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , συνεχής στο  $x_0 = 1$  με  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+1)}{x} = 4$ . Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}.$$

19. Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f$  ορισμένη στο  $\mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $|f(x) - f(y)| \leq 3|x - y|$ . Να δείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ .

20. Αν για την συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ισχύει  $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$  για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$  και ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_1 = 0$ , να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής σε όλο το  $\mathbb{R}$ .

21. Αν για την συνάρτηση  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  ισχύει  $f(xy) = xf(y) + yf(x)$  για κάθε  $x, y \in (0, +\infty)$  και ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_1 = 1$ , να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $(0, +\infty)$ .

22. Δίνεται συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:  $f^3(x) + 2f(x) = x^2$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι:

i)  $f(x) = \frac{x^2}{f^2(x) + 2}$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

ii)  $|f(x)| \leq \frac{x^2}{2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

iii) Η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$ .