ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: ………………………………………
ΤΜΗΜΑ: ……………………..

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΘΕΜΑΤΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ 2018 (2ο ΓΕΛ ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗΣ)
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 4 ΜΑΪΟΥ 2018

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ . Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο χ του Δ , τότε να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Μονάδες 8

Β. Τί λέγεται τοπικό ελάχιστο συνάρτησης f.

Μονάδες 3

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας , δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή ή Λάθος , αν η πρόταση είναι λανθασμένη .

i) Αν για τη συνεχή συνάρτηση f στο διάστημα [α,β] ισχύει : $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=0$ τότε η συνάρτηση f έχει τουλάχιστον μια ρίζα .

ii) Αν η f είναι συνεχής στο α τότε: $\int_{a}^{a} f(x)dx=0$.

iii) Αν για τη συνεχή συνάρτηση f στο διάστημα [α, β] ισχύει : $\int_{\alpha}^{\beta} f^{2018}(x)dx=0$ τότε $f(x)=0$ για κάθε χ∈ [α,β].

Μονάδες 6

Δ. Να χαρακτηρίσετε και αιτιολογήσετε τις προτάσεις που ακολουθούν.
i) Αν μία συνάρτηση είναι 1-1 τότε είναι γνησίως μονότονη. (Μον2 και 2)
ii) Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=0$ και οι f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 με $f'(x_0)=g'(x_0)\neq 0$ τότε $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. (Μον2 και 2)

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 2^o

Έστω η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\Re$ με τύπο $f(x)=\sqrt{x-1-\ln x+a(x-1)}$, $\alpha\in\Re$

i) Δείξτε ότι α=0.

ii) Βρείτε την μονοτονία της συνάρτησης και τα ακρότατα.

iii) Αν $f''(x)=\dfrac{-x^2+4x-2\ln x-3}{4x^2\sqrt{(x-\ln x-1)^3}}$ δείξτε ότι η f στρέφει τα κοίλα άνω στο (0,1] και τα κοίλα κάτω στο $[1,+\infty)$.

iv) Βρείτε τα σημεία τομής της C_f f με τους άξονες και τις ασύμπτωτες.

v) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της C_f .

Μονάδες 25 (5x5)

ΘΕΜΑ 3^o

Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ με $f(x)=x^x$.

i) Να βρείτε την μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης. (Μον. 4)

ii) Δείξτε ότι η f είναι κυρτή και να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της C_f στο $x_0=1$. (Μον. 4)

iii) Να λυθεί η εξίσωση $x^x=256$ (Μον. 4)

iv) Δείξτε ότι $\int_1^{2018} x^x dx > 2017e^{-\frac{1}{e}}$. (Μον. 3)

v) Δείξτε ότι $\int_{\frac{2}{e}}^{2} x^x dx > \dfrac{2e^2-2}{e^2}$. (Μον. 3)

vi) Να λυθεί η εξίσωση $2f(\dfrac{\ln x^e+1}{e})+3f(\dfrac{e^x-e+1}{e})=\dfrac{5}{e^{\frac{1}{e}}}$. (Μον. 3)

vii) Ένα υλικό σημείο M(x(t),y(t)), t σε ώρες και $t\in[\frac{1}{e^{100}},+\infty)$ κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , με $x'(t)=1\ m/h$ και τη χρονική στιγμή t=1 διέρχεται από το σημείο A(1,1). Να βρείτε τη χρονική στιγμή $t_0\in[\frac{1}{e^{100}},+\infty)$ που το κινητό έχει τη ελάχιστη τεταγμένη. (Μον. 4)

Μονάδες 25

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Έστω συνεχής συνάρτηση $g:\Re \to \mathbb{Z}$ (Δηλαδή οι τιμές της συνάρτησης μπορεί να είναι μόνον ακέραιοι) με g (2018)=1. Αν $f(x)=e^x+x^3+g(x)$

i) Δείξτε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή και ότι g(x)=1 για κάθε χ πραγματικό.

ii) Δείξτε ότι η f αντιστρέφεται και βρείτε το πεδίο ορισμού της.

iii) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=0$ και την εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ σε σημείο της με τετμημένη $x_1=2$, με δεδομένο ότι η δεύτερη υπάρχει και δεν είναι κατακόρυφη ευθεία.

iv) Αν $h(x)=[e^{f^{-1}(x)}+(f^{-1})^3(\mathrm{x})]^2+\ln(x-1)$ να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ C_h, χ΄χ, χ=2 και χ=4. Αν επιπλέον η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη και η παράγωγος της αντίστροφης συνεχής να υπολογίσετε το $\int_2^{e+2}\frac{1}{e^{f^{-1}(x)}+3(f^{-1})^2(x)}dx$.

Μονάδες 16 (4χ4)

Β. Αν η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\Re$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και $\frac{f(3)-f(2)}{f(2)-f(1)}<0$ και $\frac{f(3)-f(2)}{f(4)-f(3)}<0$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο [2,3] δείξτε ότι η Cf' έχει οριζόντια εφαπτομένη.

Μονάδες 9

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Να μην αντιγράψετε τα θέματα.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με τις απαντήσεις και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ ΣΤΙΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΚΑΙ ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ ΣΤΟ ΕΠΟΜΕΝΟ ΣΤΑΔΙΟ ΤΗΣ ΖΩΗΣ ΣΑΣ.

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Σχολικό βιβλίο σελ 133.
Β. Σχολικό βιβλίο σελ 141.
Γ. Σ, Σ, Σ.

Δ1. ι) Λάθος Πράγματι αν $f(x)=\dfrac{1}{x}$ τότε αυτή είναι 1-1 αφού για $x_1, x_2 \in \Re^*$ με $f(x_1)=f(x_2)$ προκύπτει $x_1=x_2$ και ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ δεν είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της αφού
$x_1<0<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$
ιι) Λάθος γιατί θα έπρεπε να είναι παραγωγίσιμες κοντά στο x_0 (σε περιοχή του x_0) .

ΘΕΜΑ 2ο

i) Αφού η f έχει πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$ θα ισχύει $\chi-1-lnx+\alpha(x-1)\geq 0$ οπότε αν $h(x)=\chi-1-lnx+\alpha(x-1)\geq 0=h(1)$ με $\chi\in(0,+\infty)$ τότε

$$h'(x)=\chi-\frac{1}{x}+\alpha$$

Η h στο $x_0=1$ εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού παρουσιάζει ακρότατο και είναι παραγωγίσιμη από θεώρημα Fermat $h'(1)=0 \Leftrightarrow \alpha=0$. Συνεπώς $f(x)=\sqrt{x-1-\ln x}$.

ii) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πράξεις και σύνθεση παραγωγίσιμων στο $(0,1)\cup(1,+\infty)$ $\quad f'(x)=\dfrac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{x-1-\ln x}}=\dfrac{x-1}{x\sqrt{x-1-\ln x}}$.

Στο (0,1) είναι $f'(x)<0$ η f είναι συνεχής στο (0,1] άρα η f γνησίως φθίνουσα στο(0,1]
Στο $(1,+\infty$) είναι $f'(x)>0$ η f είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$ άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$ οπότε στο $x_0=1$ έχει ολικό ελάχιστο το $f(1)=0$.

iii) $f''(x)=\dfrac{-x^2+4x-2\ln x-3}{4x^2\sqrt{(x-\ln x-1)^3}}$ Αν $k(x)=-x^2+4x-2\ln x-3, x>0$ τότε

$k'(x)=-2x+4-\dfrac{2}{x}=-2\dfrac{(x-1)^2}{x}\leq 0$ η ισότητα ισχύει μόνον για χ=1 όπου η k είναι συνεχής άρα η k είναι γνησίως φθίνουσα άρα για χ>1 η $k(x)<k(1)=0$ και για 0<χ<1 $k(x)>k(1)=0$ Το πρόσημο της k είναι και πρόσημο της f'' και επειδή η f'' συνεχής η f στρέφει τα κοίλα άνω στο(0,1] και τα κοίλα κάτω στο $[1,+\infty)$.

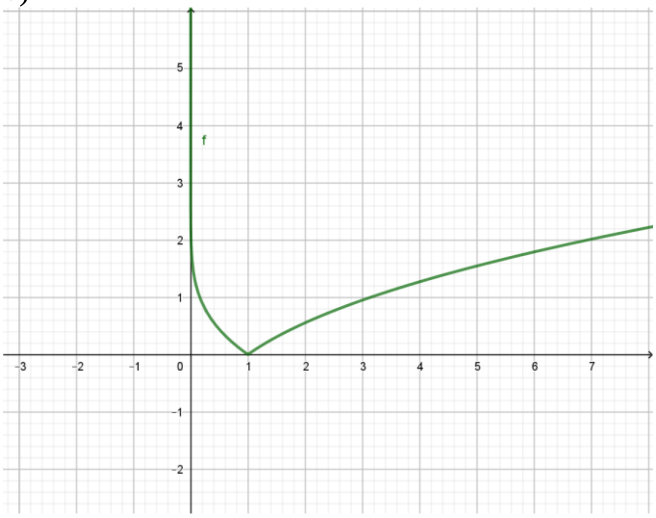
iv) Αφού χ>0 η Cf δεν τέμνει τον ψ΄ψ άξονα. Ακόμη $f(x)=0 \Leftrightarrow \mathrm{x}=1$ αφού από την μονοτονία για $\mathrm{x}\neq 1$ και x>0 είναι f(x)>0.
Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ άρα εξετάζουμε αν έχει κατακόρυφη εφαπτομένη μόνο στο $x_0=0$ όμως $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x-1-\ln x}=+\infty$ άρα η χ=0 κατακόρυφη ασύμπτωτη. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x-1-\ln x}=+\infty$ αφού

$$\lim_{x\to+\infty}(x-1-\ln x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x\left(1-\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)\right)=+\infty \text{ και } \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right)\underset{DL}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

Άρα δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x-1-\ln x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x-1-\ln x}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{\frac{\ln x}{x}}{x}}=0$$ άρα δεν έχει και πλάγιες ασύμπτωτες.

v)



ΘΕΜΑ 3º

i) $f(x)=x^x=e^{x\ln x}$ άρα η f είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις και σύνθεση παραγωγίσιμων.

$$f(x)=x^x \Leftrightarrow \ln f(x)=\ln x^x \Leftrightarrow \ln f(x)=x\ln x \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=\ln x+1.$$

Άρα $f'(x)=f(x)(\ln x+1)$ Άρα $f'(x)>0 \Leftrightarrow \ln x+1>0 \Leftrightarrow x>\frac{1}{e}$ και

$f'(x)<0 \Leftrightarrow \ln x+1<0 \Leftrightarrow x<\frac{1}{e}$ και επειδή η f είναι συνεχής ως πράξεις και σύνθεση συνεχών (αφού $f(x)=x^x=e^{x\ln x}$) η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,\frac{1}{e}]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\frac{1}{e},+\infty)$ και έχει ολικό ελάχιστο για χ=$\frac{1}{e}$ το $f(\frac{1}{e})=\mathrm{e}^{-\frac{1}{e}}$ και μάλιστα για χ>0 και χ≠ $\frac{1}{e}$ θα είναι $f(x)>e^{-\frac{1}{e}}$.

ii) Η f' είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων και

$f''(x)=f(x)(\ln x+1)^2+\frac{f(x)}{x}>0$ άρα η f στρέφει τα κοίλα άνω. Η εφαπτομένη της C f στο $x_0=1$ είναι ψ=χ.

ιιι) Η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_1=(0,\frac{1}{e}]$ άρα $f(A_1)=[f(\frac{1}{e}),\lim_{x\to0^+}f(x))$

$=[e^{-\frac{1}{e}},1)$ αφού $\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}e^{x\ln x}=1$ και . $\lim_{x\to0^+}(x\ln x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\right)\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{\underset{dl}{=}}\lim_{x\to0^+}(-x)=0$.

Η f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_2=(\frac{1}{e},+\infty)$, άρα

$f(A_2)=(\lim_{x\to\frac{1}{e}^+}f(\mathrm{x}),\lim_{x\to+\infty}f(x))=(e^{-\frac{1}{e}},+\infty)$ οπότε το $256\notin f(A_1)$,όμως $\in f(A_2)$ όπου η f είναι γνησίως αύξουσα άρα η f(x)=256 έχει μοναδική ρίζα την προφανή ρίζα χ=4.

ιν) ισχύει ότι $x^x \ge e^{-\frac{1}{e}}$ (ολικό ελάχιστο) η ισότητα μόνον για χ=$\frac{1}{e}$ άρα

$$\int_1^{2018} x^x dx \succ \int_1^{2018} e^{-\frac{1}{e}} dx = e^{-\frac{1}{e}}[x]_1^{2018} = 2017e^{-\frac{1}{e}}$$

ν) Η f στρέφει τα κοίλα άνω και ψ=χ εφαπτομένη στο 1 άρα $x^x \ge x \Rightarrow$

$$\int_{\frac{2}{e}}^{2} x^x dx > \int_{\frac{2}{e}}^{2} x dx = [\frac{x^2}{2}]_{\frac{2}{e}}^{2} \Rightarrow \int_{\frac{2}{e}}^{2} x^x dx > \frac{2e^2-2}{e^2}$$

νι) $2f(\frac{\ln x^e+1}{e})+3f(\frac{e^x-e+1}{e})=\frac{5}{e}$ ισχύει $f(x)\ge e^{-\frac{1}{e}}$ η ισότητα μόνον για χ=$\frac{1}{e}$

τότε όμως $2f(\frac{\ln x^e+1}{e})\ge \frac{2}{e^{\frac{1}{e}}}$ και $3f(\frac{e^x-e+1}{e})\ge \frac{3}{e^{\frac{1}{e}}}$ άρα

$2f(\frac{\ln x^e+1}{e})+3f(\frac{e^x-e+1}{e})=\frac{5}{e^{\frac{1}{e}}}$ ισχύει μόνον αν $\frac{\ln x^e+1}{e}=\frac{1}{e}$ και $\frac{e^x-e+1}{e}=\frac{1}{e}$

που ισχύει μόνον για χ=1.

νιι) $x'(t)=1\, m/h$ άρα $x(t)=t+c$ για τα=1 το c=0 άρα χ(t)=t και ψ(t)=t^t άρα

$\psi'(t)=t^t(\ln t+1)$ και συνεπώς η τετμημένη γίνεται ελάχιστη για t=$\frac{1}{e}$.

<u>ΘΕΜΑ 4ο</u>

Α

ι) Αν η g δεν ήταν σταθερή και έπαιρνε δυο διαφορετικές τιμές (ακέραιες) από θεώρημα ενδιάμεσων τιμών θα έπαιρνε και μη ακέραιες τιμές άτοπο άρα η g είναι σταθερή και επειδή g(2018)=1 η g(χ)=1 .

ιι $f(x)=e^x+x^3+1 \Rightarrow f'(x)=e^x+3x^2>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα άρα 1-1 και ως συνεχής θα έχει σύνολο τιμών το $f(\mathrm{A})=(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x))=(-\infty,+\infty)=$

Df^{-1}

ιιι) η εφαπτομένη της Cf στο Α(0,2) είναι η ψ=χ+2 και λόγω συμμετρίας ως προς ψ=χ η εφαπτομένη της Cf^{-1} στο β(2,0) θα είναι η χ=ψ+2 ⇔ ψ=χ-2

ιν) στην f(x) για χ το $f^{-1}(x)$ έχουμε $e^{f^{-1}(x)}+(f^{-1})^3(x)=x-1$

Άρα $h(x)=(x-1)^2+\ln(x-1)$ και στο [2,4] είναι $h(x)\ge 0$ και συνεπώς

$$E=\int_2^4 (x-1)^2+\ln(x-1)dx=\int_2^4 (x-1)^2 dx+\int_2^4 (x-1)'\ln(x-1)dx=$$

$$[\frac{(x-1)^3}{3}]_2^4+[(x-1)\ln(x-1)]_2^4-[x]_2^4 = 7+3\ln 3-\frac{1}{3}$$ τ.μ.

ν) Ισχύει ότι $f'(x)=e^x+3x^2$ και $f(f^{-1}(x))=x$ άρα $f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x)=1$

δηλαδή $[e^{f^{-1}(x)}+3(f^{-1}(x)].(f^{-1})'(x)=1$ άρα $(f^{-1})'(x)=\frac{1}{[e^{f^{-1}(x)}+3(f^{-1}(x)]}$

και άρα $\int_2^{e+2}\frac{1}{e^{f^{-1}(x)}+3(f^{-1})^2(x)}dx=\int_2^{e+2}(f^{-1})'(x)dx=[f^{-1}(x)]_2^{e+2}=1-0=1$

Β.

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο [2,3] θα είναι f(3)-f(2)>0 άρα f(2)-f(1)<0 και f(4)-f(3)<0. Άρα από ΘΜΤ στα [1,2], [2,3], [3,4] υπάρχει $\alpha\in(1,2): f'(\alpha)<0$, $\beta\in(2,3): f'(\beta)>0$, $\gamma\in(3,4): f'(\gamma)<0$ και επειδή η f΄ είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη από ΘΒ στα [α,β], [β,γ] για την f΄ υπάρχουν κ∈ (α,β) τέτοιο ώστε f' (κ)=0 και λ∈ (β,γ) τέτοιο ώστε f' (λ)=0 οπότε από θεώρημα Rolle στην f΄ στο [κ,λ] υπάρχει ξ∈ (κ,λ) τέτοιο ώστε f'' (ξ)=0 δηλαδή η Cf' έχει οριζόντια εφαπτομένη.