Γενικά Επαναληπτικά Διαγωνίσματα από το Askisopolis

Συμμετέχουν οι μαθηματικοί:

Στέλιος Μιχαήλογλου | Δημήτρης Πατσιμάς

Βαγγέλης Ραμαντάνης | Αποστόλης Κακαβάς

Άγγελος Μπλιάς | Νίκος Τούντας

2020 - 2021


Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

6ο Διαγώνισμα

30-3-2021

Θέμα Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ’ ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β).

μονάδες 7

Α2. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ, πότε θα λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στο Δ;

μονάδες 4

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Για κάθε συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο Α, το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ υπάρχει μόνον αν $x_0 \in A$ ».

α) Είναι αληθής ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

μονάδες 1+3

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν για τις παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f, g ισχύουν:

$f(0)=4,\ f'(0)=3,\ f'(5)=6,\ g(0)=5,\ g'(0)=1, g'(4)=2$, τότε $(f\circ g)'(0)=(g\circ f)'(0)$.

β) Δίνεται ότι η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ και ότι η γραφική της παράσταση είναι πάνω από τον άξονα $x'x$. Αν υπάρχει κάποιο σημείο $A(x_0,f(x_0))$ της C_f του οποίου η απόσταση από τον άξονα $x'x$ είναι μέγιστη (ή ελάχιστη), τότε σε αυτό το σημείο η εφαπτομένη της C_f είναι οριζόντια.

γ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=1$, τότε κατ’ ανάγκη θα είναι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=1$ ή $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-1$

μονάδες 6

Α5. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στην σωστή απάντηση στις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν $f(x)=(x^2-1)^3$ τότε η έβδομη παράγωγος αυτής στο 0 ισούται με:

Α. 1 Β.- 1 Γ.0 Δ. 27 Ε. δεν υπάρχει

β) Ποια από τα παρακάτω όρια είναι καλώς ορισμένα;

Α. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^{20}-x+1}$ Β. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^{20}-x-1}$ Γ. $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{3x^9+x-1}$

Δ. $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{3x^9+x-1}$ Ε. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\ln(x^3+x+1)\right]$ ΣΤ. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\ln(x^3+x-1)\right]$

μονάδες 4

Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ με $h(x)=x^3$.

Β1. Να βρείτε την συνάρτηση $f=g\circ h$.

μονάδες 3

$$\text{Έστω } f(x)=\frac{x^3+1}{x^3-1},\ x\neq 1$$

Β2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

μονάδες 7

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

μονάδες 4

Β4. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες, να κάνετε τον πίνακα μεταβολών και τέλος να την χαράξετε.

μονάδες 6

B5. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.

μονάδες 5

Θέμα Γ

Αν για την συνάρτηση f που είναι ορισμένη και συνεχής στο $\mathbb{R}$ ισχύουν : $f(x)(f(x)+2x)-1=0$ και $f(0)=1$ τότε :

Γ1. Να αποδείξετε ότι : $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x,\ x\in\mathbb{R}$.

μονάδες 6

Γ2. Αν $g(x)=\ln x$ να ορίσετε τη σύνθεση $h=g\circ f$ και να αποδείξετε ότι είναι περιττή συνάρτηση.

μονάδες 5

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi>0$ τέτοιο ώστε να ισχύει :

$$\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\cdot\sqrt{\xi^2+1}+x=0 \text{ για κάθε } x>0.$$

μονάδες 7

Γ4. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in(0,1)$ ισχύει $h(x)+h(x^3)<h(x^2)+h(x^5)$.

μονάδες 7

Θέμα Δ

Δίνεται κυρτή και παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

- $f(1)=1$
- $f'(x)\neq\ln x$ για κάθε $x>0$
- η f' είναι συνεχής
- η f έχει κρίσιμο σημείο το $x_0>0$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f'(x)>\ln x$ για κάθε $x>0$.

μονάδες 7

Δ2. Να αποδείξετε ότι $0<x_0<1$.

μονάδες 4

Δ3. Να αποδείξετε ότι η f έχει ελάχιστο στο x_0.

μονάδες 3

Δ4. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>1$ είναι $f(x)>x(\ln x-1)+2$.

μονάδες 5

Δ5. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>1$ είναι $f(x)<f'(x)(x-1)+1$.

μονάδες 6

Καλή Τύχη!