

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΤΑΞΗ : Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΜΗΜΑ :

ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΚΑΘΗΓΗΤΕΣ : ΜΥΛΩΝΙΔΗΣ

ΟΝΟΜΑ : _____

ΒΑΘΜΟΣ : _____

ΚΥΡΙΑΚΗ 2020
ΤΑΞΗ : Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΜΗΜΑ :
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν

- οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και
 - $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,
- τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x) = g(x) + c$

Μονάδες 6

A2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = a^x$, $a > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και ισχύει $f'(x) = a^x \ln a$, δηλαδή: $(a^x)' = a^x \ln a$.

Μονάδες 5

A3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

«Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ τότε υποχρεωτικά ισχύει $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ ».

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **A**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)
Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

Μονάδες 10

- i) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$ δεν έχει άλλο κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση της f .
- ii) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο ανοικτό (α, β) και υπάρχει ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$, τότε ισχύει πάντα ότι $f(\alpha) = f(\beta)$.
- iii) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

- iv) Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$.
- v) Κάθε συνάρτηση f , για την οποία ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, είναι σταθερή στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

ΘΕΜΑ Β

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(0) = 1$ η οποία είναι συνεχής και ισχύει

$$f^2(x) = 1 - 2xf(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

A) Να δείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x, x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 7

B) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \left[(f(x) + x - 1) \eta \mu \frac{1}{x} \right]$

Μονάδες 5

Γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f που είναι παράλληλη στην ευθεία $x + y - 2020 = 0$

Μονάδες 6

Δ) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (-1, 1)$ ώστε $f'(\xi) + 2\xi f(\xi) = \xi^2 f'(\xi)$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x}{x-1} & 0 < x \neq 1 \\ \alpha & x = 1 \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}.$

B1. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ να δείξετε ότι $\alpha = 1$.

Μονάδες 4

B2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1, f(1))$.

Μονάδες 5

B3. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Μονάδες 5

B4. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f (Μονάδες 3) και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $f\left(f(x) + \frac{1}{\pi}\right) = 1$, έχει ακριβώς μια ρίζα. (Μονάδες 3)

Μονάδες 6

B5. Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x-1)}{f(x^2) - f(x)}$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(1) = 0$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $xf(x) = 1 - x^2 f'(x)$ για κάθε $x > 0$

A) Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$

Μονάδες 7

B) Αν $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$ με $\alpha < \beta$ και ισχύει $\alpha^\beta = \beta^\alpha$ να δείξετε ότι $1 < \alpha < e < \beta$

Μονάδες 6

Γ) Αν x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) ρίζες της εξίσωσης $3f(x) = 1$ να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $3f'(x_0) + 3f(x_0) = 1$

Μονάδες 6

Δ) Να δείξετε ότι $(x+1)f(x+1) - xf(x) < \frac{1}{x}$ για κάθε $x > 0$

Μονάδες 6

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
2. Να απαντήσετε **στην κόλλα σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
3. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
4. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.