

20η Άσκηση

Ανισώσεις 1ου Βαθμού

Έστω x_1, x_2 διαφορετικές ρίζες της εξίσωσης $(\lambda + 2)x^2 + 2\lambda x + \lambda - 1 = 0$, $\lambda \neq -2$.

α) Να δείξετε ότι $\lambda > 2$.

β) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει τιμή του λ για την οποία το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης να είναι ίσο με 2.

γ) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες $|x_1 x_2 (\lambda + 2)| < 3$.

δ) Να λύσετε την ανίσωση $|\lambda + 2| |x_1 + x_2 + x_1 x_2| + |2\lambda + 2| > |3\lambda - 18|$.

ε) Να βρείτε την εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τα $2x_1, 2x_2$.

στ) Να λύσετε την εξίσωση $x_1 x_2 + \frac{3}{\lambda} = \frac{7\lambda}{\lambda^2 + 2\lambda}$.

Στέλιος Μιχαήλογλου

Λύση

α) Επειδή η εξίσωση είναι 2ου βαθμού και έχει δύο άνισες ρίζες, ισχύει ότι

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow (2\lambda)^2 - 4(\lambda+2)(\lambda-1) < 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 4(\lambda^2 - \lambda + 2\lambda - 2) < 0 \Leftrightarrow \cancel{4\lambda^2} - \cancel{4\lambda^2} + \lambda - 2\lambda + 2 < 0 \Leftrightarrow -\lambda < -2 \Leftrightarrow \lambda > 2$$

β) Από τους τύπους Vieta είναι $x_1 + x_2 = -\frac{2\lambda}{\lambda+2}$ και $x_1 x_2 = \frac{\lambda-1}{\lambda+2}$.

Έστω ότι $x_1 + x_2 = 2$. Τότε

$$-\frac{2\lambda}{\lambda+2} = 2 \Leftrightarrow -2\lambda = 2\lambda + 4 \Leftrightarrow -2\lambda - 2\lambda = 4 \Leftrightarrow -4\lambda = 4 \Leftrightarrow \lambda = -1 \text{ που είναι άτοπο αφού } \lambda > 2.$$

γ) $|x_1 x_2 (\lambda+2)| < 3 \Leftrightarrow \left| \frac{\lambda-1}{\lambda+2} (\lambda+2) \right| < 3 \Leftrightarrow |\lambda-1| < 3 \Leftrightarrow -3 < \lambda-1 < 3 \Leftrightarrow -2 < \lambda < 4$. Επειδή όμως $\lambda > 2$ τελικά $\lambda \in (2, 4)$

δ) $|\lambda+2||x_1 + x_2 + x_1 x_2| + |2\lambda+2| > |3\lambda-18| \Leftrightarrow |\lambda+2| \left| -\frac{2\lambda}{\lambda+2} + \frac{\lambda-1}{\lambda+2} \right| + |2\lambda+2| > |3\lambda-18| \Leftrightarrow$

$$|\lambda+2| \left| \frac{-2\lambda + \lambda - 1}{\lambda+2} \right| + |2\lambda+2| > |3\lambda-18| \Leftrightarrow |\lambda+2| \left| \frac{-\lambda-1}{\lambda+2} \right| + |2\lambda+2| > |3\lambda-18| \Leftrightarrow$$

$$\cancel{|\lambda+2|} \left| \frac{-\lambda-1}{\lambda+2} \right| + |2\lambda+2| > |3\lambda-18| \Leftrightarrow |\lambda+1| + |2(\lambda+1)| > |3(\lambda-6)| \Leftrightarrow |\lambda+1| + 2|\lambda+1| > 3|\lambda-6| \Leftrightarrow$$

$$3|\lambda+1| > 3|\lambda-6| \Leftrightarrow |\lambda+1|^2 > |\lambda-6|^2 \Leftrightarrow (\lambda+1)^2 > (\lambda-6)^2 \Leftrightarrow$$

$$\cancel{\lambda^2} + 2\lambda + 1 > \cancel{\lambda^2} - 12\lambda + 36 \Leftrightarrow 2\lambda + 12\lambda > 36 - 1 \Leftrightarrow 14\lambda > 35 \Leftrightarrow \lambda > \frac{35}{14} \text{ που είναι δεκτές.}$$

ε) Η ζητούμενη εξίσωση έχει $S = 2x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2) = 2\left(-\frac{2\lambda}{\lambda+2}\right) = -\frac{4\lambda}{\lambda+2}$ και

$$P = 2x_1 \cdot 2x_2 = 4x_1 x_2 = 4 \frac{\lambda-1}{\lambda+2} = \frac{4(\lambda-1)}{\lambda+2}.$$

Η εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τα $2x_1, 2x_2$ είναι η $x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow$

$$x^2 + \frac{4\lambda}{\lambda+2}x + \frac{4(\lambda-1)}{\lambda+2} = 0 \Leftrightarrow (\lambda+2)x^2 + 4\lambda x + 4(\lambda-1) = 0$$

στ) $x_1 x_2 + \frac{3}{\lambda} = \frac{7\lambda}{\lambda^2 + 2\lambda} \Leftrightarrow \frac{\lambda-1}{\lambda+2} + \frac{3}{\lambda} = \frac{7\lambda}{\lambda(\lambda+2)} \Leftrightarrow$

$$\cancel{\lambda(\lambda+2)} \frac{\lambda-1}{\lambda+2} + \cancel{\lambda(\lambda+2)} \frac{3}{\lambda} = \cancel{\lambda(\lambda+2)} \frac{7\lambda}{\lambda(\lambda+2)} \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 - \lambda + 3\lambda + 6 = 7\lambda \Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \text{ απορρίπτεται ή } \lambda = 3$$