

ΘΕΜΑ Α

- (α1) Να αποδείξετε ότι $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$, για κάθε $x \neq 0$. (μονάδες 09)
- (α2) Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία χρησιμοποιώντας πρόχειρη γραφική παράσταση (μονάδες 06)
- (α3) Να αντιγράψετε στην κόλλα σας τον αριθμό τις πρότασης και δίπλα το γράμμα Σ, αν η πρόταση είναι σωστή ή το γράμμα Λ, αν η πρόταση είναι λάθος
- (1) Η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} . Τότε μια τουλάχιστον από τις συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} (μονάδες 02)
- (2) Όταν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο \mathbb{R} , τότε είναι και παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} . (μονάδες 02)
- (3) Όταν μια συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , τότε δεν είναι συνεχής στο \mathbb{R} . (μονάδες 02)
- (4) Όταν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, τότε η συνάρτηση παράγωγος δεν είναι συνεχής (μονάδες 02)
- (5) Για κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση f , ισχύει ότι $A_{f'} \subseteq A_f$. (μονάδες 02)

ΘΕΜΑ Β

Έστω οι συναρτήσεις f, g , με $f(x) = e^x \ln(x^2 + 1)$ και $g(x) = \frac{e^{x^2} - e^{-x^2}}{e^{x^2} + e^{-x^2}}$

- (β1) Να βρείτε τους τύπους των συναρτήσεων f', g' (μονάδες 06)
και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι
- (β2) Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g δεν είναι κάτω από τον άξονα $x'x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (μονάδες 04)
- (β3) Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μόνο μια ρίζα ρ , η οποία είναι και μοναδική ρίζα της εξίσωσης $g(x) = 0$ (μονάδες 04)
- (β4) Ο άξονας $x'x$ εφάπτεται στις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g στο κοινό τους σημείο. (μονάδες 06)
- (β5) Η ευθεία $y = -x + 1$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, 1)$ (μονάδες 05)

ΘΕΜΑ Γ.

Δίνονται η συνάρτηση g και η συνάρτηση f , f παραγωγίσιμη στο διάστημα $\Delta = [1,5]$.

Το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι $f(\Delta)$ και η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης

f υπερβαίνει το 2. Επιπλέον δίνεται ότι $2f'(x) = \frac{1+4f'(x)}{f(x)}$, για κάθε $x \in \Delta$

A Να αποδείξετε ότι

(γα1) $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \Delta$ και ότι η συνάρτηση f' είναι συνεχής (μονάδες 04)

(γα2) $f(\beta) > f(\alpha)$, για κάθε $\alpha, \beta \in \Delta$, με $\alpha < \beta$ (μονάδες 04)

(γα3) Υπάρχει $x_0 \in \Delta$, τέτοιο ώστε: $16f'(x_0) = 7f'(1) + 9f'(5)$ (μονάδες 07)

B Αν $g(x) = f^2(x) - 4f(x) - x$, για κάθε $x \in \Delta$ και $f(5) = 5$, τότε

(γβ1) Να βρείτε το $g(5)$ και να αποδείξετε $g'(x) = 0$ (μονάδες 05)

(γβ2) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x+4} + 2$ (μονάδες 05)

ΘΕΜΑ Δ.

Δίνεται η συνάρτηση f , δυο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$

ισχύει ότι: $\frac{\ln(f(x))}{x} = x + 2$

(δ1) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f (μονάδες 05)

(δ2) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών (η) και (ϵ) οι οποίες εφάπτονται στη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f στα σημεία $N(-2, f(-2))$ και $M(0, f(0))$ αντίστοιχα και να βρείτε το σημείο τομής Σ των $(\epsilon), (\eta)$ (μονάδες 07)

(δ3) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων τις ευθείες $(\epsilon), (\eta)$ (μονάδες 03)

(δ4) Αν E_x το εμβαδόν του χωρίου που οριοθετείται από τις ευθείες $(\epsilon), (\eta)$ και τον άξονα $x'x$ και E_y το εμβαδόν του χωρίου που οριοθετείται από τις ευθείες $(\epsilon), (\eta)$ και τον άξονα $y'y$, τότε να αποδείξετε $E_y = 4E_x$. (μονάδες 05)

(δ3) Να αποδείξετε ότι: Η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f και η ευθεία (ϵ) δεν έχουν άλλο κοινό σημείο (μονάδες 05)