379ο.ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

- f' συνεχής στο $x_0=0$
- $f^3(x)+x^2f'(x)f(x)=2x^3$ **(1)**, για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $f'(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

(ε1) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα

(ε2) Να υπολογίσετε την τιμή της f' στο $x_0=0$

(ε3) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f

(ε4) Να μελετήσετε το πρόσημο της συνάρτησης f

(ε5) Αν $f(x)\geq x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f

ενδεικτική απάντηση

(ε 1) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα

Από **(1)** $\overset{x=0}{\Rightarrow} f^3(0)=0 \Rightarrow f(0)=0$. Έστω $\rho \in \mathbb{R}-\{0\}$,ώστε

$f(\rho)=0 \underset{(1)}{\overset{x=\rho}{\Rightarrow}} 2\rho^3=0 \Rightarrow \rho=0$, άτοπο . Άρα η $x=0$ μοναδική ρίζα

ή

$f(\rho)=0=f(0) \overset{\text{Rolle}}{\Rightarrow} f'(\xi)=0$, άτοπο Άρα η $x=0$ μοναδική ρίζα

Οπότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα

$\Delta 1=(-\infty,0)$ και $\Delta 2=(0,+\infty)$

Οπότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα

$\Delta 1=(-\infty,0)$ και $\Delta 2=(0,+\infty)$

(ε 2) Να υπολογίσετε την τιμή της f' στο $x_0=0$

Από **(1)** $\overset{x\neq 0}{\Rightarrow} f'(x)=\frac{2x}{f(x)}-\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2$. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{f(x)} \overset{\text{dlh}}{=} \frac{2}{f'(0)}$ και

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} \overset{\text{dlh}}{=} f'(0)$, f' συνεχής στο $x_0=0 \Rightarrow f'(0)=\frac{2}{f'(0)}-(f'(0))^2$

άρα $f'(0)=1$, f' συνεχής στο $\mathbb{R}$, $f'(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$, οπότε $f'(x)>0$

(ε 3) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f

$f'(x)>0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

(ε4) Να μελετήσετε το πρόσημο της συνάρτησης f

Με $x>0 \Rightarrow \mathrm{f}(x)>0$, ενώ με $x<0 \Rightarrow \mathrm{f}(x)<0$

(ε5) Αν $\mathrm{f}(x) \geq x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f

$$\mathrm{f}^3(x)+x^2\mathrm{f}'(x)\mathrm{f}(x)=2x^3 \Leftrightarrow \mathrm{f}^3(x)-x^3=x^3-x^2\mathrm{f}'(x)\mathrm{f}(x)$$

$$(\mathrm{f}(x)-x)(\mathrm{f}^2(x)+x\mathrm{f}(x)+x^2)=x^2(x-\mathrm{f}'(x)\mathrm{f}(x)),\ x^2 \geq 0$$

Όμως $\mathrm{f}(x)-x \geq 0$ και $\mathrm{f}^2(x)+x\mathrm{f}(x)+x^2 \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

άρα $x-\mathrm{f}'(x)\mathrm{f}(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2\mathrm{f}'(x)\mathrm{f}(x)-2x \leq 0 \Rightarrow [\mathrm{f}^2(x)-x^2]' \leq 0$

Οπότε η συνάρτηση g, με $\mathrm{g}(x)=\mathrm{f}^2(x)-x^2$ είναι $\searrow$ στο $\mathbb{R}$

- Με $x \geq 0$ είναι $\mathrm{f}(x) \geq 0$ και $\mathrm{g}(x) \leq 0$, οπότε $\mathrm{f}^2(x) \leq x^2$
  άρα $\mathrm{f}(x) \leq x \Rightarrow \mathrm{f}(x)=x$
- Με $x \leq 0$ είναι $\mathrm{f}(x) \leq 0$ και $\mathrm{g}(x) \geq 0$, οπότε $\mathrm{f}^2(x) \geq x^2$
  άρα $-\mathrm{f}(x) \geq -x \Rightarrow \mathrm{f}(x) \leq x \Rightarrow \mathrm{f}(x)=x$

Τελικά $\mathrm{f}(x)=x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$