380ο.ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

- f' συνεχής στο $x_0=0$ και $f'(0)>-1$
- $f'(x)f^3(x)+x^2f(x)=2x^3$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $f'(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

(ε 1) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα

(ε 2) Να υπολογίσετε την τιμή της f' στο $x_0=0$

(ε 3) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f

(ε 4) Να μελετήσετε το πρόσημο της συνάρτησης f

(ε 5) Αν επιπλέον ισχύει $f(x)\geq x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f

ενδεικτική απάντηση

(ε 1) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα

Από **(1)** $\overset{x=0}{\Rightarrow} f^3(0)f'(0)=0 \overset{f'(x)\neq 0}{\Rightarrow} f(0)=0$. Έστω $\rho\in\mathbb{R}-\{0\}$,ώστε

$f(\rho)=0 \underset{(1)}{\overset{x=\rho}{\Rightarrow}} 2\rho^3=0\Rightarrow\rho=0$, άτοπο . Άρα η $x=0$ μοναδική ρίζα

ή

$f(\rho)=0=f(0)\overset{\text{Rolle}}{\Rightarrow} f'(\xi)=0$, άτοπο Άρα η $x=0$ μοναδική ρίζα

Οπότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα

$\Delta 1=(-\infty,0)$ και $\Delta 2=(0,+\infty)$

(ε 2) Να υπολογίσετε την τιμή της f' στο $x_0=0$

$$f'(x)f^3(x)+x^2f(x)=2x^3 \overset{x\neq 0}{\Rightarrow} f'(x)=2\left(\frac{x}{f(x)}\right)^3-\frac{x}{f(x)}\,..$$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{f(x)}\overset{\text{dlh}}{=}\frac{2}{f'(0)}$, και $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left[2\left(\frac{x}{f(x)}\right)^3-\frac{x}{f(x)}\right]$

f' συνεχής στο $x_0=0\Rightarrow\quad f'(0)=\frac{2}{\left(f'(0)\right)^3}-\frac{1}{f'(0)}\Rightarrow$

$\Rightarrow(f'(0))^4+(f'(0))^2-2=0$

$\Rightarrow(f'(0)-1)[(f'(0))^3+(f'(0))^2+f'(0)+2]=0$

$\Rightarrow f'(0)=1$ **ή** $(f'(0))^3+(f'(0))^2+f'(0)+2=0$

Έστω $(f'(0))^3+(f'(0))^2+f'(0)+2=0$

Θεωρούμε συνάρτηση g , με $g(x)=x^3+x^2+x+2$, $g(f'(0))=0$

$g(-2)=-4$ και $g(-1)=1$, $g(-2)g(-1)<0$, οπότε από το θεώρημα

Bolzano υπάρχει $\rho\in(-2,-1)$, ώστε $g(f'(0))=0=g(\rho)$

$g'(x)=3x^2+x+1>0\Rightarrow g\nearrow$, ρ μοναδικό και $g(f'(0))=0=g(\rho)$

Άρα $f'(0)=\rho\in(-2,-1)$, άτοπο , οπότε $f'(0)=1$

(ε3) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f

$\mathrm{f}'(0)=1$, f' συνεχής στο $\mathbb{R}$, $\mathrm{f}'(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$, οπότε $\mathrm{f}'(x)>0$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

(ε4) Να μελετήσετε το πρόσημο της συνάρτησης f

Με $x>0\Rightarrow \mathrm{f}(x)>0$, ενώ με $x<0\Rightarrow \mathrm{f}(x)<0$

(ε5) Αν $\mathrm{f}(x)\geq x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f

$$\mathrm{f}'(x)\mathrm{f}^3(x)+x^2\mathrm{f}(x)=2x^3\overset{x\neq 0}{\Rightarrow}\mathrm{f}'(x)=2\left(\frac{x}{\mathrm{f}(x)}\right)^3-\left(\frac{x}{\mathrm{f}(x)}\right)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{f}'(x)-1=\left(\frac{x}{\mathrm{f}(x)}\right)^3-1+\left(\frac{x}{\mathrm{f}(x)}\right)^2\left(\frac{x}{\mathrm{f}(x)}-1\right)$$

$$\Rightarrow \mathrm{f}'(x)-1=\left(\frac{x}{\mathrm{f}(x)}-1\right)\left[2\left(\frac{x}{\mathrm{f}(x)}\right)^2+\frac{x}{\mathrm{f}(x)}+1\right]$$ όμως για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$$2\left(\frac{x}{\mathrm{f}(x)}\right)^2+\frac{x}{\mathrm{f}(x)}+1>0$$

Είναι $\mathrm{f}(x)\geq x$ **(1)**

- Με $x>0\Rightarrow \frac{x}{\mathrm{f}(x)}\leq 1\Rightarrow \frac{x}{\mathrm{f}(x)}-1\leq 0$

Οπότε $\mathrm{f}'(x)-1\leq 0\Rightarrow(\mathrm{f}(x)-x)'\leq 0$, έστω g, με $\mathrm{g}(x)=\mathrm{f}(x)-x$

g συνεχής στο $\mathbb{R}$, $\mathrm{g}(0)=0$ και $\mathrm{g}\searrow$ στο $[0,+\infty)$, άρα $\mathrm{g}(x)\leq 0$

οπότε $\mathrm{f}(x)\leq x\overset{(1)}{\Rightarrow}\mathrm{f}(x)=x$, για κάθε $x\in[0,+\infty)$

- Με $x<0\Rightarrow \frac{x}{\mathrm{f}(x)}\geq 1\Rightarrow \frac{x}{\mathrm{f}(x)}-1\geq 0$

Οπότε $f'(x)-1\geq 0 \Rightarrow (f(x)-x)'\geq 0$, έστω φ, με $\varphi(x)=f(x)-x$

φ συνεχής στο $\mathbb{R}$, $\varphi(0)=0$ και $\varphi \nearrow$ στο $(-\infty,0]$, άρα $\varphi(x)\leq 0$

οπότε $f(x)\leq x \overset{(1)}{\Rightarrow} f(x)=x$, για κάθε $x\in(-\infty,0]$

Τελικά $f(x)=x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$