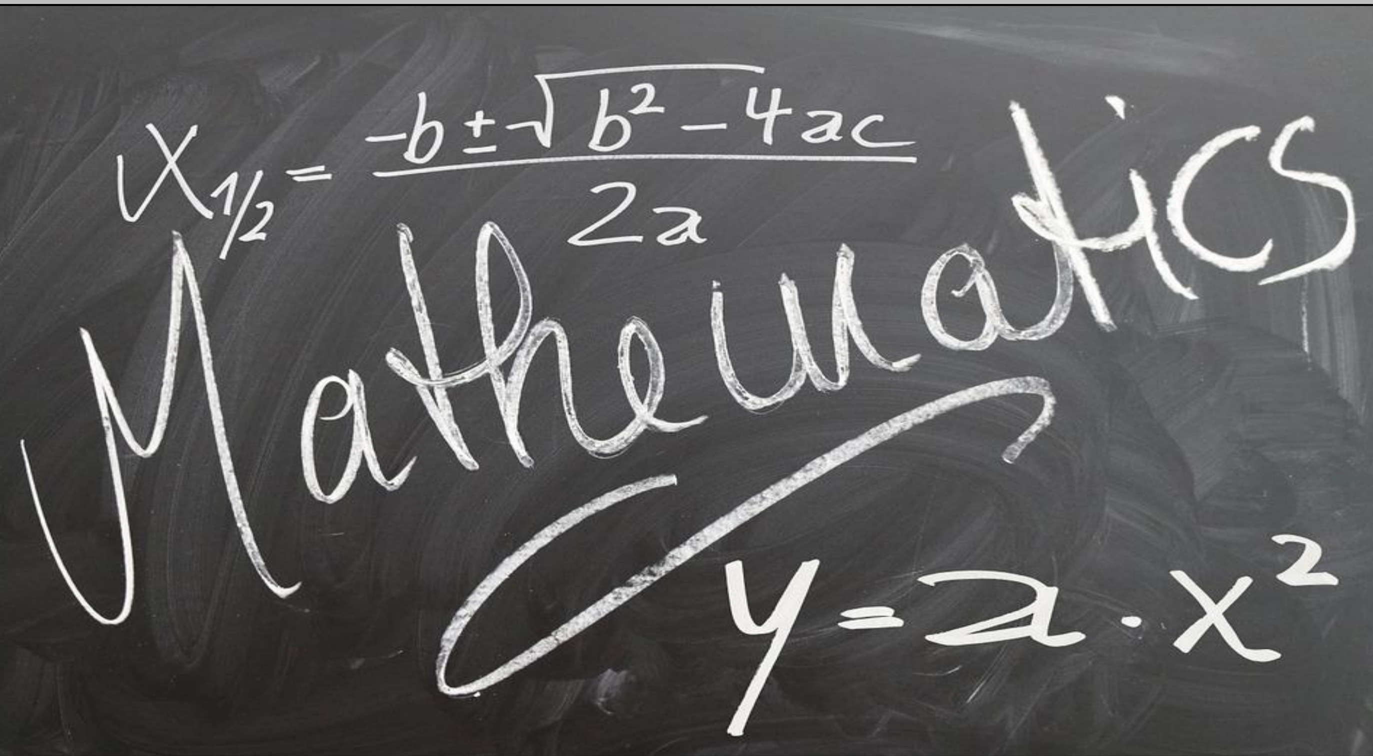
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Βασικές Επισημάνσεις στις εξισώσεις και ανισώσεις 2ου Βαθμού με παράμετρο

www.askisopolis.gr

Ν.Τούντας - Σ.Μιχαήλογλου - Β.Ραμαντάνης

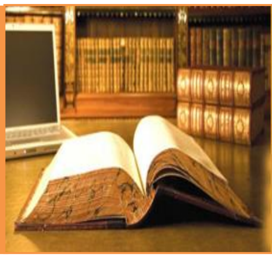


ΟΜΑΔΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ:

-Θετικών σπουδών

-Οικονομίας και Πληροφορικής

Σημειώσεις και μεθοδολογίες στις ανισώσεις που σχετίζονται με την επίλυση εξίσωσης δεύτερου βαθμού με παράμετρο για την εύρεση της αντίστροφης συνάρτησης. Προτείνονται 4-5 διαφορετικοί τρόποι.



Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος θεμάτων και ασκήσεων

<u>ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:</u> Νίκος Τούντας

<u>ΣΥΜΜΕΤΕΧΟΥΝ:</u> Στέλιος Μιχαήλογλου – Βαγγέλης Ραμαντάνης

Έχει παρατηρηθεί ότι οι μαθητές έχουν τεράστια αδυναμία στην επίλυση ανισώσεων των τεσσάρων παρακάτω μορφών:

1η Περίπτωση: $-x+|x+\kappa|\geq 0$ ή $x+|x+\kappa|\leq 0$

2η Περίπτωση: $-x-|x+\kappa|\geq 0$ ή $x-|x+\kappa|\leq 0$

3η Περίπτωση: $-x+\sqrt{x^2+\kappa}\geq 0$ ή $-x+\sqrt{x^2+\kappa}\leq 0$

4η Περίπτωση: $-x-\sqrt{x^2+\kappa}\geq 0$ ή $-x-\sqrt{x^2+\kappa}\leq 0$

Η μαγεία και το μεγαλείο των μαθηματικών φαίνεται στο γεγονός ότι η επίλυση τους μπορεί να πραγματοποιηθεί με πολλούς διαφορετικούς τρόπους. Θα παρουσιάσουμε λοιπόν 4-5 διαφορετικούς τρόπους επίλυσης για κάθε περίπτωση μέσα από δύο ασκήσεις.
Το θέμα μας είναι οι μεθοδολογίες στις ανισώσεις που σχετίζονται με την επίλυση εξίσωσης δεύτερου βαθμού με παράμετρο.
Στην συνέχεια θα παραθέσουμε και ένα είδος ασκήσεων της Γ΄ Λυκείου, το οποίο παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον και στηρίζεται στην επίλυση αυτών των ανισώσεων. Απλά θα αναρωτηθούμε τι σχέση μπορούν να έχουν αυτές οι ανισώσεις με την εύρεση της αντίστροφης συνάρτησης.

<u>ΑΣΚΗΣΗ 1η</u>

Να λύσετε για τις διάφορες τιμές του y, ως προς x την εξίσωση: $e^{2x}-ye^{x}=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $y\in\mathbb{R}$.

<u>ΛΥΣΗ:</u>

$$e^{2x}-ye^{x}=1 \Leftrightarrow e^{2x}-ye^{x}-1=0 \quad \mathbf{(1)}$$

ΘΕΤΩ $\omega=e^{x}>0$ και έχουμε $\omega^2-y\omega-1=0 \quad \mathbf{(2)}$

$$\Delta = y^2 + 4 > 0$$

Οι ρίζες της **(2)** είναι οι εξής αν ικανοποιούν την συνθήκη του να είναι θετικές αφού $\omega > 0$:

$$\omega_1 = \frac{y+\sqrt{y^2+4}}{2} \text{ και } \omega_2 = \frac{y-\sqrt{y^2+4}}{2}$$

Πάμε να μελετήσουμε λοιπόν το πρόσημο της κάθε ρίζας με τους εξής τρόπους.

1ος Τρόπος: Με χρήση των τύπων Vietta του τριωνύμου της Α΄Λυκείου.

Υποθέτουμε ότι $y - \sqrt{y^2+4} < 0$. Πράγματι $y < \sqrt{y^2+4}$ **(3)**

Αν $y < 0$ τότε η **(3)** ισχύει γιατί $\sqrt{y^2+4} > 0$

Αν $y \geq 0$: **(3)**$\Rightarrow y^2 < y^2 + 4 \Leftrightarrow 4 > 0$ Ισχύει

Άρα $\mathbf{y - \sqrt{y^2+4} < 0}$ για κάθε $\mathbf{y} \in \mathbb{R}$ άρα $\boldsymbol{\omega_2} = \frac{\mathbf{y-\sqrt{y^2+4}}}{\mathbf{2}} < \mathbf{0}$ για κάθε $\mathbf{y} \in \mathbb{R}$.

Αφού αποδείξαμε ότι $\omega_1 > 0$ τότε δεν είναι υποχρεωτικό να λύσουμε με αλγεβρικό τρόπο το πρόσημο της ω_2. Εμείς αρχικά θα κάνουμε χρήση των τύπων Vietta.

Ισχύει: $P = \omega_1 \cdot \omega_2 = \frac{-1}{1} = -1 < 0$ τότε αφού $\omega_2 < 0$ θα έχουμε $\omega_1 > 0$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$

Άρα δεκτή λύση για την (2) είναι η $\boldsymbol{\omega_1} = \frac{\mathbf{y+\sqrt{y^2+4}}}{\mathbf{2}}$ για κάθε $\mathbf{y} \in \mathbb{R}$.

2ος Τρόπος: Αλγεβρική λύση με βάση την Β΄Λυκείου.

Ομοίως αποδεικνύουμε ότι $\omega_2 < 0$ με τον τρόπο που κάναμε πριν.

Πάμε να μελετήσουμε το πρόσημο της ω_1.

$$y + \sqrt{y^2+4} > 0 \Leftrightarrow -y < \sqrt{y^2+4} \quad (\mathbf{4})$$

Αν $y > 0$ τότε η **(4)** ισχύει γιατί $\sqrt{y^2+4} > 0$ και $-y < 0$

Αν $y \leq 0$: **(4)** $\Rightarrow y^2 < y^2 + 4 \Leftrightarrow 4 > 0$ Ισχύει

Άρα $\boldsymbol{\omega_1} = \frac{\mathbf{y+\sqrt{y^2+4}}}{\mathbf{2}} > \mathbf{0}$ για κάθε $\mathbf{y} \in \mathbb{R}$

Άρα δεκτή λύση για την (2) είναι η $\boldsymbol{\omega_1} = \frac{\mathbf{y+\sqrt{y^2+4}}}{\mathbf{2}}$ για κάθε $\mathbf{y} \in \mathbb{R}$.

3ος Τρόπος: Αλγεβρική λύση με χρήση μίας ανισότητας που ισχύει.

Ισχύει $4 > 0 \Leftrightarrow y^2 + 4 > y^2 \Leftrightarrow |y| < \sqrt{y^2+4} \Leftrightarrow -\sqrt{y^2+4} < y < \sqrt{y^2+4} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y + \sqrt{y^2+4} > 0 \text{ και } y - \sqrt{y^2+4} < 0 \Leftrightarrow \frac{y+\sqrt{y^2+4}}{2} > 0 \text{ και } \frac{y-\sqrt{y^2+4}}{2} < 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{\omega_1 > 0 \quad \text{και} \quad \omega_2 < 0}$

Άρα δεκτή λύση για την (2) είναι η $\omega_1 = \frac{y+\sqrt{y^2+4}}{2}$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

4^{ος} Τρόπος: Με χρήση του θεωρήματος διατήρησης προσήμου.

Έστω η συνάρτηση $f(y) = y + \sqrt{y^2+4}\,, y \in \mathbb{R}$

$f(y) = 0 \Leftrightarrow -y = \sqrt{y^2+4} \Leftrightarrow (\text{Πρέπει } y \leq 0) \Leftrightarrow y^2 = y^2 + 4 \Leftrightarrow 4 = 0$ ΑΤΟΠΟ

Άρα επειδή η f είναι συνεχής ως σύνθεση και πράξεις συνεχών και $f(y) \neq 0$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$ τότε η f θα διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και επειδή $f(0) = 2 > 0$ τότε $f(y) > 0$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$ άρα τελικά η $\boldsymbol{\omega_1 = \frac{y+\sqrt{y^2+4}}{2} > 0}$ **για κάθε $y \in \mathbb{R}$.**

Έστω η συνάρτηση $g(y) = y - \sqrt{y^2+4}\,, y \in \mathbb{R}$

$g(y) = 0 \Leftrightarrow y = \sqrt{y^2+4} \Leftrightarrow (\text{Πρέπει } y \geq 0) \Leftrightarrow y^2 = y^2 + 4 \Leftrightarrow 4 = 0$ ΑΤΟΠΟ

Άρα επειδή η g είναι συνεχής ως σύνθεση και πράξεις συνεχών και $g(y) \neq 0$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$ τότε η g θα διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και επειδή $g(0) = -2 < 0$ τότε $f(y) < 0$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$ άρα τελικά η $\boldsymbol{\omega_2 = \frac{y-\sqrt{y^2+4}}{2} < 0}$ **για κάθε $y \in \mathbb{R}$.**

Άρα δεκτή λύση για την (2) είναι η $\omega_1 = \frac{y+\sqrt{y^2+4}}{2}$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

Επομένως και με τους τέσσερις παραπάνω τρόπους αποδείξαμε την ρίζα ως προς το $\omega = e^x$ και στο τέλος πρέπει να λύσουμε ως προς x. Αποδείξαμε ότι:

$$\boldsymbol{\omega 1 = \frac{y+\sqrt{y^2+4}}{2} \Leftrightarrow e^x = \frac{y+\sqrt{y^2+4}}{2} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{y+\sqrt{y^2+4}}{2}\right)} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } y \in \mathbb{R}.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Άλλος ένας βασικός τρόπος για την επίλυση ανισώσεων είναι η χρήση της μονοτονίας όμως δεν συμφέρει πάντα. Για παράδειγμα στην συγκεκριμένη περίπτωση με τον ορισμό της μονοτονίας το να βρούμε την μονοτονία των συναρτήσεων $f(y) = y + \sqrt{y^2+4}\,, y \in \mathbb{R}$ και $g(y) = y - \sqrt{y^2+4}\,, y \in \mathbb{R}$ είναι αρκετά δύσκολο. Επίσης με παραγώγους είναι εύκολο να βρούμε την μονοτονία, όμως για το πρόσημο της παραγώγου, αν τις παραγωγίσουμε θα δούμε ότι πρέπει να λύσουμε τις αρχικές ανισώσεις, που θέλουμε να λύσουμε άρα θα χρειαστεί ένας από τους πάνω τρόπους άρα η χρήση της μονοτονίας είναι ανώφελη.

ΑΣΚΗΣΗ 2η

Να λύσετε για τις διάφορες τιμές του y, ως προς x την εξίσωση: $\frac{1}{2}x^2 + yx = y + \frac{1}{2}$ για κάθε $x > 0$ και $y \in \mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ:

$$\frac{1}{2}x^2 + yx = y + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 + yx - \left(y + \frac{1}{2}\right) = 0 \quad (\mathbf{1})$$

$$\Delta = y^2 - 4\frac{1}{2}\left(-\left(y + \frac{1}{2}\right)\right) = y^2 + 2y + 1 = (y+1)^2 \geq 0$$

Οι ρίζες της **(1)** είναι οι εξής αν ικανοποιούν την συνθήκη του να είναι θετικές αφού $x > 0$:

$$x_1 = \frac{-y+\sqrt{(y+1)^2}}{2\cdot\frac{1}{2}} = -y + |y+1| \text{ και } x_2 = \frac{-y-\sqrt{(y+1)^2}}{2\cdot\frac{1}{2}} = -y - |y+1|$$

Πάμε να μελετήσουμε λοιπόν το πρόσημο της κάθε ρίζας με τους εξής τρόπους.

1ος Τρόπος: Με χρήση των τύπων Vietta του τριωνύμου της Α΄Λυκείου.

Υποθέτουμε ότι η x_1 είναι θετική. Πράγματι $x_1 > 0 \Leftrightarrow -y + |y+1| > 0 \Leftrightarrow |y+1| > y$ **(2)**

Αν $y < 0$: Τότε ισχύει η (1) αφού $|y+1| \geq 0$

Αν $y \geq 0$: **(2)** $\Rightarrow y^2 + 2y + 1 > y^2 \Leftrightarrow y > -\frac{1}{2}$

Άρα η $x_1 > 0$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$

Αφού αποδείξαμε ότι $x_1 > 0$ τότε δεν είναι υποχρεωτικό να λύσουμε με αλγεβρικό τρόπο το πρόσημο της x_2. Εμείς αρχικά θα κάνουμε χρήση των τύπων Vietta.

Ισχύει: $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{-y-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = -2y - 1$

Αν $P < 0 \Leftrightarrow -2y - 1 < 0 \Leftrightarrow y > -\frac{1}{2}$ τότε αφού $x_1 > 0$ θα έχουμε $x_2 < 0$ για κάθε $y > -\frac{1}{2}$.

Άρα δεκτή λύση για την (1) είναι η $x_1 = -y + |y+1|$ για κάθε $y > -\frac{1}{2}$.

Αν $P = 0 \Leftrightarrow -2y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}$ τότε αφού $x_1 > 0$ θα έχουμε $x_2 = 0$.

Άρα δεκτή λύση για την (1) είναι η $x_1 = -y + |y+1|$ για $y = -\frac{1}{2}$.

Αν $P > 0 \Leftrightarrow -2y - 1 > 0 \Leftrightarrow y < -\frac{1}{2}$ τότε αφού $x_1 > 0$ θα έχουμε $x_2 > 0$ για κάθε $y < -\frac{1}{2}$.

Άρα δεκτές λύσεις για την (1) είναι οι $x_1 = -y + |y+1|$ και $x_2 = -y - |y+1|$για κάθε $y < -\frac{1}{2}$.

2ος Τρόπος: Αλγεβρική λύση με βάση την Β΄ Λυκείου.

Ομοίως αποδεικνύουμε ότι $x_1 > 0$ με τον τρόπο που κάναμε πριν.
Πάμε να μελετήσουμε το πρόσημο της x_2.

$x_2 < 0 \Leftrightarrow -y - |y+1| < 0 \Leftrightarrow |y+1| > -y$ **(3)**
Αν $y \geq 0$ τότε η **(3)** ισχύει γιατί $|y+1| \geq 0$ και $-y \leq 0$
Αν $y < 0$: **(3)** $\Rightarrow y^2 + 2y + 1 > y^2 \Leftrightarrow y > -\frac{1}{2}$
Άρα η $\mathbf{x_2 < 0}$ για κάθε $\mathbf{y > -\frac{1}{2}}$
Άρα δεκτή λύση για την (1) είναι η $\mathbf{x_1 = -y + |y+1|}$ για κάθε $\mathbf{y \geq -\frac{1}{2}}$.

$x_2 = 0 \Leftrightarrow -y - |y+1| = 0 \Leftrightarrow |y+1| = -y \Leftrightarrow y^2 + 2y + 1 = y^2 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}$
Άρα δεκτή λύση για την (1) είναι η $\mathbf{x_1 = -y + |y+1|}$ για $\mathbf{y = -\frac{1}{2}}$.

$x_2 > 0 \Leftrightarrow -y - |y+1| > 0 \Leftrightarrow |y+1| < -y$ **(4)**
Αν $y \geq 0$ τότε η **(4)** αδύνατη γιατί $|y+1| \geq 0$ και $-y \leq 0$
Αν $y < 0$: **(4)** $\Rightarrow y^2 + 2y + 1 < y^2 \Leftrightarrow y < -\frac{1}{2}$
Άρα η $\mathbf{x_2 > 0}$ για κάθε $\mathbf{y < -\frac{1}{2}}$
Άρα δεκτές λύσεις για την (1) είναι οι $\mathbf{x_1 = -y + |y+1|}$ και $\mathbf{x_2 = -y - |y+1|}$ για κάθε $\mathbf{y < -\frac{1}{2}}$.

3ος Τρόπος: Με χρήση του θεωρήματος διατήρησης προσήμου.

Έστω η συνάρτηση $f(y) = -y + |y+1|, y \in \mathbb{R}$
$f(y) = 0 \Leftrightarrow y = |y+1| \Leftrightarrow (\text{Πρέπει } y \geq 0) \Leftrightarrow y^2 = y^2 + 2y + 1 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}$ ΑΤΟΠΟ
Άρα επειδή η f είναι συνεχής ως σύνθεση και πράξεις συνεχών και $f(y) \neq 0$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$ τότε η f θα διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και επειδή $f(0) = 1 > 0$ τότε $f(y) > 0$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$ και επειδή άρα τελικά **η $\mathbf{x_1 > 0}$ για κάθε $\mathbf{y \in \mathbb{R}}$.**

Έστω η συνάρτηση $g(y) = -y - |y+1|, y \in \mathbb{R}$
$g(y) = 0 \Leftrightarrow -y = |y+1| \Leftrightarrow (\text{Πρέπει } y \leq 0) \Leftrightarrow y^2 = y^2 + 2y + 1 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}$ ΔΕΚΤΗ
Άρα επειδή η g είναι συνεχής ως σύνθεση και πράξεις συνεχών και $g(y) \neq 0$ για κάθε $y \neq -\frac{1}{2}$ τότε η g διατηρεί πρόσημο στο $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ και στο $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ και επειδή $g(0) = -1 < 0$ τότε $g(y) < 0$ για κάθε $y > -\frac{1}{2}$ και $g(-1) = 1 > 0$ τότε $g(y) > 0$ για κάθε $y < -\frac{1}{2}$.
Άρα τελικά:
Άρα η $\mathbf{x_2 < 0}$ για κάθε $\mathbf{y > -\frac{1}{2}}$

Άρα δεκτή λύση για την (1) είναι η $\mathbf{x_1 = -y + |y+1|}$ για κάθε $\mathbf{y > -\frac{1}{2}}$

Άρα δεκτή λύση για την (1) είναι η $\mathbf{x_1 = -y + |y+1|}$ για $\mathbf{y = -\frac{1}{2}}$.

Άρα η $\mathbf{x_2 > 0}$ για κάθε $\mathbf{y < -\frac{1}{2}}$
Άρα δεκτές λύσεις για την (1) είναι οι $\mathbf{x_1 = -y + |y+1|}$ και $\mathbf{x_2 = -y - |y+1|}$για κάθε $\mathbf{y < -\frac{1}{2}}$.

<u>4ος Τρόπος:</u> Θεωρούμε συνάρτηση και ανοίγουμε το απόλυτο.

Έστω η συνάρτηση $f(y) = -y + |y+1|\,, y \in \mathbb{R}$

Ισχύει: $f(y) = \begin{cases} -2y-1\,, y < -1 \\ 1 \qquad\quad\;\, , y \geq -1 \end{cases}$ για $y \geq -1$ προφανώς ισχύει $f(y) = 1 > 0$

$-2y - 1 > 0 \Leftrightarrow y < -\frac{1}{2}$ άρα προφανώς για κάθε $y < -1$ έχουμε $f(y) > 0$

άρα $f(y) > 0$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$ **Άρα η $\mathbf{x_1 = -y + |y+1| > 0}$ για κάθε $\mathbf{y} \in \mathbb{R}$**

Έστω η συνάρτηση $g(y) = -y - |y+1|\,, y \in \mathbb{R}$

Ισχύει: $g(y) = \begin{cases} 1 \qquad\quad\;\, , y < -1 \\ -2y-1\,, y \geq -1 \end{cases}$ για $y < -1$ προφανώς ισχύει $g(y) = 1 > 0$

$-2y - 1 \leq 0 \Leftrightarrow y \geq -\frac{1}{2}$ άρα προφανώς για κάθε $y \geq -1$ έχουμε $g(y) < 0$

Άρα η $\mathbf{x_2 \leq 0}$ για κάθε $\mathbf{y \geq -\frac{1}{2}}$ και $\mathbf{x_2 > 0}$ για κάθε $\mathbf{y < -\frac{1}{2}}$.

<u>5ος Τρόπος:</u> Με χρήση της μονοτονίας συνάρτησης.

Όταν κάτι πάει στραβά σε μία ανισότητα σκέψου να θεωρήσεις συνάρτηση και να δουλέψεις με μονοτονία ή ακρότατα. Δεν λειτουργεί πάντα όπως είδαμε στην άσκηση 1.

Έστω η συνάρτηση $f(y) = -y + |y+1|\,, y \in \mathbb{R}$

Ισχύει: $f(y) = \begin{cases} -2y-1\,, y < -1 \\ 1 \qquad\quad\;\, , y \geq -1 \end{cases}$ για $y \geq -1$ προφανώς ισχύει $f(y) = 1 > 0$

Έστω η συνάρτηση $h(y) = -2y - 1\,, y \in \mathbb{R}$

Για κάθε $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ με $y_1 < y_2 \Rightarrow -y_1 > -y_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow h(y_1) > h(y_2)$ άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Για $y < -1 \Rightarrow h(y) > h(-1) \Rightarrow h(y) > 1 > 0$

Επομένως $-2y - 1 > 0$ για κάθε $y < -1$ άρα τελικά $f(y) > 0$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

Άρα η $\mathbf{x_1 = -y + |y+1| > 0}$ για κάθε $\mathbf{y} \in \mathbb{R}$

Έστω η συνάρτηση $g(y) = -y - |y+1|\,, y \in \mathbb{R}$

Ισχύει: $g(y) = \begin{cases} 1 & , y < -1 \\ -2y - 1 & , y \geq -1 \end{cases}$ για $y < -1$ προφανώς ισχύει $g(y) = 1 > 0$

Έστω η συνάρτηση $h(y) = -2y - 1\,, y \in \mathbb{R}$

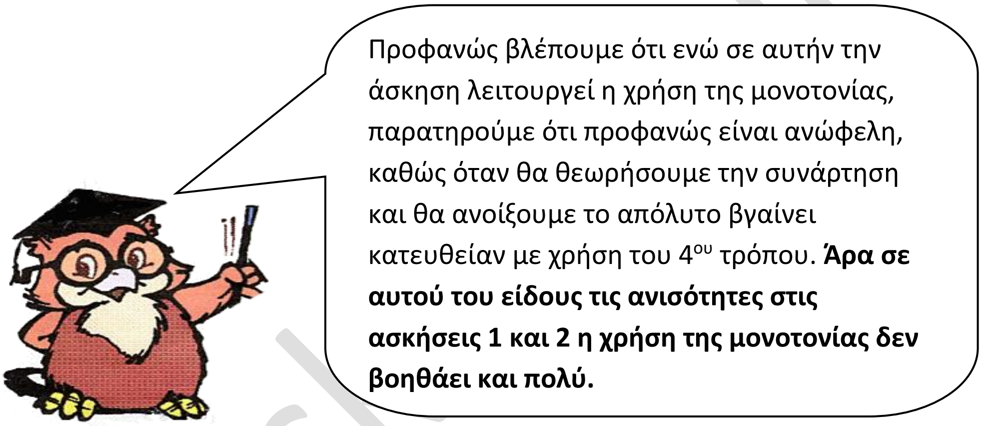
Ομοίως με πάνω αποδεικνύουμε ότι είναι γνησίως φθίνουσα

Για $y \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow h(y) \leq h\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow h(y) \leq 0$

Για $y < -\frac{1}{2} \Rightarrow h(y) > h\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow h(y) > 0$

Επομένως $-2y - 1 \leq 0$ για κάθε $y \geq -\frac{1}{2}$ και $-2y - 1 > 0$ για κάθε $-1 < y < -\frac{1}{2}$

Άρα η $x_2 \leq 0$ για κάθε $y \geq -\frac{1}{2}$ και $x_2 > 0$ για κάθε $y < -\frac{1}{2}$.



<u>6ος Τρόπος:</u> Αλγεβρική λύση για την x_1 με χρήση μίας ανισότητας που ισχύει.

Για κάθε $y \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$-|y+1| < y+1 < |y+1| \Leftrightarrow -y - |y+1| < 1 \ \text{ και } \ -y + |y+1| > 1 \Leftrightarrow \mathbf{x_1 > 1 \ \text{ και } \ x_2 < 1}$$

Επομένως η $x_1 = -y + |y+1| > 1 > 0$ είναι δεκτή λύση για την (1) για κάθε $x > 0$ και $y \in \mathbb{R}$

Για την x_2 εφαρμόζουμε έναν από του παραπάνω τρόπους.

Είδαμε λοιπόν μερικούς ωραίους τρόπους για να αποδεικνύουμε τέτοιου είδους ανισότητες τις οποίες μπορεί να συναντήσουμε πολλές φορές συνήθως σε περιορισμούς (πχ μέσα στο ln( )).

Το γεγονός ότι στις δύο παραπάνω ασκήσεις υπήρχε μία μεταβλητή και μία παράμετρος δεν είναι τυχαίο. Θέλαμε να τονίσουμε τον τρόπο επίλυσης της 3ης Άσκησης που ακολουθεί παρακάτω.

Το θέμα μας είναι η εύρεση της αντίστροφης μίας συνάρτησης.

Η εύρεση της αντίστροφής μίας συνάρτησης είναι μία διαδικασία άλλοτε εύκολη κι άλλοτε δύσκολη. Πρώτα από όλα έχει κάποια συγκεκριμένα στάδια. Αρχικά πρέπει να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση αντιστρέφεται. Στην συνέχεια πρέπει να βρούμε το σύνολο τιμών της f ή να πάρουμε τους κατάλληλους περιορισμούς της εξίσωσης $f(x) = y$ και τέλος να λύσουμε την εξίσωση. Η επίλυση της εξίσωσης αυτής μπορεί να είναι πολλών ειδών. Αρχικά μπορεί η f να είναι πολυώνυμο πρώτου βαθμού και απλά να λύσουμε ως προς x. Μπορεί να είναι εκθετική ή λογαριθμική και να πρέπει να λογαριθμήσουμε και αντίστοιχα να εκθετίσουμε για να λύσουμε ως προς x. Μπορεί να είναι η x^2 που τότε ριζώνουμε ή μπορεί να είναι η x^3 που τότε χρειάζεται να πάρουμε και περιπτώσεις για να ριζώσουμε, όπως και σε κάθε ρίζα περιττής τάξης. Μία άλλη κατηγορία είναι η συμπλήρωση τετραγώνου και πιο σπάνια η συμπλήρωση κύβου **(Βλέπε άσκηση 5 στο www.askisopolis.gr στην ενότητα η άσκηση της εβδομάδας στο έτος 2019-2020).** Λογικά καλύψαμε όλες τις πιθανές περιπτώσεις στο επίπεδό του λυκείου. Ή μήπως όχι; Ας δούμε λοιπόν μία άσκηση που καλύπτει άλλη μία περίπτωση αρκετά σπάνια, παρόλα αυτά πολύ όμορφη.

ΑΣΚΗΣΗ 3η

Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x - e^{-x}, x \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και έχει αντίστροφη την $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{y+\sqrt{y^2+4}}{2}\right), x \in \mathbb{R}$

ΛΥΣΗ:

Για κάθε $x1, x2 \in \mathbb{R}$ με $x1 < x2 \Rightarrow e^{x1} < e^{x2}$

$$\Rightarrow -x1 > -x2 \Rightarrow e^{-x1} > e^{-x2} \Rightarrow -e^{-x1} < -e^{-x2}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη $f(x1) < f(x2)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα άρα 1-1 άρα αντιστρέφεται

Επειδή η f συνεχής ως σύνθεση και πράξεις συνεχών και γνησίως αύξουσα τότε:

$f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = \mathbb{R}$ (Τα όρια υπολογίζονται εύκολα)

Για $x \in \mathbb{R}$ και $y \in \mathbb{R}$: $y = f(x) \Rightarrow y = e^x - e^{-x} \Rightarrow y = \frac{e^{2x}-1}{e^x} \Rightarrow e^{2x} - e^x y - 1 = 0$

Με βάση την 1η Άσκηση με όποιον τρόπο επιλέξουμε από τους τρεις ή και κάποιον διαφορετικό καταλήγουμε ότι:

$$f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{y+\sqrt{y^2+4}}{2}\right), x \in \mathbb{R}$$

Νίκος Τούντας – Στέλιος Μιχαήλογλου – Βαγγέλης Ραμαντάνης