357ο.ΘΕΜΑ

Έστω οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, g φθίνουσα και συνεχής στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $g(f(x))-f(x)=1-x$ (1)

Να αποδείξετε ότι

(ε 1) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho\in\mathbb{R}$, ώστε $g(\rho)=\rho$

(ε 2) Η συνάρτηση f είναι $''1-1''$

(ε 3) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα

(ε 4) Η συνάρτηση f είναι συνεχής

(ε 5) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

- Αν $f(x)=f^{-1}(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε

(ε 6) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g

(ε 7) Να αποδείξετε ότι $E(\Omega)=0,5\tau\mu$ όπου $E(\Omega)$ το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις C_f, C_g και τον άξονα $y'y$

ενδεικτική απάντηση

(ε 1) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho\in\mathbb{R}$, ώστε $g(\rho)=\rho$

Από τη σχέση (1) $\overset{x=1}{\Rightarrow} g(f(1))=f(1)$, άρα $\rho=f(1)$

(ε 2) Η συνάρτηση f είναι $''1-1''$

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow g(f(x_1))=g(f(x_2))$, άρα

$\Rightarrow g(f(x_1))-f(x_1)=g(f(x_2))-f(x_2)\overset{(1)}{\Rightarrow} x_1=x_2$, οπότε

η συνάρτηση f είναι $''1-1''$

(ε 3) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Από τη σχέση (1) $\overset{x\to f^{-1}(x)}{\Rightarrow} g(x)-x=1-f^{-1}(x)$, επομένως

$f^{-1}(x)=x+1-g(x)$, άρα η f^{-1} είναι συνεχής ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων. Η f^{-1} είναι συνεχής και $''1-1''$, άρα είναι γνησίως μονότονη **(με απόδειξη)** , οπότε και η f είναι γνησίως μονότονη **(με απόδειξη)**

Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα τότε η $-f$ είναι γνησίως αύξουσα και η $g\circ f$ είναι αύξουσα όποτε η $g\circ f - f$ είναι γνησίως αύξουσα άτοπο , λόγω της **(1)** , γιατί η $1-x$ είναι γνησίως φθίνουσα

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα

(ε 4) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

Η f είναι γνησίως αύξουσα και η g είναι φθίνουσα , επομένως η $g\circ f$ είναι φθίνουσα και $g(f(x))-f(x)=1-x$ **(1)**.Έστω $\alpha\in\mathbb{R}$ με $x>\alpha$, $g(f(x))\le g(f(\alpha))\Rightarrow f(x)+1-x\le f(\alpha)+1-\alpha$, άρα $f(x)-f(\alpha)\le x-\alpha$ και $f(x)>f(\alpha)\Rightarrow f(x)-f(\alpha)>0$, οπότε $0<f(x)-f(\alpha)\le x-\alpha$, κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)=f(\alpha)$

Όμοια $\lim\limits_{x\to\alpha^-} f(x)=f(\alpha)=\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$, άρα f συνεχής στο α οπότε f συνεχής στο $\mathbb{R}$.

(ε 5) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής άρα το σύνολο τιμών της είναι $f(\mathbb{R})=(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x))$

Έστω $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\beta\in\mathbb{R}$ και $A=\lim\limits_{x\to-\infty} g(f(x))\overset{f(x)=u}{=}\lim\limits_{u\to\beta} g(u)$

άρα $A=\lim\limits_{u\to\beta} g(u)\underset{\text{συνχης}}{\overset{g}{=}} g(\beta)$, οπότε $\lim\limits_{x\to-\infty}(g(f(x))-f(x)=g(\beta)-\beta$

άτοπο, λόγω της **(1)** , γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-x)=+\infty$, άρα $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

Όμοια $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, οπότε $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}=A_{f^{-1}}=f^{-1}(\mathbb{R})$

Χ.ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ

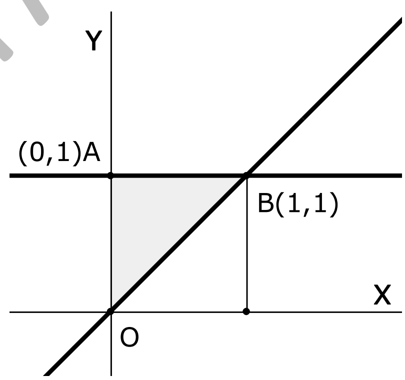
- Αν $f(x)=f^{-1}(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε

(ε 6) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g

$g(f(x))=1-x+f(x)$ και $g(x)=x+1-f^{-1}(x)$ οπότε
$g(x)=x+1-f(x)$, αντικατάσταση του x με $f(x)$ οπότε
$g(f(x))=f(x)+1-f(f(x))$, άρα $1-x+f(x)=f(x)+1-f(f(x))$
οπότε $f(f(x))=x$, οπότε $f(x)=x$
Πράγματι , αν υπάρχει $\rho\in\mathbb{R}$ ώστε $f(\rho)<\rho$ (ή $f(\rho)>\rho$)
τότε $f(f(\rho))<f(\rho)\Rightarrow\rho<f(\rho)$ (ή $f(f(\rho))>f(\rho)\Rightarrow\rho>f(\rho)$)
άτοπο , άρα $f(x)=x$. Οπότε $g(x)=1-x+x\Rightarrow g(x)=1$

(ε 7) Να αποδείξετε ότι $E(\Omega)=0,5\tau\mu$ όπου $E(\Omega)$ το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις C_f, C_g και τον άξονα $y'y$

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι
το εμβαδόν του τριγώνου OAB
Άρα $E(\Omega)=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=0,5\tau\mu$



Χ.ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ