ΘΕΜΑ Α

(α1) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$.Αν G είναι μια παράγουσα

της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta}\mathrm{f}(\mathrm{t})\mathrm{dt}=\mathrm{G}(\beta)-\mathrm{G}(\alpha)$ **.(μονάδες 09)**

(α2) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ , τότε

Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ και πότε λέμε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ **(μονάδες 06)**

(α3) Να αντιγράψετε στην κόλλα σας τον αριθμό τις πρότασης και δίπλα το γράμμα **Σ** , αν η πρόταση είναι σωστή **ή** το γράμμα **Λ ,** αν η πρόταση είναι λάθος

(1) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $\mathrm{f}(x)\geq 0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$

τότε $\int_{\alpha}^{\beta}\mathrm{f}(x)\mathrm{d}x>0$ **(μονάδες 02)**

(2) Το άθροισμα δυο μη συνεχών συναρτήσεων με το ίδιο πεδίο ορισμού είναι πάντα μη συνεχής συνάρτηση **(μονάδες 02)**

(3) Όταν μια συνάρτηση f δεν είναι γνησίως αύξουσα σ'ένα διάστημα Δ τότε για κάθε $\alpha,\beta\in\Delta$, με $\alpha<\beta$ ισχύει ότι $\mathrm{f}(\alpha)\geq\mathrm{f}(\beta)$ **(μονάδες 02)**

(4) Οι συναρτήσεις f , g έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και η συνάρτηση $\mathrm{f}\cdot\mathrm{g}$ είναι παραγωγίσιμη και έχει τοπικό ακρότατο στο εσωτερικό σημείο α του A τότε $\mathrm{f}'(\alpha)=0$ ή $\mathrm{g}'(\alpha)=0$ **(μονάδες 02)**

(5) Η εικόνα ενός διαστήματος μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης είναι διάστημα **(μονάδες 02)**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f , με $\mathrm{f}(x)=2x^2+x+\ln x$

(β1) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f , ως προς τη μονοτονία , την κυρτότητα να βρείτε το σύνολο τιμών της και να γίνει πρόχειρη γραφική παράσταση **(μονάδες 12)** και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι

(β2) Για κάθε πραγματικό αριθμό x υπάρχει μοναδικός θετικός αριθμός ρ ώστε $\mathrm{f}(\rho)=x$ **(μονάδες 03)**

(β3) Η εξίσωση $4x+\dfrac{1}{x}=2\mathrm{e}+2+\dfrac{1}{\mathrm{e}-1}$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα **(μονάδες 04)**

(β4) $2\mathrm{f}(x)+3+\ln 4\leq 10x$, για κάθε $x\in(0,\ 1/2]$ και $2\mathrm{f}(x)+3+\ln 4\geq 10x$ για κάθε $x\in[1/2,\ +\infty)$ **(μονάδες 06)**

Κωνσταντίνου

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση g , με $g(x)=\begin{cases} 5e^x-x^3-5x+1 & ,x\le 0 \\ 6e^x-2x^3+x^2-6x & ,x>0 \end{cases}$ και η συνάρτηση f

με $f(x)=\begin{cases} e^x-x-1 & ,x\le 0 \\ x^3-x^2 & ,x>0 \end{cases}$. Να αποδείξετε ότι

(γ1) Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (μονάδες 06)

(γ2) Η συνάρτηση f έχει συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$ (μονάδες 04)

(γ3) $4E(\Omega)<3$, όπου $E(\Omega)$ το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από την γραφική παράσταση $C_{f'}$ της συνάρτησης f' ,τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=-1$ και $x=1$ (μονάδες 04)

(γ4) Η συνάρτηση F, με $F(x)=f(x)+g(x)$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ (μονάδες 06)

(γ5) Η εξίσωση $F(x)=\alpha$ έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες (μονάδες 05)

ΘΕΜΑ Δ.

Δίνονται η συνάρτηση f με συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$, και η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

• $g(0)=1$, $g(1)=0$ **(1)** • $f(0)(f(1)-1)\ne 0$ **(2)** • $f'(x)\ne 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ **(3)**

$g(x)=f^4(x)-f^3(x)+2f^2(x)-3f(x)+1$ **(4)** , για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι

(δ1) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho\in(0,1)$, ώστε $g(\rho)=\rho$ (μονάδες 05)

(δ2) Υπάρχουν δύο τουλάχιστον $\xi_1,\xi_2\in(0,1)$, ώστε $g'(\xi_1)g'(\xi_2)=1$ (μονάδες 05)

(δ3) $0<f(1)<1<f(0)<2$ (μονάδες 05)

(δ4) Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ (μονάδες 04)

(δ5) Αν επιπλέον ισχύει $4f(1)=3$, τότε $g(x)\ge 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (μονάδες 06)

Κωνσταντίνου