23η Άσκηση

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g, \varphi : \Delta = [1, +\infty)$, $\varphi(x) = x + \frac{1}{x}$

- Οι C_f, C_g τέμνονται στο A σημείο της $y = x$
- $f(2) = 2 = 4g(2)$
- Για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει $f(f(x)) + g(f(x)) = \varphi(x)$ **(1)**

(ε1) Να αποδείξετε ότι $f(1) + f(2) + f(3) \geq 3$

(ε2) Να υπολογίσετε την τιμή της f όταν $x = 1$

(ε3) Να αποδείξετε ότι το A είναι μοναδικό

(ε4) Να μελετήσετε τη συνάρτηση φ, ως προς τη μονοτονία

(ε5) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι $''1-1''$

(ε6) Να αποδείξετε ότι αν $f(\rho) = \rho$, τότε $\rho g(\rho) = 1, \rho \in \Delta$

- Αν οι f, g είναι γνησίως μονότονες και η f είναι συνεχής, τότε

(ε7) Να μελετήσετε τις f, g ως προς τη μονοτονία

(ε8) Να αποδείξετε ότι η g είναι συνεχής

(ε9) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

- Αν $f(x)g(x) = 1$, για κάθε $x \in \Delta$, τότε

(ε10) Να βρείτε τους τύπους των f, g

ενδεικτική απάντηση

(ε1) Να αποδείξετε ότι $f(1)+f(2)+f(3)\geq 3$

Επειδή η **(1)** ορίζεται για κάθε $x\in\Delta$, είναι $f(x)\geq 1$ για κάθε $x\in\Delta$, άρα $f(1)+f(2)+f(3)\geq 3$

(ε2) Να υπολογίσετε την τιμή της f όταν $x=1$

Το A ανήκει στην $y=x$ και στις C_f, C_g, άρα $A(\alpha,\alpha)$, $\alpha\geq 1$

$f(\alpha)=\alpha=g(\alpha)$, οπότε $f(f(\alpha))+g(f(\alpha))=\varphi(\alpha)$, οπότε

$\alpha+\alpha=\alpha+\frac{1}{\alpha}\Rightarrow\alpha^2=1\Rightarrow\alpha=1$, άρα $f(1)=1=g(1)$

(ε3) Να αποδείξετε ότι το A είναι μοναδικό

Η εξίσωση $\alpha+\alpha=\alpha+\frac{1}{\alpha}$ έχει μοναδική ρίζα στο Δ την $\alpha=1$ άρα το A είναι μοναδικό

(ε4) Να μελετήσετε τη συνάρτηση φ, ως προς τη μονοτονία

Έστω $x_1,x_2\in\Delta$ με $1\leq x_1<x_2$, $\varphi(x_2)-\varphi(x_1)=x_2+\frac{1}{x_2}-x_1-\frac{1}{x_1}$

$\varphi(x_2)-\varphi(x_1)=\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}(x_2x_1-1)>0\Rightarrow\varphi(x_2)>\varphi(x_1)\Rightarrow\varphi\nearrow,\ \Delta$

(ε5) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι $''1-1''$

Έστω $x_1,x_2\in\Delta$ με $f(x_2)=f(x_1)\Rightarrow f(f(x_2))=f(f(x_1))$ και

$g(f(x_2))=g(f(x_1))$, άρα $f(f(x_2))+g(f(x_2))=f(f(x_1))+g(f(x_1))$

Οπότε $\varphi(x_2)=\varphi(x_1)\Rightarrow x_2=x_1$, οπότε η f είναι $''1-1''$

(ε6) Να αποδείξετε ότι αν $f(\rho)=\rho$, τότε $\rho g(\rho)=1, \rho\in\Delta$

$f(f(x))+g(f(x))=\varphi(x)\overset{x=\rho}{\Rightarrow}f(f(\rho))+g(f(\rho))=\varphi(\rho)$, οπότε

$f(\rho)+g(\rho)=\varphi(\rho)\Rightarrow g(\rho)=\frac{1}{\rho}\Rightarrow \rho g(\rho)=1$

(ε7) Να μελετήσετε τις f, g ως προς τη μονοτονία

$f(1)=1<2=f(2)$ και f γνησίως μονότονη , άρα $f \nearrow$ στο Δ

$g(1)=1>1/2=g(2)$ και g γνησίως μονότονη , άρα $g \searrow$ στο Δ

(ε8) Να αποδείξετε ότι η g είναι συνεχής

$f(f(x))+g(f(x))=\varphi(x) \overset{x\to f^{-1}(x)}{\Rightarrow} f(x)+g(x)=\varphi(f^{-1}(x))$

$\varphi \nearrow$ και $f^{-1} \nearrow$, άρα $\varphi\circ f^{-1} \nearrow$, έστω $x_0\in\Delta$

Με $x>x_0 \Rightarrow \varphi(f^{-1}(x))>\varphi(f^{-1}(x_0)) \Rightarrow f(x)+g(x)>f(x_0)+g(x_0)$

$0>g(x)-g(x_0)>f(x_0)-f(x)$, κριτ. παρεμβολής $\lim\limits_{x\to x_0^+} g(x)=g(x_0)$

Όμοια $\lim\limits_{x\to x_0^-} g(x)=g(x_0)$, άρα η g είναι συνεχής

(ε9) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα , άρα $f(\Delta)=[f(1), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x))$

Έστω $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\alpha\in\mathbb{R}$, $B=\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x)) \overset{f(x)=u}{=} \lim\limits_{u\to\alpha} f(x)=f(\alpha)$

και $\Gamma=\lim\limits_{x\to+\infty} g(f(x)) \overset{f(x)=u}{=} \lim\limits_{u\to\alpha} g(x)=g(\alpha)$, οπότε

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(f(x))+g(f(x)))=f(\alpha)+g(\alpha)$, άτοπο γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$

Οπότε $f(\Delta)=[1,+\infty)$

(ε10) Να βρείτε τους τύπους των f, g

- Αν $f(x)g(x)=1$, για κάθε $x\in\Delta$, τότε

$f(x)g(x)=1 \overset{x\to f(x)}{\Rightarrow} f(f(x))g(f(x))=1 \Rightarrow g(f(x))=\frac{1}{f(f(x))}$, άρα

$$f(f(x))+\frac{1}{f(f(x))}=x+\frac{1}{x}\Rightarrow x(f(f(x)))^2+x=x^2f(f(x))+f(f(x))$$

$x(f(f(x)))^2-x^2f(f(x))+x-f(f(x))=0$, οπότε

$xf(f(x))(f(f(x))-x)-(f(f(x))-x)=0$, άρα

$(f(f(x))-x)(xf(f(x))-1)=0$, όμως $xf(f(x))-1>0$ για κάθε $x>1$

Άρα $f(f(x))-x=0\Rightarrow f(f(x))=x$ και $f\nearrow$ οπότε $f(x)=x$

και $x+g(x)=x+\frac{1}{x}\Rightarrow g(x)=\frac{1}{x}$