

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ

ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ

1. Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ϵ , αν αυτή έχει εξίσωση:

i) $y = 2x - 1$ ii) $y = 3 - 5x$

iii) $y = \frac{5x-6}{10}$ iv) $x = 2y + 3$

v) $18x - 6y + 5 = 0$ vi) $x = 2$ vii) $y = 2$

2. Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης, αν υπάρχει, της ευθείας:

i) που διέρχεται από τα σημεία $A(2,-3)$ και $B(-1,6)$.

ii) που διέρχεται από τα σημεία $\Gamma(0,-2)$ και $\Delta(0,3)$.

iii) που είναι κάθετη στη $\Gamma\Delta$.

3. Να βρεθεί η γωνία ω που σχηματίζει με τον άξονα $\chi'\chi$ η ευθεία:

i) που διέρχεται από τα σημεία $A(4,-2)$ και $B(3,-3)$.

ii) που διέρχεται από τα σημεία $\Gamma(3,-1)$ και $\Delta(-2,-1)$.

iii) που διέρχεται από τα σημεία $E(4,-2)$ και $Z(4,1)$.

4. Να βρείτε την γωνία ω που σχηματίζουν με τον άξονα $\chi'\chi$ οι ευθείες που ορίζονται από τα σημεία : i) $(-8, -4), (5, 9)$, ii) $(5, -7), (5, -2)$, iii) $(3, 7), (5, 7)$.

5. Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ η ευθεία, η οποία έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με:

i) 1 ii) -1 iii) $\sqrt{3}$ iv) 0 v) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

6. Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει με άξονα $x'x$ η ευθεία με εξίσωση:

i) $y = x - \frac{1}{2}$ ii) $y = x\sqrt{3} + 1$

iii) $y = 1 - x$ iv) $y = 1$

v) $y = \sqrt{3}$ vi) $x = 0$ vii) $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

7. Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ η ευθεία, η οποία διέρχεται από τα σημεία A και B , όταν:

i) $A(2, 5), B(4, 7)$ ii) $A(3, \sqrt{3}), B(4, 0)$

iii) $A(2, 5), B(1, 5)$ iv) $A(1, 4), B(1, 6)$

8. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες : η ευθεία $\varepsilon : y = (\alpha^2 - 10)x + 4$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 135° .
9. Να βρεθεί ο $\alpha \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η ευθεία:
- i) $\varepsilon: y = (\alpha^2 - \alpha - 2)x + 2$ να σχηματίζει 45° γωνία με τον άξονα $x'x$
- ii) $\varepsilon: y = (\alpha^2 - \alpha - \sqrt{3})x + 1$ να σχηματίζει 30° γωνία με τον άξονα $y'y$ και κανένα σημείο της να μη βρίσκεται στο 1 ο τεταρτημόριο.

ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΚΑΘΕΤΟΤΗΤΑΣ-ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑΣ

10. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(-2,3), B(-6,1)$ και $\Gamma(-10,-1)$ είναι συνευθειακά.
11. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B και Γ είναι συνευθειακά, όταν:
- i) $A(2,5), B(1,2), \Gamma(0,-1)$
- ii) $A\left(\frac{1}{3}, -1\right), B\left(-1, \frac{t+1}{2}\right), \Gamma\left(t+1, -t - \frac{5}{2}\right)$
12. Στο επίπεδο θεωρούμε τα σημεία A (κσυνφ, λημφ), B (κημφ, -λσυνφ) και Γ (κ, λ), όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ και $0 < \varphi < \pi$. Για ποιες τιμές του φ τα A, B, Γ είναι συνευθειακά ;
13. Να αποδειχτεί ότι τα παρακάτω σημεία είναι συνευθειακά
- i) $A(1,4), B(-2,-5), \Gamma(-1, -2)$.
- ii) $A(\alpha\sigma\upsilon\nu\theta, \alpha\eta\mu\theta), B(-\alpha\eta\mu\theta, \alpha\sigma\upsilon\nu\theta), \Gamma\left(\frac{\alpha}{\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta}, 0\right)$ με $\alpha \neq 0, \theta \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{4}$.
- Σε κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις, να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνά από τα σημεία αυτά.
14. Να βρεθεί ο $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε τα σημεία A ($\eta\mu\alpha, \sigma\upsilon\nu\alpha$), $B(-\sigma\upsilon\nu\alpha, \eta\mu\alpha)$, $\Gamma(1,1)$ είναι συνευθειακά.
15. Να αποδειχθεί ότι τα σημεία $A(1, -1), B(-2, 8), \Gamma(3, -7)$ βρίσκονται στην ίδια ευθεία, της οποίας να βρεθεί η εξίσωση.
16. Να βρεθεί η τιμή του α για την οποία η ευθεία $\varepsilon : y = 3x - \alpha$ διέρχεται από το σημείο $A(2,10)$.
17. Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, αν είναι γνωστό ότι η ευθεία $\varepsilon: y = \alpha x + \beta$ διέρχεται από τα σημεία $A(1, -3)$ και $B(3,1)$.

ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ

18. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνά από το $A(-1,3)$ και είναι :

i) παράλληλη στην ευθεία $\delta: y = -x + 1$

ii) κάθετη στην ευθεία $\delta: y = \frac{1}{2}x + 2$

iii) κάθετη στην ευθεία $\delta: x = 5$

iv) παράλληλη στην ευθεία $\delta: y = -2$.

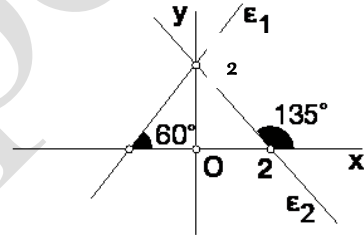
19. Δίνονται τα σημεία $A(1, 4)$ και $B(-1, -5)$.

α) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του μέσου M του ευθυγράμμου τμήματος AB .

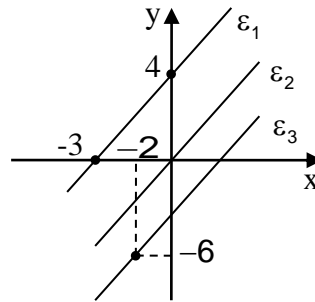
β) Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας AB .

γ) Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοκαθέτου ευθείας του ευθύγραμμου τμήματος AB .

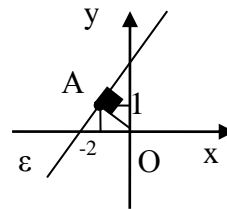
20. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών ϵ_1 και ϵ_2 του διπλανού σχήματος.



21. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών $\epsilon_1 \parallel \epsilon_2 \parallel \epsilon_3$



22. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ϵ του διπλανού σχήματος.



23. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο $A(-2, 3)$ και είναι παράλληλες προς το διάνυσμα:

i) $\vec{\delta} = (4, -5)$,

ii) $\vec{B\Gamma}$ με άκρα $B(-3, 4)$ και $\Gamma(-1, 5)$.

24. Να βρείτε την εξίσωση ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(3,-2)$ και :
- α) είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\delta}(2, -5)$
 - β) είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\delta}(0, -3)$
 - γ) είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\delta}(-2, 0)$
 - δ) είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\delta}(2, 1)$
 - ε) είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\delta}(0, -4)$
 - στ) σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\hat{\omega} = 135^\circ$
25. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας, η οποία διέρχεται από το σημείο $A(-2, 5)$ και:
- i) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -4$,
 - ii) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 0$,
 - iii) σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = 60^\circ$,
 - iv) είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (2, 20)$,
 - v) είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\eta} = (6, 3)$,
 - vi) είναι παράλληλη στην ευθεία $\zeta : 4x + 12y - 5 = 0$,
 - vii) είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon : 4x + 12y - 5 = 0$.
26. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας, η οποία διέρχεται από το σημείο $A(1, 5)$ και είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση:
- i) $y = 3x - 1$
 - ii) $x = 4$
 - iii) $y = 3$
27. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας, η οποία διέρχεται από το σημείο $A(3, 2)$ και είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση:
- i) $y = \frac{1}{4}x - 3$
 - ii) $x = 4$
 - iii) $y = 10$
28. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας, η οποία: διέρχεται από τα σημεία A και B , όταν :
- i) $A(1,2), B(5,-6)$
 - ii) $A(2,5), B(-1,5)$
 - iii) $A(3,4), B(3,1)$
29. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας, η οποία διέρχεται από το σημείο $A(1, -2)$ και σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία ω ίση με:
- i) 30°
 - ii) 120°
 - iii) 0°
 - iv) 90°
30. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνά από το $A(2,-1)$ και είναι :
- i) παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (1,0)$.
 - ii) κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (1,0)$.

iii) παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (0,1)$

iv) κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (0,1)$.

31. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από τις κορυφές A (2, -1), B (4, -5) και Γ (-3, 4) τριγώνου ABΓ και είναι παράλληλες προς τις απέναντι πλευρές.
32. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο A (-2, 0) και είναι παράλληλη στην διχοτόμο της γωνίας $x'Oy$.
33. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση: $y=3x-1$.
34. Να βρεθεί η εξίσωση ευθείας που περνά από το σημείο A(2,-3) και ορίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.
35. Να βρείτε την ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη στην ευθεία που ορίζεται από τα σημεία, A(-1, 2) και B(3, -2).
36. Να βρεθεί η εξίσωση ευθείας που περνά από το σημείο A(-1,4) και ορίζει με τους θετικούς ημιάξονες τρίγωνο εμβαδού 1.
37. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας ϵ που είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -x$, τέμνει τους άξονες στα A($\alpha,0$), B(0, β), έτσι ώστε $\alpha + \beta = 1$:
38. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο M(2,1), τέμνει τις ευθείες $\delta_1: y = x + 1$, $\delta_2: y = -x + 1$ στα A, B αντίστοιχα, έτσι ώστε το M να είναι μέσο της AB.
39. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο A(1,0), τέμνει τις ευθείες $\delta_1: y = x$, $\delta_2: y = x + 2$ στα B, Γ αντίστοιχα, έτσι ώστε το μήκος του BΓ να είναι 2.
40. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, η οποία διέρχεται από το σημείο P(1,3) και τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία A και B αντίστοιχα έτσι, ώστε $\vec{BP} = 2\vec{PA}$.
41. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας, η οποία διέρχεται από το σημείο P(1, - 2) και τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία A και B έτσι, ώστε το τμήμα AB να έχει μέσο το P.
42. Δίνονται οι ευθείες $\epsilon_1: y = \lambda x$, $\epsilon_2: y = -\lambda x$ και έστω ότι μια ευθεία ϵ τις τέμνει στα σημεία A και B αντίστοιχα. Αν M είναι το μέσο του τμήματος AB, να βρείτε τις συντεταγμένες των A, B συναρτήσει των συντεταγμένων του M.
43. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο M(1,2) και σχηματίζουν με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο

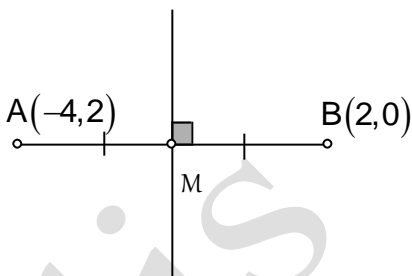
44. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο $M(1,4)$ και τέμνει τις ευθείες $\varepsilon_1: y=-x+4$ και $\varepsilon_2: y=2x+3$ στα σημεία A και B αντιστοίχως, έτσι ώστε το M να είναι το μέσο του AB
45. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο $M(0,1)$ και τέμνει τις ευθείες $\varepsilon_1: y=\frac{1}{2}x$ και $\varepsilon_2: y=\frac{1}{2}x+1$ στα σημεία A και B αντιστοίχως, έτσι ώστε να ισχύει $AB=1$
46. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας ε , η οποία διέρχεται από το σημείο $\Sigma(\alpha, \beta)$ και τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία A και B αντίστοιχα έτσι, ώστε $\overline{A\Sigma} = \mu \overline{\Sigma B}$, όπου α, β, μ γνωστοί μη μηδενικοί αριθμοί με $\mu \neq -1$.
47. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας, η οποία διέρχεται από το σημείο $\Sigma(\alpha, \beta)$ και σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο
48. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: y=2x+3$ και $\varepsilon_2: y=4x+7$, καθώς και το σημείο $M(-1,2)$. Να βρεθεί η εξίσωση κάθε ευθείας ε , η οποία διέρχεται από το M και τέμνει τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ στα σημεία A, B αντίστοιχα έτσι, ώστε το M να είναι μέσο του AB .
49. i) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας ε , η οποία διέρχεται από το σημείο $P(2,0)$ και τέμνει τις ευθείες, $\varepsilon_1: y=-x+4$ και $\varepsilon_2: y=-x+6$ στα σημεία A και B αντίστοιχα έτσι, ώστε $(AB)=2$.
ii) Ομοίως αν $P(0,1)$, $\varepsilon_1: y=-x$, $\varepsilon_2: y=-x+1$ και $(AB)=1$.
50. Έστω ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ έχει εξίσωση $y=\lambda x+\beta$. Να αποδείξετε ότι $(AB)=|x_1-x_2|/\sqrt{1+\lambda^2}$.
51. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=-\frac{3}{4}$ και σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν 24 τ. μονάδες.

ΤΟΜΕΣ ΕΥΘΕΙΩΝ

52. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(1,10)$ και από το σημείο τομής των ευθειών $\varepsilon_1: y = 2x + 5$ και $y = -5x - 9$
53. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: y = 3x + 2011$. Να βρείτε :
- την εξίσωση της ευθείας ζ_1 που είναι παράλληλη στην ευθεία ε και διέρχεται από το σημείο $A(1,-5)$
 - την εξίσωση της ευθείας ζ_2 που είναι κάθετη στην ε και διέρχεται από το σημείο $B(-3,13)$
 - το σημείο τομής των ευθειών ζ_1 και ζ_2
54. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1: y = x + 3$, $\varepsilon_2: y = -2x + 15$ και $\varepsilon_3: y = 3x - 5$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.
55. Οι ευθείες $\varepsilon_1: y = 2x + 16$, $\varepsilon_2: y = -5x + 2$ και $\varepsilon_3: y = ax - 4a - 6$ διέρχονται από το ίδιο σημείο. Να βρείτε :
- τον αριθμό a
 - τα σημεία τομής της ε_3 με τους άξονες
56. Να βρείτε τις τιμές των α, β , ώστε οι ευθείες $\varepsilon_1: x = 2\alpha y + \beta$ και $\varepsilon_2: y = \beta x + \alpha$ να τέμνονται στο σημείο $A(-1,4)$.
57. i) Να βρεθεί το σημείο τομής των $\varepsilon_1: y = -2x - 1$ και $\varepsilon_2: y = 3x - 6$.
ii) Να βρεθεί ο $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε οι $\varepsilon_1: y = (\alpha - 2)x - 1$ και $\varepsilon_2: y = (\alpha^2 - 3\alpha)x - 2$ να τέμνονται πάνω στον $\chi'\chi$.
58. Οι ευθείες $\varepsilon_1: y = (\alpha - 4)x + \alpha$ και $\varepsilon_2: y = (14 - 2\alpha)x - \alpha - 2$ είναι παράλληλες. Να βρείτε:
- τον αριθμό α
 - τα σημεία τομής της ε_3 με τους άξονες
59. Οι ευθείες $\varepsilon_1: y = \mu x + \mu - 7$ και $\varepsilon_2: y = \frac{\mu - 6}{9}x + 2\mu$ είναι κάθετες. Να βρείτε:
- τον αριθμό μ
 - το σημείο τομής A των ε_1 και ε_2
 - τον αριθμό α , ώστε η ευθεία $\zeta: y = \alpha x + \alpha - 19$ να διέρχεται από το σημείο A .

60. Δίνονται τα σημεία $A(1,5), B(4,-1), \Gamma(3,7)$ και $\Delta(-1,-9)$. Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών AB και $\Gamma\Delta$.

61. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του τμήματος AB του διπλανού σχήματος.



62. Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοκαθέτου του τμήματος AB , όπου $A(-1,0)$ και $B(5,2)$.

63. Θεωρούμε την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(1,-2)$ και $B(5,6)$. Να βρείτε :

- i) την εξίσωση της ευθείας ϵ
- ii) τα σημεία τομής της ϵ με τους άξονες
- iii) την εξίσωση της ευθείας ζ_1 που είναι παράλληλη στην ϵ και διέρχεται από το σημείο $\Gamma(-4,-3)$
- iv) την εξίσωση της ευθείας ζ_2 που είναι κάθετη στην ϵ και διέρχεται από το σημείο $\Delta(6,7)$
- v) το σημείο τομής των ευθειών ζ_1 και ζ_2

64. Δίνεται το ευθύγραμμο τμήμα AB , με $A(1,7)$ και $B(-3,5)$. Να βρείτε :

- i) τη μεσοκάθετο ϵ του ευθυγράμμου τμήματος AB
- ii) τα σημεία τομής Γ και Δ της ευθείας ϵ με τους άξονες $y'y$ και $x'x$ αντίστοιχα
- iii) το σημείο τομής των ευθειών $A\Gamma$ και $B\Delta$.

65. Δίνονται τα σημεία $A(a,2-a), B(a+6,a+9)$ και $\Gamma(5,-3)$. Αν η ευθεία AB έχει συντελεστή διεύθυνσης $\frac{1}{2}$, να βρείτε :

- i) τον αριθμό a
- ii) τα σημεία τομής της ευθείας AB με τους άξονες
- iii) την εξίσωση της ευθείας $A\Gamma$ και τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$
- iv) την εξίσωση της ευθείας ϵ που είναι κάθετη στην ευθεία AB στο σημείο B
- v) το σημείο τομής της ευθείας ϵ με την ευθεία $A\Gamma$.

66. Δίνονται τα σημεία $A(1,3)$ και $B(5,1)$. Έστω ϵ η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος AB . Να βρείτε:

- i) την εξίσωση της ευθείας ϵ
- ii) το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία ϵ με τους άξονες

67. Έστω η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(12,-3)$ και είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\alpha} = (3,4)$. Να βρείτε:

- i) την εξίσωση της ευθείας ϵ

- ii) το εμβαδόν και την περίμετρο του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία ϵ με τους άξονες
68. Οι ευθείες $\epsilon_1 : y=2x-10$ και $\epsilon_2: y=ax+9-2a$, με $a \in \mathbb{R}$, τέμνουν τον άξονα $\chi'\chi$ στο ίδιο σημείο. Να βρείτε :
- τον αριθμό a
 - την εξίσωση της ευθείας ϵ_3 που διέρχεται από το σημείο $A(6,-3)$ και είναι κάθετη στην ευθεία ϵ_2
 - την απόσταση του σημείου τομής B των ϵ_1 και ϵ_3 από την αρχή των αξόνων.
69. Έστω ϵ η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(6,8)$ και είναι παράλληλη στη διχοτόμο της γωνίας $\chi O \gamma$.
- Να βρείτε την εξίσωση της ϵ
 - Έστω ζ η ευθεία που είναι κάθετη στην ϵ στο σημείο που η ϵ τέμνει τον $\gamma'\gamma$
 - Να βρείτε την εξίσωση της ζ
 - Αν η ευθεία ζ τέμνει τον $\chi'\chi$ στο σημείο Γ , να βρείτε το σημείο τομής της ευθείας $A\Gamma$ με τον $\gamma'\gamma$
70. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που είναι μεσοπαράλληλη των ευθειών :
 $\delta : y = -2x + 1$, $\delta_2: y = -2x + 5$.
71. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία $\epsilon : y = 5x - 20$ με τους άξονες.
72. Έστω A, B δύο σημεία της ευθείας $\epsilon : y = 3x + 10$ τέτοια, ώστε η τετμημένη του B να είναι μεγαλύτερη από την τετμημένη του A κατά 2. Να βρείτε πόσο μεγαλύτερη (ή μικρότερη) είναι η τεταγμένη του B από την τεταγμένη του A . Ποια σχέση συνδέει τις διαφορές $y_B - y_A$ και $x_B - x_A$ με τον συντελεστή διεύθυνσης της ϵ ;

ΣΗΜΕΙΟ ΠΟΥ ΑΝΗΚΕΙ ΣΕ ΕΥΘΕΙΑ

73. Δίνονται τα σημεία $A(4,-3)$ και $B(-2, 5)$. Να βρείτε :
- την εξίσωση της ευθείας ϵ που διέρχεται από τα σημεία A και B
 - για ποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ η ευθεία ϵ διέρχεται από το σημείο $\Gamma(-5, 2\lambda+1)$
74. Δίνονται τα σημεία $A(a, a-3)$ και $B(7a, 3a-1)$, με $a \in \mathbb{R}$. Η ευθεία $\epsilon: y=3x-22$ διέρχεται από το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος AB . Να βρείτε :
- τον αριθμό a
 - τα σημεία τομής της ευθείας AB με τους άξονες.
75. Θεωρούμε την ευθεία $y = \lambda x - 5$ και το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (3, \lambda + 4)$, με $\lambda \in \mathbb{R}$. Η ευθεία ϵ

είναι παράλληλη στο διάνυσμα \vec{a} .

α) Να βρείτε τον αριθμό λ

β) Το σημείο $A(\mu, 7-\mu)$, με $\mu \in \mathbb{R}$, ανήκει στην ευθεία ε . Να βρείτε :

i) τον αριθμό μ

ii) την ευθεία ζ που διέρχεται από το A και είναι κάθετη στην ε .

76. Δίνονται τα σημεία $A(1, -1)$ και $B(3, 5)$. Να βρείτε σημείο M της ευθείας $\varepsilon : y = -3x - 2$, ώστε $\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB}$.

77. Δίνονται τα σημεία $A(\lambda + \mu, 2\lambda)$ και $B(\mu, \lambda - 2\mu)$, με $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Αν το ευθύγραμμο τμήμα AB

έχει μέσο το σημείο $M\left(\frac{7}{2}, -\frac{3}{2}\right)$, τότε;

i) να βρείτε τις τιμές των λ και μ

ii) να βρείτε σημείο K της ευθείας $\varepsilon : y = -7x + 23$ ώστε το τρίγωνο AKB να είναι ορθογώνιο στο K .

78. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon : y = -2x + \mu$, η οποία διέρχεται από το σημείο $A(16 - \mu, 8 - \mu)$. Να βρείτε

i) τον αριθμό μ

ii) τα σημεία της ευθείας ε τα οποία απέχουν από το σημείο $B(-1, 2)$ απόσταση ίση με 5.

79. Δίνονται οι ευθείες : $\varepsilon_1 : y = 3x - 7$ και $\varepsilon_2 : y = -2x + 13$. Το σημείο $A(\alpha, \beta)$ ανήκει στην ε_1 και το σημείο $B(\alpha + 3, 2 - \beta)$ ανήκει στην ε_2 .

i) Να βρείτε τις τιμές των α και β

ii) Να βρείτε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AB .

iii) Αν Γ είναι το σημείο τομής των ε_1 και ε_2 και M το μέσο του $A\Gamma$, να αποδείξετε ότι

$$\overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{B\Gamma}$$

80. Η ευθεία $\varepsilon : y = ax + 5 - 2a$ διέρχεται από το σημείο $A(1, 4a - 5)$. Να βρείτε :

i) τον πραγματικό αριθμό a

ii) την εξίσωση της ευθείας ζ που είναι παράλληλη στην ε και τέμνει τον x ' $\acute{\alpha}$ ξ στο σημείο με τετμημένη -3

iii) το συμμετρικό B του σημείου A ως προς την ευθεία ζ

iv) την απόσταση του σημείου B από το σημείο τομής της ε με τον y ' $\acute{\alpha}$ ξ

81. Δίνονται τα σημεία $A(a,5)$ και $B(3,2a)$ με $a \in \mathbb{R}$. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A και B , σχηματίζει γωνία 135° με τον άξονα $x'x$.
- α) Να βρείτε τον αριθμό a και την εξίσωση της ε
- β) Αν το σημείο $B(3,3\beta-5)$ ανήκει στην ευθεία ε , να βρείτε :
- i) τον αριθμό β και την απόσταση του B από την αρχή των αξόνων,
 ii) την εξίσωση της ευθείας ζ που διέρχεται από το B και είναι κάθετη στην ε
 iii) το σημείο Γ της ε και το σημείο Δ της ζ , ώστε το $\Gamma\Delta$ να έχει μέσο το $M(2,7)$
82. Δίνονται τα σημεία $A(4,2)$ και $B(3, -5)$. Να βρεθεί σημείο M της ευθείας ε :
 $7x + y - 23 = 0$ τέτοιο, ώστε το τρίγωνο AMB να είναι ορθογώνιο στο M .
83. Να βρεθεί σημείο M της ευθείας $y = -x + 4$, ώστε με τα σημεία $A(1,1)$, $B(-1,3)$ να σχηματίζει το τρίγωνο AMB ισοσκελές με κορυφή το M .

ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΟΥ ΩΣ ΠΡΟΣ ΕΥΘΕΙΑ

84. Δίνεται το σημείο $A(-3,5)$ και η ευθεία $y = -\frac{1}{2}x + 1$. Να βρείτε :
- i) την προβολή του A στην ε
 ii) το συμμετρικό του A ως προς την ευθεία ε
85. Δίνεται η ευθεία ε : $y = x - 1$ και το σημείο $A(1,3)$. Να βρεθούν:
- i) η προβολή του A πάνω στην ε
 ii) σημείο B το συμμετρικό του A ως προς την ε .
86. Έστω η ευθεία ε : $y = x + 1$ το σημείο $A(2,1)$
- α) Να βρεθούν οι συντεταγμένες της προβολής του σημείου A πάνω στην ε
 β) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του συμμετρικού του A ως προς την ε
87. Δίνεται η ευθεία ε με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, η οποία είναι συμμετρική της ε ως προς:
- i) τον άξονα $x'x$,
 ii) τον άξονα $y'y$,
 iii) την ευθεία με εξίσωση $y = x$,
 iv) την αρχή O των αξόνων.
88. Δίνεται η ευθεία ε : $y = -x + 2$. Να βρείτε τη συμμετρική ευθεία της ε , ως προς:
- α) τον άξονα $x'x$ β) τον άξονα $y'y$ γ) την αρχή O των αξόνων

- δ) τη διχοτόμο $y = x$.
89. Να βρεθεί η εξίσωση ευθείας που είναι συμμετρική της $\varepsilon: y = 2x - 1$, ως προς την
 δ: $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$.
90. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών Α, Β τριγώνου ΑΒΓ, που έχει κορυφή το σημείο Γ(-1,3), εξίσωση του ύψους ΑΚ : $y = 3x - 2$ και εξίσωση της διχοτόμου ΒΔ: $y = x - 2$.
91. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών Β, Γ τριγώνου ΑΒΓ, που έχει κορυφή το σημείο Α(1,3), εξίσωση της διαμέσου ΓΜ: $9x - 7y = 18$ και εξίσωση της διχοτόμου ΓΔ: $y = x - 1$.
92. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών Β, Γ τριγώνου ΑΒΓ, που έχει κορυφή το σημείο Α(-1,4) και εξισώσεις δύο εσωτερικών διχοτόμων τις $\delta_1: y = 1$ και $\delta_2: y = x + 1$.
93. Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών ενός τριγώνου ΑΒΓ του οποίου η κορυφή Α έχει συντεταγμένες (0, 3) και οι διχοτόμοι ΒΕ και ΓΖ βρίσκονται πάνω στις ευθείες $\varepsilon_1: y = 2$ και $\varepsilon_2: y = x$ αντίστοιχα.
94. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές Β(1,2) και Γ(8, 3). Αν $y = x$ είναι η εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκεται μια διχοτόμος του, να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών ΑΒ και ΑΓ.
95. Η κορυφή Β ενός τριγώνου ΑΒΓ έχει συντεταγμένες (4, 3) και οι ευθείες πάνω στις οποίες βρίσκονται το ύψος ΑΔ και η διχοτόμος ΑΕ έχουν εξισώσεις $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ και $y = x$ αντίστοιχα. Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών ΑΒ, ΒΓ και ΑΓ.
96. Η κορυφή Β τριγώνου ΑΒΓ έχει συντεταγμένες (3, 3) και οι ευθείες πάνω στις οποίες βρίσκονται η διχοτόμος ΑΔ και το ύψος εξισώσεις $y = 1$ και $y = -\frac{3}{2}x + 4$ αντίστοιχα.
 Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών Α και Γ.
97. Η κορυφή Α ενός τριγώνου ΑΒΓ έχει συντεταγμένες (3,2) και οι ευθείες πάνω στις οποίες βρίσκονται η διχοτόμος ΒΔ και η διάμεσος ΒΜ έχουν εξισώσεις $y = x - 2$ και $y = 3x - 6$ αν βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών Β και Γ.
98. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών Β, Γ τριγώνου ΑΒΓ, που έχει κορυφή

$A\left(1, \frac{4}{3}\right)$ και τις ευθείες $\varepsilon_1 : y = -2x$ και $\varepsilon_2 : y = 2x - 4$ εξωτερικές διχοτόμους.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

99. Να αποδείξετε ότι :
- τα σημεία $A(1,2)$, $B(3,6)$ και $\Gamma(4,10)$ είναι κορυφές τριγώνου,
 - τα σημεία $A(1,2)$, $B(3, 6)$ και $\Gamma(4, 8)$ δεν είναι κορυφές τριγώνου.
100. Δίνονται τα σημεία $A(4, 5)$, $B(6,- 1)$ και $\Gamma(12,1)$.
- Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.
 - Να βρείτε σημείο Δ , ώστε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ να είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.
101. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(1,2)$, $B(-3,-2)$, $\Gamma(3,-4)$. Να βρεθούν οι εξισώσεις του ύψους, της διαμέσου και της μεσοκαθέτου που αντιστοιχούν στην πλευρά AG .
102. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(5,2)$, $B(1,2)$, $\Gamma(3,4)$. Να υπολογιστούν οι συντελεστές διεύθυνσης των πλευρών και να βρεθεί το είδος του τριγώνου.
103. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(2,1)$, $B(-1,-1)$, $\Gamma(-3,2)$.
Να βρεθούν οι εξισώσεις :
- Του φορέα του ύψους $B\Delta$
 - Του φορέα της διαμέσου AM
 - Της μεσοκαθέτου της πλευράς $B\Gamma$
104. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(-1, 2)$, $B(3, -2)$ και $\Gamma(1, 4)$. Να βρεθούν :
- οι εξισώσεις των πλευρών του
 - οι εξισώσεις δύο υψών του
 - οι εξισώσεις δύο διαμέσων του
 - οι εξισώσεις δύο μεσοκαθέτων του
105. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε: $A(-8, 2)$, $B(7, 4)$ και $H(5, 2)$ το ορθόκεντρο του.
Να βρείτε:
- την εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$
 - τις συντεταγμένες της κορυφής Γ

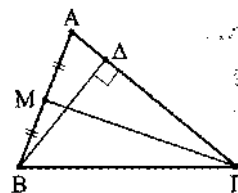
- γ) τις εξισώσεις των πλευρών του.
- δ) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη στην ευθεία AB.
- ε) Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου που έχει κορυφές την αρχή των αξόνων και τα σημεία τομής τους με την ευθεία AB.
106. Με υποτείνουσα το ευθύγραμμο τμήμα AB που η ευθεία $\epsilon: y = -3x + \frac{3}{2}$ ορίζει με τους άξονες, κατασκευάζουμε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο AMB. Να βρεθούν οι συντεταγμένες της κορυφής M.
107. Η κορυφή A τριγώνου ABΓ έχει συντεταγμένες (2,1) και οι ευθείες πάνω στις οποίες βρίσκονται τα δύο ύψη του έχουν εξισώσεις $y = -3x + 11$ και $y = x + 3$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών B, Γ του τριγώνου.
108. Θεωρούμε τρίγωνο ABΓ με A(6,0), B(4, -3) και ορθόκεντρο H(5, -1). Να βρεθούν οι συντεταγμένες της κορυφής Γ.
109. Οι πλευρές AB και ΑΓ τριγώνου ABΓ βρίσκονται πάνω στις ευθείες $\epsilon_1 : y = -2x + 12$ και $\epsilon_2 : y = 2x + 6$ αντίστοιχα και το ορθόκεντρο του είναι το σημείο O(0,0). Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών A, B, Γ.
110. Να βρείτε τις εξισώσεις των υψών τριγώνου ABΓ που έχει κορυφές A (-5, 4), B (2, 3) και Γ (-3, -2).
111. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών τριγώνου ABΓ, που έχει πλευρές τις AB: $y = 3x - 12$, ΑΓ: $x - 3y = -8$ και ορθόκεντρο το H(1,3).
112. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών A,B τριγώνου ABΓ, που έχει ύψος AK: $y = -x + 5$, διάμεσο AM : $3x + 2y = 14$ και κορυφή το Γ(5,7).
113. Έστω ABΓ ένα ορθογώνιο τρίγωνο με $\hat{A} = 90^\circ$ και τα τετράγωνα ABΔΕ και ΑΓΖΗ εκτός αυτού. Να αποδείξετε ότι ο φορέας του ύψους AK και οι ευθείες BZ και ΓΔ διέρχονται από το ίδιο σημείο.
114. Η κορυφή A ενός τετραγώνου ABΓΔ έχει συντεταγμένες (3,1) και μια πλευρά του βρίσκεται στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 1$. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών πάνω στις βρίσκονται οι άλλες τρεις πλευρές του τετραγώνου.
115. Η κορυφή A τριγώνου ABΓ είναι το σημείο (1,2), ενώ οι ευθείες πάνω στις οποίες βρίσκονται δύο διάμεσοι του είναι οι $\epsilon_1 : x - 3y + 1 = 0$ και $\epsilon_2 : y = 1$. Να βρεθούν οι

συντεταγμένες των κορυφών Β και Γ.

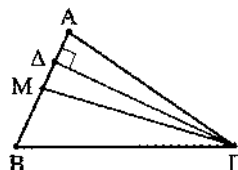
116. Η κορυφή Α τριγώνου ΑΒΓ έχει συντεταγμένες (1,5) και οι ευθείες πάνω στις οποίες βρίσκονται οι διάμεσοι ΒΕ και ΓΖ του τριγώνου είναι οι $\epsilon_1 : 5x - 3y + 14 = 0$ και $\epsilon_2 : y = 2x + 4$ αντίστοιχα. Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Β και Γ.

117. Σε τρίγωνο ΑΒΓ οι ευθείες πάνω στις οποίες βρίσκονται η πλευρά ΑΒ, η διάμεσος ΓΜ και το ύψος ΑΔ έχουν εξισώσεις $y = x - 2$, $y = \frac{4}{3}x - \frac{10}{3}$ και $y = -\frac{2}{3}x + 3$ αντίστοιχα. Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Α, Β, Γ.

118. Η κορυφή Α τριγώνου ΑΒΓ έχει συντεταγμένες (2,1) και οι ευθείες πάνω στις οποίες βρίσκονται το ύψος ΒΔ και η διάμεσος ΓΜ έχουν εξισώσεις $y = \frac{1}{2}x + 1$ και $y = 2x$ αντίστοιχα. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών Β και Γ.



119. Η κορυφή Α τριγώνου ΑΒΓ έχει συντεταγμένες (4,3), ενώ το ύψος ΓΔ και η διάμεσος ΓΜ βρίσκονται πάνω στις ευθείες με εξισώσεις $y = -x + 1$ και $y = -2x + 8$ αντίστοιχα. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών Β και Γ.



120. Δύο κορυφές ενός τριγώνου ΑΒΓ έχουν συντεταγμένες (4,2) και (5,0) και οι ευθείες πάνω στις οποίες βρίσκονται ένα ύψος και μια διάμεσος του έχουν εξισώσεις $y = -3x + 14$ και $y = 5x - 18$ αντίστοιχα. Να βρεθούν οι συντεταγμένες της τρίτης κορυφής.

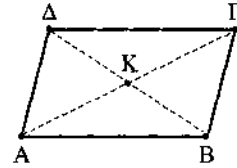
121. Η κορυφή Α ενός τριγώνου ΑΒΓ έχει συντεταγμένες (1,2). Μια πλευρά και μια διάμεσος του βρίσκονται πάνω στις ευθείες με εξισώσεις $y = x - 5$ και $x = 2$ αντίστοιχα. Να βρείτε τις συντεταγμένες των άλλων κορυφών του.

122. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α(1,1), Β(2,5) και έγκεντρο Ι(2, 2). Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Γ.

123. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών Α,Γ τριγώνου ΑΒΓ, που έχει ύψος ΑΚ: $y = 2$, διάμεσο ΓΜ: $9x + 8y = 6$ και κορυφή Β(6,4)
- I
124. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών Α,Β τριγώνου ΑΒΓ, που έχει ύψος ΑΚ: $y = 3x - 7$, ευθεία ΒΜ: $x + 2y = -5$ όπου Μ σημείο για το οποίο $\overline{AM} = 2\overline{MG}$ και κορυφή Γ(-2,-1).
125. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών τριγώνου ΑΒΓ, με πλευρές τις $\epsilon_1: y = x - 1$, $\epsilon_2: y = -2x + 14$ και Μ το μέσο μιας πλευράς.
126. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών Β,Γ τριγώνου ΑΒΓ, που έχει μεσοκάθετες τις ευθείες $\mu_\beta: y = -x - 1$, $\mu_\gamma: y = -x + 7$ και κορυφή Α(5,4).
127. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών Β, Γ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ, [με $(AB) = (BG)$], που έχει πλευρά την ευθεία $y = 4x - 2$, ύψος προς τη βάση ΑΓ την ευθεία $y = 2x - 2$ και κορυφή Α το σημείο (1,2).
128. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών Α,Γ τριγώνου ΑΒΓ, που έχει μεσοκάθετο της ΒΓ την ευθεία $y = 2x + 5$, κορυφή το Β(-3,4) και ορθόκентρο Η το σημείο (0,5). Κατόπιν να βρεθεί το είδος του τριγώνου.
129. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών τριγώνου ΑΒΓ, με πλευρές τις ΑΒ: $y = 2x + 1$, ΑΓ: $x = 2$ και διάμεσο ΒΜ: $y = \frac{3}{2}x + 1$.
130. Να βρεθούν οι συντεταγμένες της κορυφής Α τριγώνου ΑΒΓ, που έχει κορυφές τα σημεία Β(0-1), Γ(1,6) και κέντρο βάρους G το σημείο (1,3).
131. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών τετραγώνου του οποίου οι διαγώνιες βρίσκονται πάνω στους άξονες και έχει μήκος πλευράς $\sqrt{2}$.
132. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών παραλληλογράμμου που έχει δύο πλευρές με εξισώσεις $\epsilon_1: y = \frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$ και $y = 3x - 1$ και μια διαγώνιο με εξίσωση $\delta: y = \frac{4}{5}x - 1$.
133. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών παραλληλογράμμου που έχει δύο πλευρές με εξισώσεις $\epsilon_1: y = \frac{1}{4}x - 1$ και $y = 3x - 12$ και το κέντρο του Ο έχει συντεταγμένες $\left(\frac{5}{2}, 1\right)$.

134. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών τετραγώνου που το κέντρο του Κ έχει συντεταγμένες (1,3), έχει μια διαγώνιο με εξισώσεις δ: $y = 3$ και μια πλευρά με εξίσωση $\epsilon: y = -x + 7$.
135. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών ρόμβου που έχει κορυφή το σημείο (0,4), μια του πλευρά παράλληλη στη διχοτόμο του 1ου τεταρτημορίου και μια του διαγώνιο με εξίσωση $\delta: y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$.
136. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών τραπεζίου που έχει διάμεσο με εξίσωση $\delta: y = 3x - \frac{7}{2}$, δυο του πλευρές με εξισώσεις $\epsilon_1: 3x + 4y = 31$ και $\epsilon_2: y = 1$ και το σημείο Κ(0,4) που ανήκει σε μια του πλευρά.
137. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών τριγώνου ΑΒΓ, που έχει Κ(2,5), Λ(-2,7) τα ίχνη δύο υψών του και το Η(-2,9) ορθόκεντρο.
138. Δίνονται τα σημεία Α (2, 1), Β (6, 4) και Γ ($\frac{9}{2}$, 6).
- Να δειχθεί ότι η γωνία ΑΒΓ είναι ορθή.
 - Να βρεθούν οι συντεταγμένες της κορυφής Δ του ορθογωνίου παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.
 - Να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου του περιγεγραμμένου στο τρίγωνο ΑΒΓ.
139. Έστω τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία Α(-1,-1), Β(5,5), Γ(1,3) και Δ(3,1). Να βρεθεί το είδος του τετραπλεύρου.
140. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία Α(-1,2), Β(2,1), Γ(1,4) και Δ(-2, 5) είναι ρόμβος.
141. Δίνονται τα σημεία Α(0,1), Β(10, 6), Γ(5, 6) και Δ(3,5). Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο. Ποια είναι η εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκεται η διάμεσος του;
142. Οι δύο πλευρές ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου βρίσκονται πάνω στις ευθείες με εξισώσεις $y = -2x + 3$ και $y = -x + 5$ και μια κορυφή του είναι το σημείο Α(4,1). Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών πάνω στις οποίες βρίσκονται οι άλλες δύο πλευρές.
143. Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Αν η κορυφή Α έχει συντεταγμένες (6,4) και δύο πλευρές του βρίσκονται πάνω στις ευθείες με εξισώσεις $y = 2x - 3$ και $y = \frac{1}{2}x + 5$, να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Β, Γ, Δ.

144. Το κέντρο K ενός παραλληλογράμμου έχει συντεταγμένες $(2,3)$ και οι εξισώσεις των ευθειών πάνω στις οποίες βρίσκονται οι πλευρές AB και AD είναι $y = x + 3$ και $y = -2x + 6$ αντίστοιχα. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών $BΓ$ και $ΓΔ$.



145. Δύο πλευρές ενός παραλληλογράμμου βρίσκονται πάνω στις ευθείες με εξισώσεις $y = -2x + 6$ και $y = -\frac{8}{3}x + \frac{20}{3}$ ενώ μια διαγώνιος του βρίσκεται στην ευθεία με εξίσωση $y = -\frac{3}{2}x + 2$. Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του.
146. Έστω $ABΓΔ$ παραλληλόγραμμο με κέντρο το σημείο $K(2,1)$ και εξισώσεις των πλευρών AB , $AΓ$ τις $y = x + 1$ και $y = -2x + 4$ αντίστοιχως. Να βρεθούν οι εξισώσεις των άλλων δύο πλευρών
147. Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του τετραγώνου του οποίου οι διαγώνιες βρίσκονται πάνω στους άξονες και η πλευρά του έχει μήκος ίσο με $\sqrt{2}$
148. Τα σημεία $A(2,0)$ και $B(-1,4)$ είναι διαδοχικές κορυφές τετραγώνου. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του.
149. Οι κορυφές A και $Γ$ ενός ρόμβου έχουν συντεταγμένες $(2, -5)$ και $(10,3)$ αντίστοιχα
 i) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας οποία βρίσκεται η διαγώνιος $ΒΔ$.
 ii) Αν η ευθεία $BΓ$ έχει εξίσωση $y = 2x - 17$ να βρείτε τις συντεταγμένες του B και του εμβαδού του ρόμβου.
150. Η κορυφή A ενός ρόμβου έχει συντεταγμένες $(1,-1)$ και οι ευθείες πάνω στις οποίες μια πλευρά και μια διαγώνιος του έχουν εξισώσεις $y = 3x - 4$ και $y = x$ αντίστοιχα. Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών B , $Γ$ και $Δ$.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

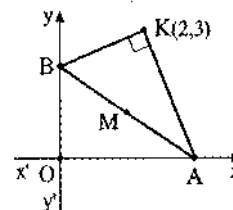
151. Να βρείτε τι παριστάνουν οι εξισώσεις :
 i) $xy - 2y = 0$ ii) $x^2 - 5x + 6 = 0$
 iii) $|x| + |y| = 0$ iv) $(x-2)(y+1) = 0$ v) $|x + 1| = |y - 2|$
152. Να βρείτε τις γραμμές που παριστάνουν οι παρακάτω εξισώσεις:
 i) $x(y-1) = 0$, ii) $x^2 - y^2 = 0$, iii) $y^2 - 3y - 4 = 0$.

153. Να λυθούν γραφικά οι παρακάτω ανισώσεις.

i) $y + 2 > 0$, ii) $x \cdot y < 0$ iii) $-x^2 + 6x - 8 > 0$.

154. Δίνονται τα σημεία $A(0,1)$, $B(2,0)$ και $\Gamma(-1,1)$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M του επιπέδου που ικανοποιούν τη σχέση $MA^2 + MB^2 - 2M\Gamma^2 = 2$

155. Μια ορθή γωνία έχει κορυφή το σημείο $K(2,3)$ και τέμνει τους άξονες x' , y' στα σημεία A και B αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το μέσο M του τμήματος AB ανήκει σε σταθερή ευθεία (ανεξάρτητη των A , B).



156. i) Να βρεθεί το σημείο M του άξονα x' του οποίου το άθροισμα των αποστάσεων από τα σημεία $A(1, -4)$ και $B(7,8)$ είναι ελάχιστο
ii) Ομοίως αν $A(1,4)$ και $B(7,8)$.

157. i) Δίνονται τα σημεία $A(3,2)$ και $B(2,5)$ Να βρείτε το σημείο M του άξονα y' για το οποίο η ποσότητα $|MA - MB|$ γίνεται μέγιστη
ii) Ομοίως αν $A(-3,2)$ και $B(2,5)$.

158. Να βρεθεί η τιμή του a για την οποία οι ευθείες $\epsilon_1 : y = 4x + 6$, $\epsilon_2 : y = ax + 1$ και $\epsilon_3 : y = x + 3$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

159. Δίνονται τα σημεία $A(3\lambda - 1, 6\lambda - 5)$ και $B(4\mu - 6, 10 - 2\mu)$, με $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

i) Να βρεθούν οι ευθείες ϵ, ζ πάνω στις οποίες κινούνται τα σημεία A και B

ii) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ϵ και ζ είναι κάθετες και να βρείτε το σημείο τομής τους

160. Δίνεται το σημείο $A(2\lambda - 3, 6\lambda - 11)$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι το σημείο A κινείται πάνω σε μία ευθεία ϵ

ii) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του $\theta \in \mathbb{R}$ το σημείο $B(2 - \sin^2\theta, 1 + 3\eta\mu^2\theta)$ ανήκει στην ευθεία ϵ

161. Δίνονται τα σημεία $A(3\lambda - 4, 7\lambda + 2)$ και $B(\lambda + 2.5\lambda - 18)$, με $\lambda \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος AB κινείται πάνω σε ευθεία

162. Δίνεται το σημείο $A(1,11)$ και η ευθεία $\varepsilon: y=4x-5$. Αν το σημείο B κινείται πάνω στην ευθεία ε , να αποδείξετε ότι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος AB κινείται πάνω σε μία ευθεία παράλληλη στην ε .
163. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon: y=3x-7$ και $\zeta: y=\frac{1}{2}x-2$. Έστω $A(\lambda, \mu)$ ένα σημείο της ευθείας ε και B το συμμετρικό του A ως προς την ευθεία ζ .
- Να εκφράσετε τις συντεταγμένες του B συναρτήσει του λ
 - Να αποδείξετε ότι το σημείο B κινείται σε μία ευθεία.
164. Να αποδείξετε ότι όταν το λ μεταβάλλεται στο \mathbb{R} , τότε το σημείο $M\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}, \frac{\lambda+5}{\lambda+1}\right)$ ανήκει σε ευθεία ε της οποίας και να βρεθεί η εξίσωση.
165. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1: y=\lambda x+\lambda+2$ και $\varepsilon_2: y=x+4$ όταν $\lambda \neq 1$, τέμνονται και ότι αν το λ μεταβάλλεται, τότε το σημείο τομής τους ανήκει σε σταθερή ευθεία.

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

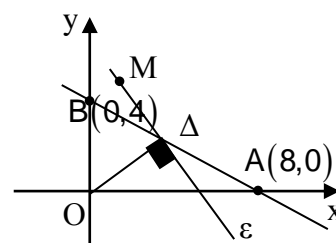
166. Οι ευθείες $\varepsilon_1: y=\mu x-6$ και $\varepsilon_2: y=\frac{\mu-4}{4}x+4$ είναι κάθετες.
- Να βρείτε τον αριθμό μ .
 - Να βρείτε το σημείο τομής A των ε_1 και ε_2
 - Αν η ευθεία $\zeta: y=(\alpha-7)x+\alpha$ διέρχεται από το σημείο A , να βρείτε:
 - τον αριθμό α
 - τη γωνία που σχηματίζει η ευθεία ζ με τον άξονα $x'x$
167. Θεωρούμε τα σημεία $A(a,8)$ και $B(-2,a-6)$, με $a \in \mathbb{R}$. Η ευθεία ε που διέρχεται από τα σημεία A και B έχει συντελεστή διεύθυνσης 2.
- Να βρείτε τον αριθμό a και την εξίσωση της ε .
 - Θεωρούμε σημείο Γ τέτοιο, ώστε: $2\overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{B\Gamma} = (-8,6)$. Να βρείτε:
 - τις συντεταγμένες του σημείου Γ ,
 - την προβολή του Γ στην ευθεία ε
 - το συμμετρικό του Γ ως προς την ευθεία ε .

168. Δίνεται το σημείο $A(-3,2)$ και το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (2\mu, 5-\mu)$, με $\mu \in \mathbb{R}$, για το οποίο ισχύει $|\vec{\alpha}| = \sqrt{20}$.
- Να αποδείξετε ότι $\mu=1$
 - Να βρείτε την ευθεία που διέρχεται από το A και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$
 - Να βρείτε τα σημεία τομής B και Γ της ε με τους άξονες x' και y'
 - Αν ζ η μεσοκάθετος του τμήματος $B\Gamma$, να βρείτε τα σημεία τομής της ζ με τους άξονες
169. Θεωρούμε τα σημεία $O(0,0)$, A και $B(6,8)$. Το σημείο $\Lambda(3,10)$ είναι το μέσο του AB και έστω K το μέσο του OA . Να βρείτε :
- τις συντεταγμένες των σημείων A και K ,
 - το μέτρο του διανύσματος $\overline{K\Lambda}$
 - την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία K και Λ
 - την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το B και είναι κάθετη στο \overline{AB}
 - το σημείο τομής των ευθειών ε και ζ
170. Θεωρούμε την ευθεία $\varepsilon : y = \mu x + 1$ και το διάνυσμα $\vec{v} = (9-\mu, -2)$, όπου $\mu \in \mathbb{R}$. Η ευθεία ε είναι κάθετη στο διάνυσμα \vec{v}
- Να βρείτε τον αριθμό μ
 - Δίνονται τα σημεία : $A(\alpha, \beta)$ και $B(\beta-5, \alpha+1)$. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία ε να είναι μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος AB .

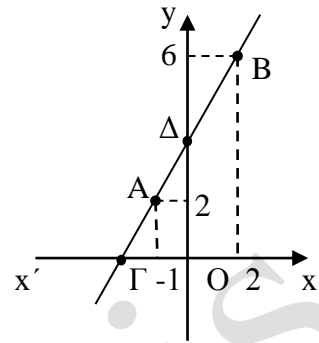
171. Δίνονται τα σημεία $A(8,0)$, $B(0,4)$ και έστω Δ το μέσο του AB .

- Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας OD .
- Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που είναι κάθετη στην OD στο Δ .
- Αν M τυχαίο σημείο της ε , να αποδείξετε ότι:

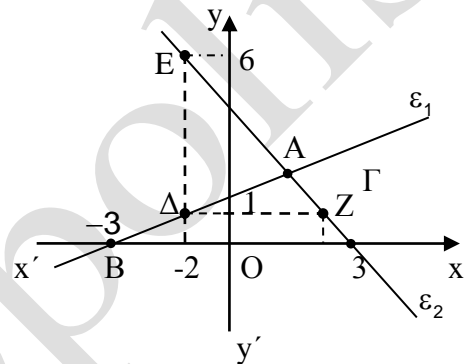
$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = 2\overline{OM}^2$$



172. Δίνεται η ευθεία AB του διπλανού σχήματος. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΓΔ.



173. Με βάση το διπλανό σχήμα, να βρείτε:
 i. τις εξισώσεις των ευθειών ϵ_1, ϵ_2 .
 ii. τις συντεταγμένες του σημείου A.
 iii. το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ.



174. Δίνονται οι ευθείες : $y = x + 5$ και $\epsilon_2 : y = 10$. Έστω A το σημείο τομής των ευθειών ϵ_1 και ϵ_2 . Θεωρούμε τα σημεία B(6,11) και Γ(10,10) τα οποία ανήκουν στις ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 αντίστοιχα . Να βρείτε :
 i) ένα σημείο Γ(x,10) της ευθείας ϵ_2 έτσι ,ώστε να ισχύει $\vec{BA} \cdot \vec{BG} = 0$
 ii) τη γωνία των διανυσμάτων \vec{AB} και $\vec{A\Delta}$
 iii) την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Δ(10,10) και είναι κάθετη προς την ευθεία ϵ_1
175. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\kappa, 8)$ και $\vec{\beta} = (\mu, \mu + 3)$ και ευθεία ϵ ,ώστε :
 $\text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\alpha} = (-5, 5)$ και $\epsilon // \vec{\alpha}$
 α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$
 β) Επιπλέον η ευθεία ϵ τέμνει τους άξονες x' και y' στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα ,ώστε το μέσο του ΓΔ να έχει τετμημένη μεγαλύτερη από την τεταγμένη του
 i) Να βρείτε την εξίσωση της ϵ
 ii) Αν $\vec{OH} = 3\vec{\beta} - \vec{\alpha}$, να βρείτε το σημείο H καθώς και το συμμετρικό του ως προς την ευθεία ϵ .
176. Δίνεται τετράγωνο ABΓΔ με B(8,-6) και Δ(2,2) . Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών A και Γ.

177. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$. Με πλευρές τις κάθετες AB και $A\Gamma$ γράφουμε εξωτερικά του $AB\Gamma$, τα τετράγωνα $AB\Delta E$ και $A\Gamma ZH$. Να αποδειχτεί ότι οι ευθείες $\Gamma\Delta$, BZ και το ύψος AK συντρέχουν.
178. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και το ύψος του $A\Delta$. Από το Δ φέρνουμε τη $\Delta E \perp A\Gamma$. Αν M το μέσο της ΔE , να δειχτεί ότι $AM \perp BE$.
179. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$. Με πλευρές τις κάθετες AB και $A\Gamma$ γράφουμε εξωτερικά του $AB\Gamma$, τα τετράγωνα $AB\Delta E$ και $A\Gamma ZH$. Να δειχτεί ότι τα Δ , A , Z είναι συνευθειακά και ότι $MB \perp M\Gamma$, όπου M μέσο της ΔZ .
180. Έστω σημεία A, B, Γ του θετικού ημιάξονα Ox με τετμημένες α, β, γ αντίστοιχα. Από τυχαίο σημείο Σ του άξονα $y'y$ φέρνουμε τις $A\Sigma, B\Sigma$ και $\Gamma\Sigma$ που τέμνουν την ευθεία $x = \delta$ στα $K(\delta, \kappa), \Lambda(\delta, \lambda)$ και $M(\delta, \mu)$ αντίστοιχα. Αν ισχύει $6(\alpha + \gamma) = 2\alpha\gamma$, να αποδειχτεί ότι τα κ, λ, μ είναι (με αυτήν τη σειρά) διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

181. Έστω ευθεία δ που σχηματίζει με το θετικό ημιάξονα Ox γωνία $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Από το σημείο $A(\eta\mu\theta, \theta)$ φέρνουμε ευθεία ε κάθετη στη δ . Να βρεθεί η γωνία θ έτσι ώστε η ε να σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με το μέγιστο δυνατό εμβαδό.

182. Τα σημεία A και B κινούνται στους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy αντίστοιχα, έτσι ώστε να ισχύει $(OA) + (OB) = 2$. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας AB που σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με το μέγιστο δυνατό εμβαδά.
183. i) Αν για τους θετικούς αριθμούς x, y ισχύει $xy = 1$ να αποδειχτεί ότι το άθροισμα $\Sigma = x + y$ γίνεται ελάχιστο και ισούται με 2 , όταν είναι $x = y = 1$.
 ii) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία $A\left(\alpha, \frac{1}{\alpha}\right)$, και $B\left(\beta, \frac{1}{\beta}\right)$ με $\alpha, \beta > 0$.
 iii) Αν είναι $\alpha\beta = 1$, να υπολογιστούν οι α, β έτσι ώστε η παραπάνω ευθεία ε να σχηματίζει με τους θετικούς ημιάξονες τρίγωνο με το ελάχιστο δυνατό εμβαδά.

184. Φωτεινή ακτίνα διερχόμενη από το σημείο $\Sigma(-2,3)$ και προσπίπτουσα στην ευθεία $\varepsilon: -x+y+1=0$ μετά την ανάκλασή της διέρχεται από το σημείο N να βρεθούν οι εξισώσεις της προσπίπτουσας και της ανακλώμενης ακτίνας. Ποιο είναι το σημείο ανάκλασης;

